Fundamentos de Transmisión y Propagación de Ondas

Fundamentos de Transmisión y Propagación de Ondas
2º curso, 2º cuatrim. del Grado en Ing. de T[as] y Servicios de Telecomunicación
Escuela Politécnica Superior, Universidad Autónoma de Madrid
Jorge A. Ruiz Cruz (jorge.ruizcruz@uam.es, http://rfcas.eps.uam.es)

Tema I. El modelo electromagnético basado en las ecuaciones de Maxwell.

Jorge A. Ruiz Cruz (jorge.ruizcruz@uam.es, http://rfcas.eps.uam.es)
Escuela Politécnica Superior, Universidad Autónoma de Madrid

Grupo de RadioFrecuencia: Circuitos, Antenas y Sistemas

I.2. Definición de los Medios Materiales en el Modelo Electromagnético.

• Las ecuaciones de Maxwell establecen dos relaciones independientes entre los vectores del campo electromagnético.

• Para tener un sistema de ecuaciones que permitan obtener los campos se requieren dos ecuaciones adicionales entre los vectores de campo, que serán proporcionadas por el medio: "las relaciones constitutivas del medio" incorporan al modelo electromagnético la información del medio en el que se desarrolla el problema.

• De esta forma, las relaciones constitutivas reflejan la influencia del medio en las relaciones entre los campos:
"***Cada medio establece unas condiciones particulares propias entre los vectores de campo electromagnético adicionales a las ecuaciones de Maxwell***".

• Es este tema se va a ver la descripción de los medios y su papel en la resolución del modelo electromagnético.

• Esta descripción se verá completada, desde el punto de vista de la asignatura, en el tema II.1 con las relaciones constitutivas en el dominio de la frecuencia.

Ecuaciones asociadas al modelo electromagnético

• Análisis del problema asociado al modelo electromagnético: ***"tres ingredientes"***

I1) la densidad de corriente y la carga son las fuente del problema "*dadas*", y además relacionadas por la **ecuación de continuidad de la carga**:

$$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{J}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) + \frac{\partial \rho(\vec{\boldsymbol{r}}, t)}{\partial t} = 0$$

I2) A pesar de las cuatro ecuaciones de Maxwell, sólo hay dos fundamentales (las ecuaciones vectoriales del rotacional), para cuatro vectores de campo incógnita: $\vec{\boldsymbol{E}}, \vec{\boldsymbol{D}}, \vec{\boldsymbol{B}}, \vec{\boldsymbol{H}}$.

(1) $$\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = -\frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t)}{\partial t} \qquad \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{D}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \rho(\vec{\boldsymbol{r}}, t)$$

(2) $$\nabla \times \vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \vec{\boldsymbol{J}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) + \frac{\partial \vec{\boldsymbol{D}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t)}{\partial t} \qquad \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = 0$$

I3) Para tener un sistema de ecuaciones que permitan obtener los campos se requieren dos ecuaciones adicionales entre los vectores de campo (y así se tendrían cuatro ecuaciones (1)-(4) para cuatro incógnitas), que son ***las relaciones constitutivas del medio***:

$$\vec{\boldsymbol{D}} = \vec{\boldsymbol{D}}[\vec{\boldsymbol{E}}, \vec{\boldsymbol{H}}] \quad (3) \qquad \vec{\boldsymbol{B}} = \vec{\boldsymbol{B}}[\vec{\boldsymbol{E}}, \vec{\boldsymbol{H}}] \quad (4)$$

La dependencia de $\vec{\boldsymbol{D}}$ y $\vec{\boldsymbol{B}}$ con $\vec{\boldsymbol{E}}$ y $\vec{\boldsymbol{H}}$ es una función específica de cada medio (que también se conocen como ecuaciones de estado)

Clasificación de los medios (I)

- Los medios se clasifican de acuerdo a diferentes características de las relaciones constitutivas:

1) Las relaciones constitutivas, en general, pueden ser funciones muy complicadas que sean **no lineales**.
→ En el caso de que las relaciones constitutivas sean lineales, se dice que el medio es **lineal**.

2) Las propiedades físicas de un medio, en general, pueden ser distintas para cada punto, y en ese caso se dice que el medio es **no homogéneo** (o **inhomogéneo**).
→ Es **homogéneo** si la relaciones del medio no dependen del punto que se observe.

3) La propiedades de un medio, en general, pueden depender de la dirección de observación en torno a un punto dado, y en ese caso se dice que el medio es **anisótropo**.
→ Es **isótropo** si las propiedades del medio no dependen de la dirección.

4) La relación entre los campos impuesta por el medio en un instante, en general, puede depender de los valores en otro instantes y se dice que el medio **tiene dispersión temporal**.
→ El medio es sin **dispersión temporal** si la relación en un instante cualquiera no depende de otros instantes (***es decir, tiene respuesta instantánea***).

Clasificación de los medios (y II)

1) Linealidad | 2) Homogeneidad | 3) Isotropía | 4) Dispersión temporal

Un medio puede ser:
- Lineal
  - Homogéneo
    - Isótropo
      - sin dispersión temporal
      - con dispersión temporal
    - Anisótropo
      - sin dispersión temporal
      - con dispersión temporal
  - No Homogéneo
    - Isótropo
      - sin dispersión temporal
      - con dispersión temporal
    - Anisótropo
      - sin dispersión temporal
      - con dispersión temporal
- No Lineal

Medio lineal, homogéneo, isótropo y sin disp. temp.

• Aunque luego se van a ver distintos tipos de medios, es interesante primero tener una referencia de como sería la relación del medio en el caso más sencillo:

- Caso más sencillo: medio **lineal, isótropo, homogéneo y sin dispersión temporal:**

$$\vec{\boldsymbol{D}} = cte_E \vec{\boldsymbol{E}} \qquad \vec{\boldsymbol{B}} = cte_H \vec{\boldsymbol{H}}$$

sólo hay dos direcciones de campo independientes

- Ej: el espacio vacío corresponde a este caso y las constantes se denominan:

$cte_E \equiv \varepsilon_0 = 8.85418781 \cdot 10^{-12}$ $[F/m]$: **permitividad eléctrica** del vacío

$cte_H \equiv \mu_0 = 1.25663706 \cdot 10^{-6}$ $[H/m]$: **permeabilidad magnética** del vacío

$c_0 \equiv 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = 2.99792458 \cdot 10^{8}$ $[m/s]$: velocidad de la luz en el vacío

- Ej: dieléctrico ideal:

$cte_E \equiv \varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 \qquad \varepsilon_r \geq 1$ **Constante dieléctrica** (sin dimensiones): cociente entre la permitividad del medio y del vacío.

$cte_H \equiv \mu = \mu_0$ $\mu_r = \mu/\mu_0$ (**permeabilidad relativa**) es $\mu_r = 1$ para materiales no magnéticos.

$c = 1/\sqrt{\mu\varepsilon} = c_0/\sqrt{\varepsilon_r} \leq c_0$ velocidad de la luz en el medio

(ver anexo III para ejemplos)

Ejemplos de relaciones constitutivas (I)

• Se van a ver ahora ejemplos de distintos tipos de medios, catalogados de acuerdo a la clasificación ya vista, y en donde se prestará atención a la *forma* de la relación del medio (sin entrar en la base física que la origina):

"Punto de vista del medio como ***sistema*** con entrada $(\vec{\boldsymbol{E}}, \vec{\boldsymbol{H}})$ y salida $(\vec{\boldsymbol{D}}, \vec{\boldsymbol{B}})$"

A) Caso de medio más general (funciones genéricas específicas de cada medio):

$$\vec{\boldsymbol{D}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \vec{\boldsymbol{D}}\left[\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t), \vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)\right]$$
$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \vec{\boldsymbol{B}}\left[\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t), \vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)\right]$$

B) Caso de medios sin interacción cruzada (la mayoría si el nivel de $\vec{\boldsymbol{E}}, \vec{\boldsymbol{H}}$ no es muy alto):

$$\vec{\boldsymbol{D}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \vec{\boldsymbol{D}}\left[\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)\right]$$
$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \vec{\boldsymbol{B}}\left[\vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)\right]$$

C) Caso de un medio **lineal** con respuesta instantánea (**sin dispersión temporal**) , donde el medio se comporta igual para todas las direcciones del espacio (**isótropo**), pero es **inhomogéneo** ($\varepsilon(\vec{\boldsymbol{r}}), \mu(\vec{\boldsymbol{r}})$ dependen de $\vec{\boldsymbol{r}}$)

$$\vec{\boldsymbol{D}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \varepsilon(\vec{\boldsymbol{r}})\, \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)$$
$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \mu(\vec{\boldsymbol{r}})\, \vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)$$

Ejemplos de relaciones constitutivas (y II)

D) Caso de un medio **lineal** pero que no presenta respuesta instantánea: posee **dispersión temporal** y la relación se obtiene por una integral de convolución:

$$\vec{\boldsymbol{D}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \int_{-\infty}^{t} f_\varepsilon(\vec{\boldsymbol{r}},t-t')\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t')dt' \equiv f_\varepsilon(\vec{\boldsymbol{r}},t) \circledast \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)$$

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=f_\mu(\vec{\boldsymbol{r}},t) \circledast \vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)$$

Integral de convolución (se hace componente a componente del vector)

- La respuesta en un instante depende la historia pasada pero no de la futura (es causal).

- Desde el punto de vista del medio como sistema, ***es del tipo lineal e invariante en el tiempo (LTI)***, y se podrá caracterizar en la frecuencia mediante la transf. de Fourier (tema II.1).

- Notar que para un medio sin dispersión temporal: $f_\varepsilon(\vec{\boldsymbol{r}},\tau) = \varepsilon(\vec{\boldsymbol{r}})\delta(\tau)$ $\quad f_\mu(\vec{\boldsymbol{r}},\tau) = \mu(\vec{\boldsymbol{r}})\delta(\tau)$

- Si además fuera homogéneo: $f_\varepsilon(\vec{\boldsymbol{r}},\tau) = \varepsilon\delta(\tau)$ $\quad f_\mu(\vec{\boldsymbol{r}},\tau) = \mu\delta(\tau)$

- La dispersión temporal ***sí*** será tenida en cuenta en esta asignatura. Hay otros tipos de medios que se ven en el Apéndice del tema I.2 ***sólo como ejemplos***, pero que no se tratarán durante el curso.

Ley de Ohm en forma puntual

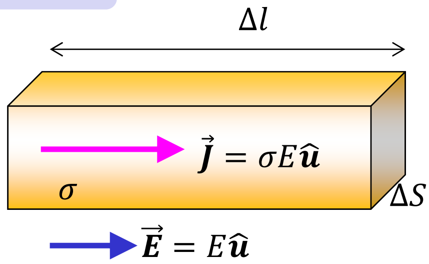
- Si hay cargas libres en el seno del campo electromagnético existirá una corriente de conducción que en cada punto se caracterizará por el vector densidad de corriente $\vec{\boldsymbol{J}}$.
- Experimentalmente se observa que la densidad de corriente que se establece en determinados medios materiales como resultado de un campo eléctrico es proporcional al propio campo eléctrico (en ciertos márgenes lineales).
- Esto se expresa mediante la "Ley de Ohm" en forma puntual: $\vec{\boldsymbol{J}} = \sigma\vec{\boldsymbol{E}}$ que se relaciona con la *tradiciona*l de manera muy sencilla:

$$\frac{\Delta I}{\Delta S} \equiv J = \sigma E = \sigma\frac{\Delta V}{\Delta l}$$

$$\Delta V \equiv E \cdot \Delta l \quad [\mathrm{V}]$$

$$\Delta V = (\frac{1}{\sigma}\frac{\Delta l}{\Delta S})\Delta I = R\Delta I$$

$$R = \frac{1}{\sigma}\frac{\Delta l}{\Delta S} \quad [\Omega]$$



- Formalmente, la **conductividad σ [S/m] (*bulk conductivity*) caracteriza al material frente a los fenómenos de conducción al igual que ε y μ lo caracterizan frente a fenómenos de polarización eléctrica y magnética** (ver Apénd. B), respectiv.: "***La ley de Ohm es una relación constitutiva más del medio***", sobre la que se podría hacer la misma clasificación que para las de $\vec{\boldsymbol{D}}$ y $\vec{\boldsymbol{B}}$.

Clasificación conductores vs. dieléctricos (I)

• El valor de la conductividad frente a la permitividad permite clasificar los medios en conductores o dieléctricos (o semiconductores).

• Sea un medio lineal, isótropo, homogéneo y sin dispersión temporal donde se cumple la ley de Ohm. Se calcula la divergencia a la corriente:

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{\boldsymbol{J}} \overset{(1)}{=} \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\sigma\vec{\boldsymbol{E}}\right) \overset{(2)}{=} \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\dfrac{\sigma}{\varepsilon}\vec{\boldsymbol{D}}\right) \overset{(3)}{=} \dfrac{\sigma}{\varepsilon}\boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{\boldsymbol{D}} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon}\rho \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{\boldsymbol{J}} + \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0\end{array}\right\}$$

(1) Ley de Ohm $\vec{\boldsymbol{J}} = \sigma\vec{\boldsymbol{E}}$

(2) Isótropo

(3) homogéneo

• Al utilizar la ecuación de continuidad de carga se llega a la forma de la variación de la densidad de carga en el tiempo:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon}\rho = 0 \Rightarrow \rho(t) = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t} = \rho_0 e^{-t/\tau}$$

$\rho_0 = \rho(t)|_{t=0}$ [C/m^3]

$\tau = \dfrac{\varepsilon}{\sigma}$ [s] Constante de relajación

• Se llega a la conclusión de que al depositar una cierta carga ρ en el cuerpo, tiende a desaparecer, anulándose en $t = \infty$, con rapidez dada por $\tau = \varepsilon/\sigma$ (τ ⇈ más *lento* desaparece)

Clasificación conductores vs. dieléctricos (y II)

• Si $\sigma = 0$, $\tau = \infty$ y el cuerpo es una aislante (o dieléctrico perfecto): la carga no se mueve.

• Si $\sigma = \infty$, $\tau = 0$ y el cuerpo es una conductor perfecto, en el que toda la carga ajena a el se va inmediatamente a la superficie.

• Se hablará de cuerpo semiconductor cuando τ sea de valor intermedio entre los anteriores , no pudiendo despreciarse ε frente a τ ni viceversa.
(ver anexo III para tablas de materiales).

• En un conductor, al ser σ muy grande no tiene sentido hablar de ε, y en un dieléctrico, no tiene sentido considerar $\sigma \approx 0$ frente a ε.

• Esta clasificación quedará matizada en el tema II.1 al introducir las relaciones constitutivas en el dominio de la frecuencia, que permitirá trabajar con medios con dispersión temporal.

• En este caso (dispersión temporal) se trabajará con funciones complejas de la frecuencia para ε, μ, σ, y la separación de los fenómenos de polarización y conducción se reflejará en las parte reales e imaginarias de estas funciones.