Universidad Europea de Madrid

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

EL SUBESPACIO CARACTERÍSTICO

Índice

Presentación 4
Base de la proyección. Preparando el terreno de juego 5
Proyección sobre un subespacio de dimensión 2 I 7
Proyección sobre un subespacio de dimensión 2 II 8
Proyección sobre un subespacio de dimensión 1 10
Simetría respecto a un subespacio de dimensión 2 I 12
Simetría respecto a un subespacio de dimensión 2 II 13
Rotación en torno a un subespacio de dimensión 1 15
Resumen 17

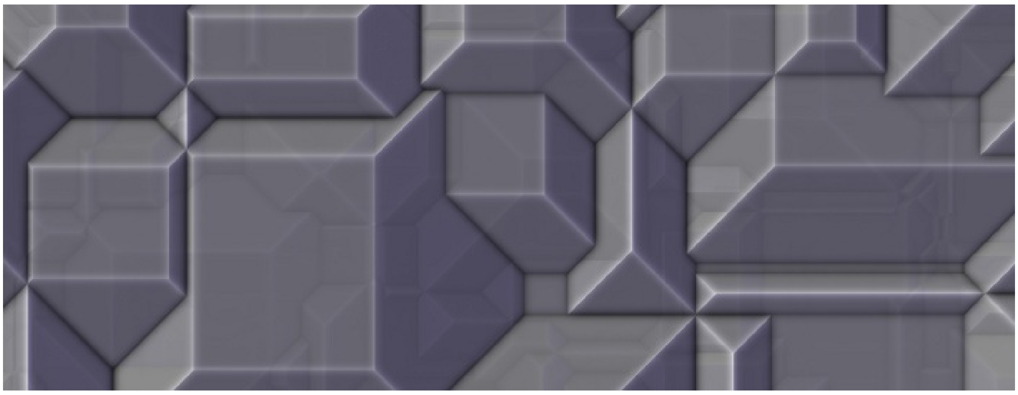
Presentación

El subespacio característico es la esencia de los autovalores. Es un subespacio que recoge todos los vectores asociados a un determinado autovalor. Eso de por sí ya es una peculiaridad relevante, pero es que además, los subespacios característicos cumplen toda suerte de propiedades geométricas dependiendo de la transformación.

En una proyección sobre un plano en espacio geométrico ordinario, el subespacio asociado al 1 es el propio plano. Lo mismo ocurre en una simetría, mientras que el subespacio ortogonal al plano recoge el autovalor 0 en la proyección y -1 en la simetría.

Estudiemos en profundidad cómo funciona este subespacio tan especial. Veamos lo que nos depara:

- Estudio en profundidad de qué es y cómo funciona un subespacio característico.
- Estudio de los subespacios asociados a las principales transformaciones geométricas explicados paso a paso.
- Y mucho más.



Base de la proyección. Preparando el terreno de juego

Planteemos es siguiente escenario: en el espacio geométrico ordinario de dimensión 3 con coeficientes reales R^3 con una base $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, tenemos un subespacio de dimensión 2 al que llamamos U. U quedará definido por una base formada por dos vectores, de la forma:

$$U = L\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} \text{ con } \vec{u}_1 = a^1\vec{e}_1 + a^2\vec{e}_2 + a^3\vec{e}_3 = (a^1, a^2, a^3)_B \text{ y}$$
$$\vec{u}_2 = b^1\vec{e}_1 + b^2\vec{e}_2 + b^3\vec{e}_3 = (b^1, b^2, b^3)_B$$

Definiremos ahora $U^\perp$, el subespacio ortogonal a dicho subespacio U. Como $U^\perp$ es ortogonal a U y los subespacios ortogonales están en suma directa, $U^\perp$ tiene una base formada por un solo vector.

De esta forma, tenemos dos subespacios suplementarios, U y $U^\perp$, el primero de dimensión 2 y el segundo de dimensión 1, con dos bases que unidas forman una base del espacio que llamaremos B':

$$B' = \left\{ \underbrace{\vec{u}_1, \vec{u}_2}_{\in U}, \underbrace{\vec{u}_3}_{\in U^\perp} \right\}$$

A partir de este momento nos referiremos a B' como base de la proyección. Y llamaremos C a la matriz de cambio de base entre B (la base original de la que partimos) y B', definida como:

$$C = \begin{pmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ \underbrace{a^3}_{\vec{u}_1} & \underbrace{b^3}_{\vec{u}_2} & \underbrace{c^3}_{\vec{u}_3} \end{pmatrix}$$

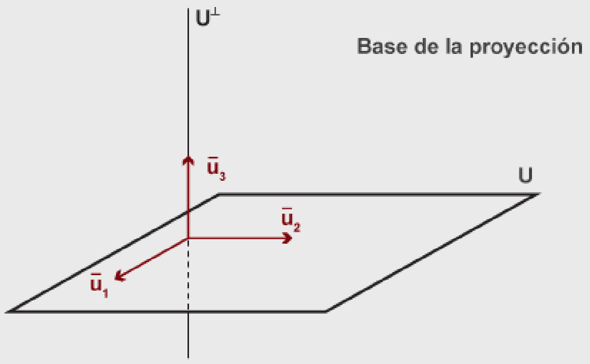
En detalle

Representación geométrica de la situación

Subespacio ortogonal al subespacio U

$$U^{\perp} = \{\vec{x} \in \Re^3 / \vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \quad \forall \vec{y} \in U\}$$

Base de la proyección



Base formada por un solo vector

La base tendrá la siguiente forma:

$U^{\perp} = L\{\vec{u}_3\}$ con $\vec{u}_3 = c^1\vec{e}_1 + c^2\vec{e}_2 + c^3\vec{e}_3 = (c^1, c^2, c^3)_B$

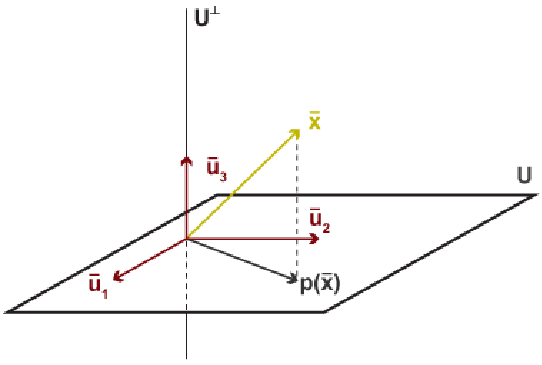
Proyección sobre un subespacio de dimensión 2 I

Partiendo del esquema que hemos definido de base de la proyección, es decir, el espacio geométrico ordinario de dimensión 3 con coeficientes reales R^3 con una base $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ donde tenemos un subespacio de dimensión 2 al que llamamos U y su complemento ortogonal y suplementario $U^\perp$. Uniendo las bases de dichos subespacios se define la base de la proyección:

$$B' = \left\{ \underbrace{\vec{u}_1, \vec{u}_2}_{\in U}, \underbrace{\vec{u}_3}_{\in U^\perp} \right\}$$

Ahora planteemos el homomorfismo que proyecta cualquier vector sobre el subespacio U:

$$p : \mathfrak{R}^3 \to \mathfrak{R}^3$$



Proyección sobre un subespacio de dimensión 2 II

La matriz asociada a esta proyección en la base de la proyección B', tiene por columnas los transformados de los vectores de la base expresados en esa misma base.

En detalle [Croquis con dichas transformaciones](#)

Al estar sobre el plano de proyección, $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ se transforman en si mismos mientras que $\vec{u}_3$, al estar perfectamente ortogonal al plano, se transforma en el vector nulo.

Por tanto $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ serán autovectores asociados al autovalor 1, mientras que $\vec{u}_3$ será un autovector asociado al autovalor 0.

$$\begin{cases} p(\vec{u}_1) = \vec{u}_1 & \rightarrow & \vec{u}_1 \in S(1) & \rightarrow & p(\vec{u}_1) = (1,0,0)_{B'} \\ p(\vec{u}_2) = \vec{u}_2 & \rightarrow & \vec{u}_2 \in S(1) & \rightarrow & p(\vec{u}_2) = (0,1,0)_{B'} \\ p(\vec{u}_3) = \vec{0} & \rightarrow & \vec{u}_3 \in S(0) & \rightarrow & p(\vec{u}_3) = (0,0,0)_{B'} \end{cases}$$

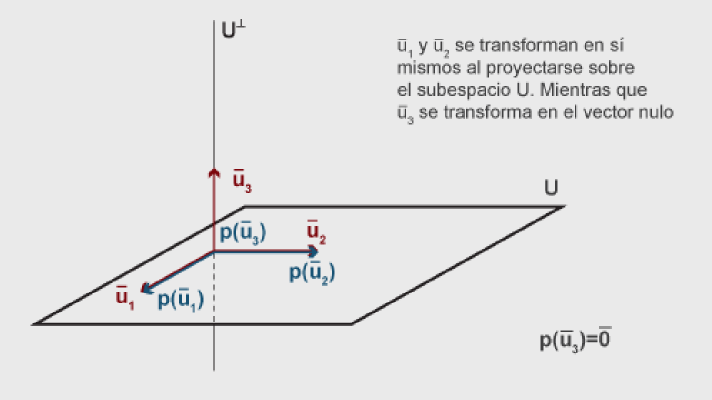
De tal manera, la matriz de p en la base B' queda:

$$P_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \underbrace{0}_{p(\vec{u}_1)} & \underbrace{0}_{p(\vec{u}_2)} & \underbrace{0}_{p(\vec{u}_3)} \end{pmatrix}$$

Para obtener la matriz asociada a p, en la base original del problema, únicamente tenemos que aplicar el cambio que describimos al comienzo del tema con la matriz C:

$P_{B'} = C^{-1} P_B C$ o bien $P_B = C P_{B'} C^{-1}$

Croquis de las transformaciones



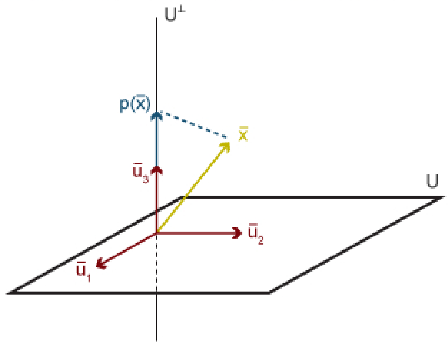
Proyección sobre un subespacio de dimensión 1

Partiendo del esquema que hemos definido de base de la proyección, es decir, el espacio geométrico ordinario de dimensión 3 con coeficientes reales R^3 con una base $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ donde tenemos un subespacio de dimensión 2, al que llamamos U, y su complemento ortogonal y suplementario $U^{\perp}$.

Uniendo las bases de estos subespacios, se define la base de la proyección:

$$B' = \left\{ \underbrace{\vec{u}_1, \vec{u}_2}_{\in U}, \underbrace{\vec{u}_3}_{\in U^{\perp}} \right\}$$

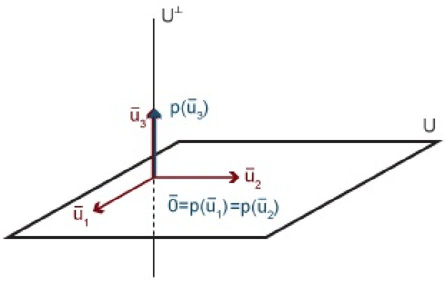
Ahora planteemos el homomorfismo que transforma un vector en su rotado $U^{\perp}$ grados en torno a $p: \Re^3 \to \Re^3$



1/3

La matriz asociada a esta proyección en la base de la proyección B', tiene por columnas los transformados de los vectores de la base expresados en esa misma base.

Puedes comprobar dichas transformaciones en el siguiente croquis:



Al proyectarlos sobre el subespacio ortogonal a U, $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$ se transforman en el vector nulo $\bar{u}_3$ sin embargo se transforma en sí mismo.

Al estar sobre la recta de proyección, $\vec{u}_3$ se transforma en sí mismo, mientras que $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$, al estar perfectamente ortogonales a la recta sobre el plano ortogonal a esta, se transforman en el vector nulo.

2/3

Por tanto, $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ serán autovectores asociados al autovalor 0, mientras que $\vec{u}_3$ será un autovector asociado al autovalor 1.

$$\begin{cases} p(\vec{u}_1)=\vec{0} & \rightarrow & \vec{u}_1 \in S(0) & \rightarrow & p(\vec{u}_1)=(0,0,0)_{B'} \\ p(\vec{u}_2)=\vec{0} & \rightarrow & \vec{u}_2 \in S(0) & \rightarrow & p(\vec{u}_2)=(0,0,0)_{B'} \\ p(\vec{u}_3)=\vec{u}_3 & \rightarrow & \vec{u}_3 \in S(1) & \rightarrow & p(\vec{u}_3)=(0,0,1)_{B'} \end{cases}$$

Para obtener la matriz asociada a p en la base original del problema, sólo tenemos que aplicar el cambio que describimos al comienzo del tema con la matriz C:

$P_{B'} = C^{-1} P_B C$ o bien $P_B = C P_{B'} C^{-1}$

3/3

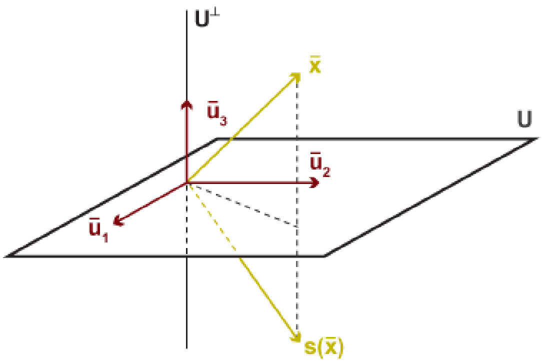
Simetría respecto a un subespacio de dimensión 2 I

Partiendo del esquema que hemos definido de base de la proyección, es decir, el espacio geométrico ordinario de dimensión 3 con coeficientes reales R^3 con una base $B=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ donde tenemos un subespacio de dimensión 2 al que llamamos U y su complemento ortogonal y suplementario $U^{\perp}$. Uniendo las bases de estos subespacios, se define la base de la proyección:

$$B' = \left\{ \underbrace{\vec{u}_1, \vec{u}_2}_{\in U}, \underbrace{\vec{u}_3}_{\in U^{\perp}} \right\}.$$

Ahora planteemos el homomorfismo que transforma un vector en su simétrico respecto al subespacio U:

$$s : \Re^3 \to \Re^3$$



Simetría respecto a un subespacio de dimensión 2 II

La matriz asociada a esta simetría en la base de la proyección B', tiene por columnas los transformados de los vectores de la base expresados en es misma base.

En detalle [Croquis con las transformaciones]

Al estar sobre el plano de simetría $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ se transforman en si mismos, mientras que $\vec{u}_3$, al estar perfectamente ortogonal al plano, se transforma en su opuesto: $-\vec{u}_3$.

Por tanto $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ serán autovectores asociados al autovalor 1, mientras que $\vec{u}_3$ será un autovector asociado al autovalor -1.

$$\begin{cases} p(\vec{u}_1) = \vec{u}_1 & \rightarrow & \vec{u}_1 \in S(1) & \rightarrow & p(\vec{u}_1) = (1,0,0)_{B'} \\ p(\vec{u}_2) = \vec{u}_2 & \rightarrow & \vec{u}_2 \in S(1) & \rightarrow & p(\vec{u}_2) = (0,1,0)_{B'} \\ p(\vec{u}_3) = -\vec{u}_3 & \rightarrow & \vec{u}_3 \in S(-1) & \rightarrow & p(\vec{u}_3) = (0,0,-1)_{B'} \end{cases}$$

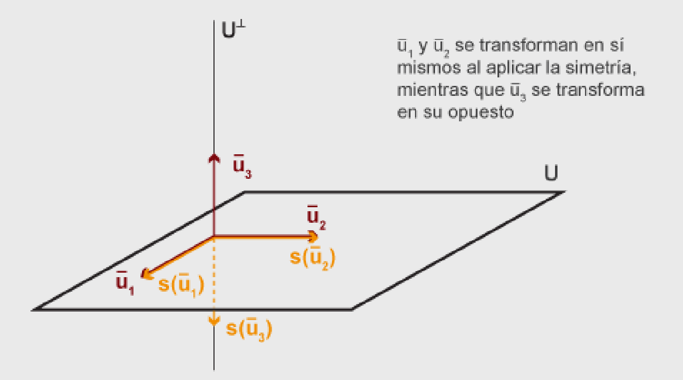
De tal manera, la matriz de s en la base B' queda:

$$S_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \underbrace{0}_{s(\vec{u}_1)} & \underbrace{0}_{s(\vec{u}_2)} & \underbrace{-1}_{s(\vec{u}_3)} \end{pmatrix}$$

Para obtener la matriz asociada a s en la base original del problema, únicamente tenemos que aplicar el cambio que describimos al comienzo del tema con la matriz C:

$S_{B'} = C^{-1} S_B C$ o bien $S_B = C S_{B'} C^{-1}$

Croquis de las transformaciones



Rotación en torno a un subespacio de dimensión 1

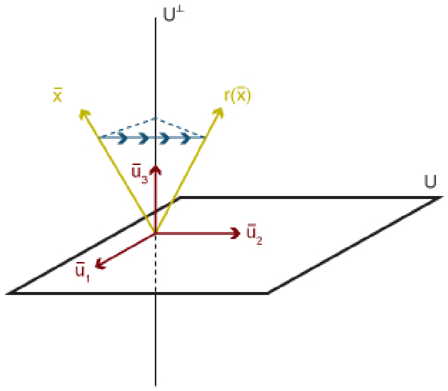
Partiendo del esquema que hemos definido de base de la proyección, es decir, el espacio geométrico ordinario de dimensión 3 con coeficientes reales R^3 con una base $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ donde tenemos un subespacio de dimensión 2 al que llamamos U y su complemento ortogonal y suplementario $U^{\perp}$.

Uniendo las bases de estos subespacios, se define la base de la proyección:

$$B' = \left\{ \underbrace{\bar{u}_1, \bar{u}_2}_{\in U}, \underbrace{\bar{u}_3}_{\in U^{\perp}} \right\}$$

Ahora planteemos el homomorfismo que transforma un vector en su rotado α grados en torno a $U^{\perp}$:

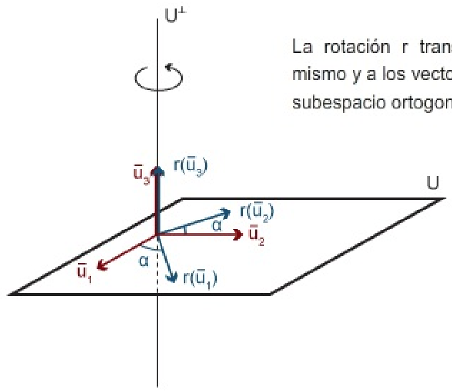
$r : \Re^3 \rightarrow \Re^3$



1/4

La matriz asociada a esta rotación en la base de la proyección B', tiene por columnas los transformados de los vectores de la base expresados en esa misma base.

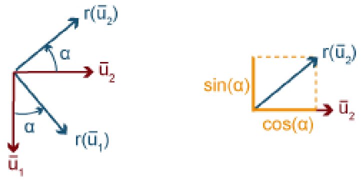
En el siguiente croquis tenemos dichas transformaciones.



La rotación r transforma al vector $\bar{u}_3$ en sí mismo y a los vectores $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$ rotan en torno al subespacio ortogonal a U un arco de valor α.

2/4

Al estar sobre el plano ortogonal al eje de rotación $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ se transforman en otros vectores del plano como demuestra el siguiente croquis.



Detalle de la proyección del vector rotado

3/4

Mientras que $\vec{u}_3$, al estar sobre el eje de rotación, se transforma en sí mismo. Por tanto $\vec{u}_3$ será un autovector asociado al autovalor 1.

$$\begin{cases} r(\vec{u}_1) = \cos(\alpha)\vec{u}_1 + \sin(\alpha)\vec{u}_2 & \rightarrow \quad r(\vec{u}_1) = (\cos(\alpha), \sin(\alpha), 0)_{B'} \\ r(\vec{u}_2) = -\sin(\alpha)\vec{u}_1 + \cos(\alpha)\vec{u}_2 & \rightarrow \quad r(\vec{u}_2) = (-\sin(\alpha), \cos(\alpha), 0)_{B'} \end{cases}$$

$$r(\vec{u}_3) = \vec{u}_3 \quad \rightarrow \quad \vec{u}_3 \in S(1) \quad \rightarrow \quad r(\vec{u}_3) = (0,0,1)_{B'}$$

$$R_{B'} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ \underbrace{0}_{r(\vec{u}_1)} & \underbrace{0}_{r(\vec{u}_2)} & \underbrace{1}_{r(\vec{u}_3)} \end{pmatrix}$$

4/4

Resumen

Base de la proyección: en un espacio de dimensión 3 con dos espacios ortogonales: $U = L\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ y $U^{\perp} = L\{\vec{u}_3\}$ La base de la proyección es una base B' tal que: $B' = \left\{ \underbrace{\vec{u}_1, \vec{u}_2,}_{\in U} \underbrace{\vec{u}_3}_{\in U^{\perp}} \right\}$

Proyección sobre un subespacio de dimensión 2:

$$\begin{cases} p(\vec{u}_1) = \vec{u}_1 & \rightarrow & \vec{u}_1 \in S(1) & \rightarrow & p(\vec{u}_1) = (1,0,0)_{B'} \\ p(\vec{u}_2) = \vec{u}_2 & \rightarrow & \vec{u}_2 \in S(1) & \rightarrow & p(\vec{u}_2) = (0,1,0)_{B'} \\ p(\vec{u}_3) = \vec{0} & \rightarrow & \vec{u}_3 \in S(0) & \rightarrow & p(\vec{u}_3) = (0,0,0)_{B'} \end{cases} \text{ con}$$

$$P_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \underbrace{0}_{p(\vec{u}_1)} & \underbrace{0}_{p(\vec{u}_2)} & \underbrace{0}_{p(\vec{u}_3)} \end{pmatrix}$$

Proyección sobre un subespacio de dimensión 1:

$$\begin{cases} p(\vec{u}_1) = \vec{0} & \rightarrow & \vec{u}_1 \in S(0) & \rightarrow & p(\vec{u}_1) = (0,0,0)_{B'} \\ p(\vec{u}_2) = \vec{0} & \rightarrow & \vec{u}_2 \in S(0) & \rightarrow & p(\vec{u}_2) = (0,0,0)_{B'} \\ p(\vec{u}_3) = \vec{u}_3 & \rightarrow & \vec{u}_3 \in S(1) & \rightarrow & p(\vec{u}_3) = (0,0,1)_{B'} \end{cases} \text{ con}$$

$$P_{B'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \underbrace{0}_{p(\vec{u}_1)} & \underbrace{0}_{p(\vec{u}_2)} & \underbrace{1}_{p(\vec{u}_3)} \end{pmatrix}$$