



**Universidad
Europea de Madrid**

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

ESPACIOS EUCLÍDEOS

PROYECCIONES ORTOGONALES

ESPACIOS EUCLÍDEOS

PROYECCIONES ORTOGONALES

© Todos los derechos de propiedad intelectual de esta obra pertenecen en exclusiva a la Universidad Europea de Madrid, S.L.U. Queda terminantemente prohibida la reproducción, puesta a disposición del público y en general cualquier otra forma de explotación de toda o parte de la misma.

La utilización no autorizada de esta obra, así como los perjuicios ocasionados en los derechos de propiedad intelectual e industrial de la Universidad Europea de Madrid, S.L.U., darán lugar al ejercicio de las acciones que legalmente le correspondan y, en su caso, a las responsabilidades que de dicho ejercicio se deriven.

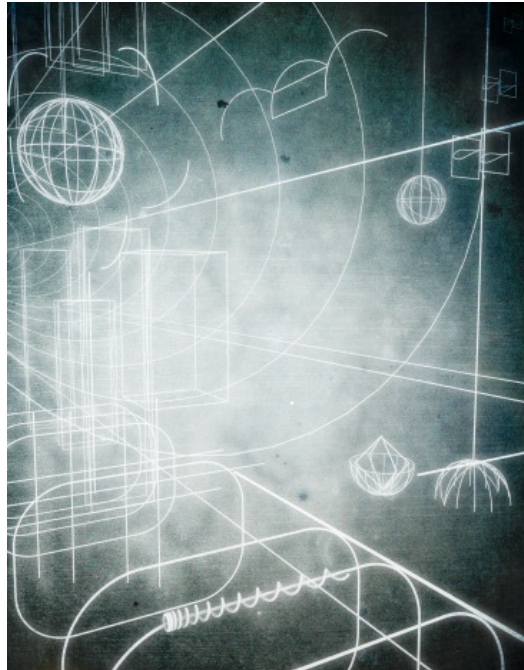
Índice

Presentación	4
Método de Gram-Schmidt	5
Conjuntos de vectores ortogonales	7
Proyección ortogonal	9
La proyección analítica	10
Practiquemos con un subespacio de dimensión 1	12
Proyección sobre subespacios de dimensiones superiores a 1	14
Proyección sobre un subespacio de dimensión 2	16
Practiquemos con un subespacio de dimensión 2	18
Gram-Schmidt con proyecciones	20
Resumen	22

Presentación

Existe un número de aplicaciones lineales singulares por sus particulares características geométricas. La proyección ortogonal es una de las más importantes.

Cualquier vector de un espacio euclideo puede expresarse como la suma de un vector proyectado sobre un subespacio y la proyección sobre el subespacio ortogonal a este. La ortogonalidad es una ventaja operativa en espacios euclideos, por lo tanto es deseable tener claro cómo obtenerla.



Las proyecciones ortogonales son transformaciones interesantes, por tanto, y debemos conocer su manejo.

En este tema aprenderás:

- Qué es una proyección ortogonal y cómo se calcula.
- La concepción geométrica y analítica de una proyección.
- El cálculo de una proyección sobre subespacios de dimensión 1 y 2.
- Y mucho más.

Método de Gram-Schmidt

Vamos a demostrar que un conjunto cualquiera de vectores en un espacio euclídeo, siempre es posible encontrar un sistema ortonormal que le sea equivalente. De esta forma si tenemos una base dada, siempre podremos encontrar una base ortogonal equivalente.

Sea $S = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\}$ el sistema dado.

Se comienza por obtener un sistema $L = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\} (m \leq p)$ libre y equivalente al S. Se procederá a construir un sistema ortonormal equivalente al L.

Para ello se utilizará el Método de Ortonormalización de Gram-Schmidt.

Como primer vector del sistema ortonormal a construir se toma el vector \vec{v}_1 definido por $\vec{v}_1 = \frac{\vec{u}_1}{|\vec{u}_1|}$.

Para definir el segundo vector del sistema ortonormal \vec{v}_2 , se define previamente un vector auxiliar \vec{w}_2 de la forma: $\vec{w}_2 = \vec{u}_2 + \lambda \vec{v}_1$ donde λ es un número real que se obtendría buscando que el vector \vec{w}_2 sea ortogonal al \vec{v}_1 .

$$\vec{w}_2 \cdot \vec{v}_1 = 0 \rightarrow (\vec{u}_2 + \lambda \vec{v}_1) \cdot \vec{v}_1 = 0 \rightarrow \vec{u}_2 \cdot \vec{v}_1 + \lambda = 0 \rightarrow \lambda = -(\vec{u}_2 \cdot \vec{v}_1)$$

Forzosamente $\vec{w}_2 \neq \vec{0} \rightarrow$ si $\vec{w}_2 = \vec{0} \rightarrow \vec{u}_2 = -\lambda \vec{v}_1 \rightarrow \vec{u}_2 = -\lambda \frac{\vec{u}_1}{|\vec{u}_1|}$ y si eso ocurriese, el sistema $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ sería ligado, contra la hipótesis de ser L libre.

1/4 

Se puede entonces definir $\vec{v}_2 = \frac{\vec{w}_2}{|\vec{w}_2|}$ y asegurar que el sistema $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ es ortonormal pues los vectores \vec{v}_1 y \vec{v}_2 son unitarios, siendo además ortogonales ya que:



$$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 = \frac{\vec{w}_2}{|\vec{w}_2|} \cdot \vec{v}_1 = 0.$$

Además, el sistema $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ es equivalente al $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ ya que las relaciones: $\vec{v}_1 = \frac{\vec{u}_1}{|\vec{u}_1|}$ y

$$\vec{v}_2 = \frac{\vec{w}_2}{|\vec{w}_2|} = \frac{(\vec{u}_2 + \lambda \vec{v}_1)}{|\vec{w}_2|} = \frac{1}{|\vec{w}_2|} (\vec{u}_2 + \lambda \frac{\vec{u}_1}{|\vec{u}_1|})$$
 aseguran que $[\vec{v}_1, \vec{v}_2] \subset [\vec{u}_1, \vec{u}_2]$ (1).

Por otra parte, al ser $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ un sistema ortogonal, es sistema libre, luego $\dim[\vec{v}_1, \vec{v}_2] = \dim[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = 2$ (2).

Las relaciones (1) y (2) permiten concluir que $[\vec{v}_1, \vec{v}_2] = [\vec{u}_1, \vec{u}_2]$.

 2/4 

A partir de este momento, se reitera el proceso anterior definiendo un vector:

$$\vec{w}_3 = \vec{u}_3 + \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2$$

Obteniendo α y β por:

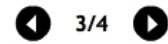
$$\vec{w}_3 \cdot \vec{v}_1 = 0 \rightarrow \vec{u}_3 \cdot \vec{v}_1 + \alpha = 0 \rightarrow \alpha = -(\vec{u}_3 \cdot \vec{v}_1)$$

$$\vec{w}_3 \cdot \vec{v}_2 = 0 \rightarrow \vec{u}_3 \cdot \vec{v}_2 + \beta = 0 \rightarrow \beta = -(\vec{u}_3 \cdot \vec{v}_2)$$

Se comprueba que $\vec{w}_3 \neq \vec{0} \rightarrow$ si $\vec{w}_3 = \vec{0}$ el sistema $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ sería ligado.

Razonando como antes, se obtiene el vector $\vec{v}_3 = \frac{\vec{w}_3}{|\vec{w}_3|}$.

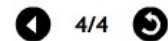
Se tiene así el sistema $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ ortonormal y equivalente al $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ por razonamientos análogos a los del paso anterior.



Reiterando el proceso se obtendría finalmente un sistema $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$ ortonormal y equivalente a L, y por tanto al S inicial.

Si el sistema S de partida, hubiera sido base del espacio, siguiendo este procedimiento, se habría obtenido una base ortonormal del espacio.

Queda así demostrada la existencia de bases ortonormales en cualquier espacio euclídeo.



Conjuntos de vectores ortogonales

Vamos a demostrar ahora que, en un espacio euclídeo, todo conjunto finito de vectores que sea ortogonal es libre.

Sea $S = \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}$ un conjunto de vectores que constituye sistema ortogonal, es decir que sus vectores cumplen:

$$\vec{x}_i \cdot \vec{x}_j = 0 \quad \forall i, j \in I_n \quad i \neq j$$

Se demostrará que S es un sistema libre.

Se partirá para ello de una combinación lineal de los vectores del sistema S, que se supondrá dé como resultado el vector nulo del espacio, y se tratará de demostrar la nulidad de todos los escalares que en ella intervienen.

$$\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n = \vec{0} \quad \text{Multiplicando escalarmente por } \vec{x}_1:$$

$$(\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n) \cdot \vec{x}_1 = 0 \rightarrow \lambda_1 (\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_1) + \lambda_2 (\vec{x}_2 \cdot \vec{x}_1) + \dots + \lambda_n (\vec{x}_n \cdot \vec{x}_1) = 0$$

Como $\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_1 > 0 \wedge \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_i = 0 \quad \forall i > 1 \quad i \in I_n$.

Resulta:

$$\lambda_1 (\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_1) = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0$$

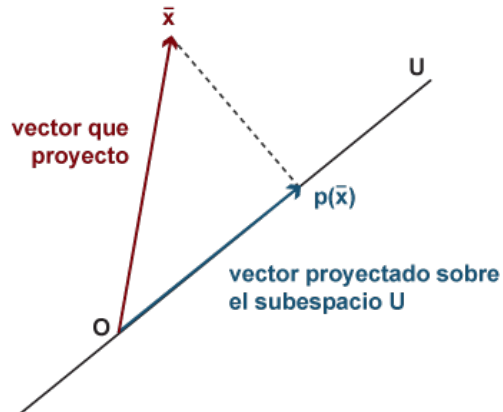
Análogamente, multiplicando escalarmente por todos los vectores de S:

$$\begin{aligned}\vec{x}_2 &\rightarrow \lambda_2 = 0 \\ &\vdots \\ \vec{x}_n &\rightarrow \lambda_n = 0\end{aligned}$$

Proyección ortogonal

Proyectar un vector sobre un subespacio lineal consiste en transformar dicho vector en uno del subespacio cuyo módulo sea la magnitud de dicho vector que es colineal con el subespacio.

Gráficamente es mucho más sencillo de entender:



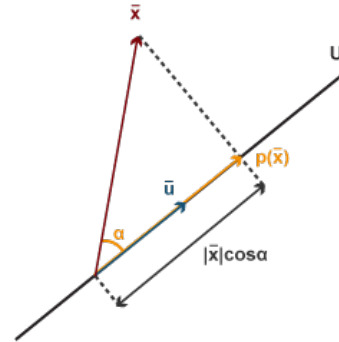
Para entenderla geoméricamente, en un espacio tridimensional, la proyección ortogonal se obtendría trazando un vector desde el origen (de donde parten el vector a transformar y el subespacio) hasta el punto donde se cortan el subespacio lineal con una perpendicular trazada desde el extremo del vector a transformar.

Pero una proyección ortogonal no se reduce al espacio geométrico ordinario. Se puede realizar en cualquier espacio de la dimensión que sea (4, 5, 17, etc.). Lo único que ocurre es que no se podrá representar gráficamente.

La proyección analítica

Para calcular analíticamente la proyección de un vector sobre un subespacio U debemos atender al croquis que acompaña esta pantalla.

 [En el croquis](#)
En detalle



Pues bien, el vector $p(\vec{x})$ tiene la dirección y el sentido de \vec{u} , pero su módulo es $|p(\vec{x})| = |\vec{x}| \cos \alpha$.

Si dividimos a \vec{u} por su módulo tendremos un vector de módulo 1 con su misma dirección y sentido: $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$. Con lo que construir $p(\vec{x})$ es tan fácil como multiplicar ese vector unitario que acabamos de obtener por el módulo de $p(\vec{x})$, quedándonos: $p(\vec{x}) = \underbrace{|\vec{x}| \cos \alpha}_{|p(\vec{x})|} \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$

Si multiplicamos la expresión anterior en el numerador y en el denominador por el módulo de \vec{u} (que es un número), obtenemos esta expresión:

$$\frac{|\vec{u}|}{|\vec{u}|} \underbrace{|\vec{x}| \cos \alpha}_{|p(\vec{x})|} \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \underbrace{|\vec{x}| |\vec{u}| \cos \alpha}_{\vec{x} \cdot \vec{u}} \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2} = \frac{(\vec{x} \cdot \vec{u})}{|\vec{u}|^2} \vec{u}$$

A partir de ahora, siempre que vayamos a calcular una proyección esta será la expresión elegida, debido a su sencillez de manejo.

En resumen, para obtener el vector de la proyección de otro sobre un subespacio, solo debemos buscar una base del subespacio, \vec{u} , y llevar a cabo: $p(\vec{x}) = \frac{(\vec{x} \cdot \vec{u})}{|\vec{u}|^2} \vec{u}$

Sobre el croquis

En el croquis se observa la proyección del vector \vec{x} sobre el subespacio U. Para poder llevar a cabo la proyección debemos definir una base de U, que en el croquis está representada por el vector \vec{u} .

La proyección de \vec{x} sobre U se representa con el vector $p(\vec{x})$.

Recordemos también que $\vec{x} \cdot \vec{u} = |\vec{x}||\vec{u}| \cos \alpha$, siendo $\alpha = \angle(\vec{x}, \vec{u})$, es decir el ángulo que forman el vector \vec{x} y el vector \vec{u} .

Practiquemos con un subespacio de dimensión 1

Hagamos un ejemplo de lo que acabamos de aprender. Tratándose de proyecciones, siempre es mejor utilizar como espacio uno tridimensional, porque la proyección tiene un sentido geométrico que se puede representar gráficamente para apoyar el cálculo analítico. Trabajemos pues en \mathbb{R}^3 , con una base de referencia B, para la cual la matriz de Gram tenga la expresión:

$$G_B = \begin{pmatrix} 111 \\ 122 \\ 123 \end{pmatrix}. \text{ Partiendo de un subespacio de dimensión 1 en } \mathbb{R}^3, \text{ por ejemplo:}$$

$$U = \left\{ \vec{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \mathfrak{R}^3 / x^1 + x^2 = 0; x^1 - x^3 = 0 \right\}$$

Calculemos su vector director:

$$\begin{cases} x^1 + x^2 = 0 \\ x^1 - x^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^1 = \beta \\ x^2 = -\beta \\ x^3 = \beta \end{cases} \quad \forall \beta \in \mathfrak{R} \Rightarrow U = L\{(1, -1, 1)\} \Rightarrow \vec{u} =$$

Ahora proyectemos un vector cualquiera sobre el subespacio, por ejemplo el: $\vec{a} = (3, 2, 1)_B$.

Hemos dicho que la expresión analítica de la proyección es: $p(\vec{a}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2} \vec{u}$. Veamos cómo

queda el vector proyectado de \vec{a} sobre U.

Primero calculemos	$\vec{a} \cdot \vec{u} = \underbrace{(321)}_{\vec{a}} \underbrace{\begin{pmatrix} 111 \\ 122 \\ 123 \end{pmatrix}}_{G_B} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}} = (6910) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 7$
--------------------	---

Seguidamente	$ \vec{u} ^2 = (\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}})^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} =$ $\underbrace{(1 \ -1 \ 1)}_{\vec{u}} \underbrace{\begin{pmatrix} 111 \\ 122 \\ 123 \end{pmatrix}}_{G_B} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}} =$ $= (112) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$
--------------	--

Quedando	$p(\vec{a}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{u}}{ \vec{u} ^2} \vec{u} = \frac{7}{2} \vec{u} = \frac{7}{2} (1, -1, 1) = \left(\frac{7}{2}, -\frac{7}{2}, \frac{7}{2} \right)_B$
----------	---

Proyección sobre subespacios de dimensiones superiores a 1

Para obtener la proyección de un vector sobre un subespacio U con una dimensión superior a 1, Debemos calcular una base de dicho subespacio:

$B_U = \{\vec{u}_i\} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_n\}$, a continuación debemos ortonormalizarla por Gram-Schmidt, obteniendo:

$$B'_U = \{\vec{v}_i\} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n\} \quad \text{con} \quad \begin{cases} |\vec{v}_i| = 1 & \forall i \\ \vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Realmente no es necesaria una Ortonormalización completa, nos valdría con que fuese una base ortogonal. Es decir que nos podríamos saltar la parte de dividir cada vector por su módulo. Aunque realmente tocará hacerlo más adelante con lo que el criterio para hacerlo antes o después depende de cuándo resulten más sencillos los cálculos.

La proyección ortogonal sobre U de un vector cualquiera \vec{x} , responderá a la expresión:

$$p(\vec{x}) = (\vec{x} \cdot \vec{v}_1)\vec{v}_1 + (\vec{x} \cdot \vec{v}_2)\vec{v}_2 + (\vec{x} \cdot \vec{v}_3)\vec{v}_3 + \dots + (\vec{x} \cdot \vec{v}_n)\vec{v}_n$$

Si, como hemos dicho antes, no hemos ortonormalizado la base, sino que únicamente nos hemos calculado una base ortogonal:

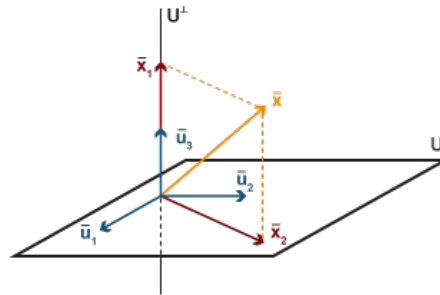
$$B'_U = \{\vec{v}_i\} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n\} \text{ con } \vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0 \text{ si } i \neq j$$

La expresión de la proyección quedaría:

$$p(\vec{x}) = \frac{(\vec{x} \cdot \vec{v}_1)}{|\vec{v}_1|^2} \vec{v}_1 + \frac{(\vec{x} \cdot \vec{v}_2)}{|\vec{v}_2|^2} \vec{v}_2 + \frac{(\vec{x} \cdot \vec{v}_3)}{|\vec{v}_3|^2} \vec{v}_3 + \dots + \frac{(\vec{x} \cdot \vec{v}_n)}{|\vec{v}_n|^2} \vec{v}_n$$

Proyección sobre un subespacio de dimensión 2

El caso más habitual de proyección, junto con el de proyección sobre un subespacio de dimensión 1 en un espacio tridimensional, es sobre un subespacio de dimensión 2 en el mismo espacio.



Análíticamente, tendríamos que particularizar la expresión anterior del siguiente modo:

Suponiendo que el subespacio lo llamamos U, tal que $\dim(U)=2$, Debemos calcular una base de dicho subespacio:

$$B_U = \{\vec{u}_i\} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$$

Asegurándonos que $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$, para que la base sea ortogonal.

La expresión de la proyección sobre U sería:

$$p(\vec{x}) = \frac{(\vec{x} \cdot \vec{u}_1)}{|\vec{u}_1|^2} \vec{u}_1 + \frac{(\vec{x} \cdot \vec{u}_2)}{|\vec{u}_2|^2} \vec{u}_2$$

Pero observemos un momento la imagen que acompaña, según lo que acabamos de calcular:

$p(\vec{x}) = \vec{x}_2$. Mientras que \vec{x}_1 , sería la proyección de \vec{x} sobre el subespacio ortogonal a U. Si ahora observamos con precaución, nos daremos cuenta que: $\vec{x} = \underbrace{\vec{x}_1}_{U^\perp} + \underbrace{\vec{x}_2}_U$ con lo que

$$\underbrace{\vec{x}_2}_U = \vec{x} - \underbrace{\vec{x}_1}_{U^\perp}. \text{ De esta manera:}$$

El cálculo de una proyección sobre un subespacio, es igual a la diferencia entre el vector a proyectar y su proyección sobre el subespacio ortogonal al original.

Esto que acabamos de ver se puede extrapolar a un espacio de cualquier dimensión.

Practiquemos con un subespacio de dimensión 2

Trabajemos en \mathbb{R}^3 , con una base de referencia B cuya matriz de Gram tenga la expresión:

$$G_B = \begin{pmatrix} 100 \\ 011 \\ 012 \end{pmatrix}$$

Partiendo de un subespacio de dimensión 2 en \mathbb{R}^3 , por ejemplo:

$$U = \left\{ \vec{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \mathfrak{R}^3 / x^1 + x^2 = 0 \right\}$$

Calculemos su base:

$$\{x^1 + x^2 = 0\} \Rightarrow \begin{cases} x^1 = \beta \\ x^2 = -\beta \\ x^3 = \gamma \end{cases} \quad \forall \gamma, \beta \in \mathfrak{R} \Rightarrow U = L \left\{ \underbrace{(1, -1, 1)}_{\vec{a}_1}, \underbrace{(0, 0, 1)}_{\vec{a}_2} \right\}$$

Ahora, calculemos el subespacio ortogonal a U:

$$U^\perp = \{ \vec{x} \in \mathfrak{R}^3 / \vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \quad \forall \vec{y} \in U \} = \{ \vec{x} \in \mathfrak{R}^3 / \vec{x} \cdot \vec{a}_1 = 0 \quad \vec{x} \cdot \vec{a}_2 = 0 \} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{x} \cdot \vec{a}_1 = 0 \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\substack{G_B \\ \vec{a}_1}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x^1 + x^3 = 0 \\ \vec{x} \cdot \vec{a}_2 = 0 \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\substack{G_B \\ \vec{a}_2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x^2 + 2x^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^1 + x^3 = 0 \\ x^2 + 2x^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^1 = -\alpha \\ x^2 = -2\alpha \\ x^3 = \alpha \end{cases} \quad \forall \alpha \in \mathfrak{R} \Rightarrow U^\perp = L \left\{ \underbrace{(-1, -2, 1)}_{\vec{a}_3} \right\}$$

1/3

Ahora proyectemos un vector cualquiera sobre el subespacio, por ejemplo el:

$$\vec{a} = (3, 2, 1)_B$$

Hemos dicho que la expresión analítica de la proyección es:

$$p(\vec{a}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{a}_3}{|\vec{a}_3|^2} \vec{a}_3$$

Veamos cómo queda el vector proyectado de \vec{a} sobre U^\perp .

Primero calculemos:

$$\vec{a} \cdot \vec{a}_3 = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\vec{a}} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{a}_3} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -14$$

2/3

Seguidamente:

$$|\bar{a}_3|^2 = (\sqrt{\bar{a}_3 \cdot \bar{a}_3})^2 = \bar{a}_3 \cdot \bar{a}_3 = \underbrace{(-1 \quad -2 \quad 1)}_{\bar{a}_3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{G_B} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\bar{a}_3} = (-1 \quad -1 \quad 0) \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$$

Quedando:

$$p(\bar{a}) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{a}_3}{|\bar{a}_3|^2} \bar{a}_3 = \frac{-14}{3} \bar{a}_3 = \frac{-14}{3} (-1, -2, 1) = \left(\frac{14}{3}, \frac{28}{3}, \frac{-14}{3} \right)_B$$

Gram-Schmidt con proyecciones

Sabiendo que la proyección de un vector sobre la dirección de otro \vec{u} responde a la ecuación:

$$\text{proy}_{\vec{u}}(\vec{x}) = \frac{(\vec{x} \cdot \vec{u})}{|\vec{u}|^2} \vec{u};$$

podemos calcular una base ortonormal por el método de Gram-Schmidt

aplicando proyecciones sucesivas. Partimos de una base cualquiera

$B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n\}$, buscamos obtener primero una base ortogonal

$B' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_n\}$ con $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0$ si $i \neq j$ y luego una base ortonormal

$$B'' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n\} \text{ con } \begin{cases} |\vec{v}_i| = 1 & \forall i \\ \vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

El proceso para el cálculo de Gram-Schmidt mediante proyecciones es el siguiente:

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= \vec{e}_1 \\ \vec{u}_2 &= \vec{e}_2 - \text{proy}_{\vec{u}_1}(\vec{e}_2) \\ \vec{u}_3 &= \vec{e}_3 - \text{proy}_{\vec{u}_1}(\vec{e}_3) - \text{proy}_{\vec{u}_2}(\vec{e}_3) \\ \vec{u}_4 &= \vec{e}_4 - \text{proy}_{\vec{u}_1}(\vec{e}_4) - \text{proy}_{\vec{u}_2}(\vec{e}_4) - \text{proy}_{\vec{u}_3}(\vec{e}_4) \\ &\vdots \\ \vec{u}_n &= \vec{e}_n - \sum_{i=1}^{n-1} \text{proy}_{\vec{u}_i}(\vec{e}_n) \end{aligned}$$

Para calcular los vectores de B'' solo tendremos que dividir los vectores de B' por su módulo para que todos queden normalizados (sus módulos valgan 1):

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{u}_1}{|\vec{u}_1|} \quad ; \quad \vec{v}_2 = \frac{\vec{u}_2}{|\vec{u}_2|} \quad ; \quad \vec{v}_3 = \frac{\vec{u}_3}{|\vec{u}_3|} \quad ; \quad \vec{v}_4 = \frac{\vec{u}_4}{|\vec{u}_4|} \quad ; \quad \dots \quad ; \quad \vec{v}_n = \frac{\vec{u}_n}{|\vec{u}_n|}$$

✓ Caso de R^3
Solución

Caso habitual de R^3

$$\begin{array}{l} \vec{u}_1 = \vec{e}_1 \\ \vec{u}_2 = \vec{e}_2 - \text{proy}_{\vec{u}_1}(\vec{e}_2) \\ \vec{u}_3 = \vec{e}_3 - \text{proy}_{\vec{u}_1}(\vec{e}_3) - \text{proy}_{\vec{u}_2}(\vec{e}_3) \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \vec{v}_1 = \frac{\vec{u}_1}{|\vec{u}_1|} \\ \Rightarrow \vec{v}_2 = \frac{\vec{u}_2}{|\vec{u}_2|} \\ \vec{v}_3 = \frac{\vec{u}_3}{|\vec{u}_3|} \end{array} \right.$$

Resumen

La **proyección analítica**. Para calcular analíticamente la proyección de un vector sobre un subespacio U de dimensión 1 y una base formada por el vector \vec{u} : $p(\vec{x}) = \frac{(\vec{x} \cdot \vec{u})}{|\vec{u}|^2} \vec{u}$

Proyección sobre subespacios de dimensiones superiores a 1.

En un subespacio U de dimensión n donde hemos calculado una base ortogonal: $B'_U = \{\vec{v}_i\} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n\}$ con $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0$ si $i \neq j$

La expresión de la proyección quedaría:

$$p(\vec{x}) = \frac{(\vec{x} \cdot \vec{v}_1)}{|\vec{v}_1|^2} \vec{v}_1 + \frac{(\vec{x} \cdot \vec{v}_2)}{|\vec{v}_2|^2} \vec{v}_2 + \frac{(\vec{x} \cdot \vec{v}_3)}{|\vec{v}_3|^2} \vec{v}_3 + \dots + \frac{(\vec{x} \cdot \vec{v}_n)}{|\vec{v}_n|^2} \vec{v}_n$$

Método de Gram-Schmidt. El proceso para el cálculo de Gram-Schmidt mediante proyecciones se muestra junto a estas líneas.

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= \vec{e}_1 \\ \vec{u}_2 &= \vec{e}_2 - \text{proy}_{\vec{u}_1}(\vec{e}_2) \\ \vec{u}_3 &= \vec{e}_3 - \text{proy}_{\vec{u}_1}(\vec{e}_3) - \text{proy}_{\vec{u}_2}(\vec{e}_3) \\ \vec{u}_4 &= \vec{e}_4 - \text{proy}_{\vec{u}_1}(\vec{e}_4) - \text{proy}_{\vec{u}_2}(\vec{e}_4) - \text{proy}_{\vec{u}_3}(\vec{e}_4) \\ &\vdots \\ \vec{u}_n &= \vec{e}_n - \sum_{i=1}^{n-1} \text{proy}_{\vec{u}_i}(\vec{e}_n) \end{aligned}$$

Para calcular los vectores de B'' solo tendremos que dividir los vectores de B' por su módulo para que todos queden normalizados (sus módulos valgan 1).