Universidad Europea de Madrid

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

ESPACIOS EUCLÍDEOS

LA TRANSFORMACIÓN ORTOGONAL

Índice

Presentación

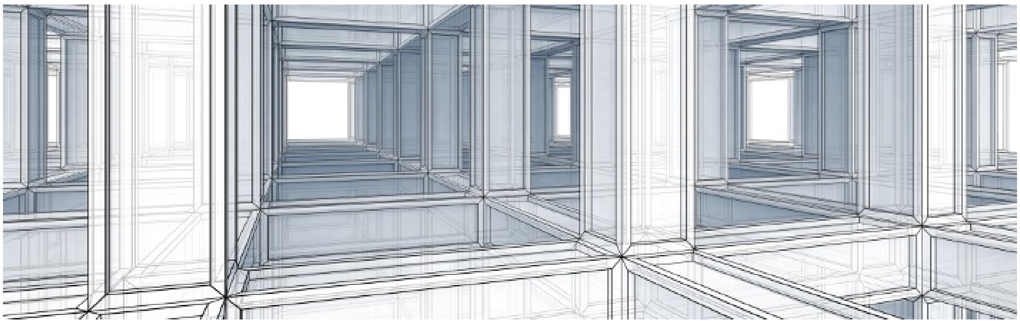
La ortogonalidad es una condición que se utiliza en todos los aspectos de la ciencia, desde la física cuántica, para describir los dos autoestados de un operador hermítico hasta en arquitectura, donde la teoría de perspectiva y puntos de fuga encuentran su base en dicho concepto.

La transformación ortogonal es un tipo de homomorfismo muy rico en propiedades matemáticas puras y geométricas que explora el ámbito de las relaciones entre vectores engendradas a partir de la definición de un producto escalar en un espacio.

Estudiaremos cómo las transformaciones ortogonales engendran grupos, conservan módulos y ángulos, presentan características únicas de vectores y valores propios y muchas cosas más.

En este tema aprenderás:

- Qué es y cómo se plantea una transformación ortogonal.
- Las principales propiedades de las mismas.
- Ejemplos de aplicación prácticos para saber como manejarlas de cara a los problemas.



La transformación ortogonal en un espacio euclídeo

Sea $E^n(\mathfrak{R})$ un espacio euclídeo, y t un endomorfismo o transformación lineal de dicho espacio.

Diremos que t es ortogonal cuando conserve el producto escalar de vectores, es decir:

$$t\,ortogonal \Leftrightarrow \forall \vec{x}, \vec{y} \in E^n \quad t(\vec{x}) \cdot t(\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}$$

Pongamos un ejemplo numérico para reafirmar la definición:

En un espacio vectorial euclídeo E de dimensión n, dado un vector $\vec{a} \neq \vec{0}$, se considera la aplicación $f: E \to E$, definida por: $f(\vec{x}) = \vec{x} - 2 \cdot \frac{\vec{a} \cdot \vec{x}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} \vec{a}$.

Vamos a demostrar que f es ortogonal, es decir, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E$ se cumple:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y})$$

$$f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y} \to f(\vec{x}) \cdot f(\vec{y}) = \left[\vec{x} - 2 \underbrace{\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{x}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} \right)}_{\in \mathfrak{R}} \vec{a} \right] \cdot \left[\vec{y} - 2 \underbrace{\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{y}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} \right)}_{\in \mathfrak{R}} \vec{a} \right] =$$

$$= \vec{x} \cdot \vec{y} - 2\vec{a} \cdot \vec{x} \underbrace{\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{y}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} \right)}_{\in \mathfrak{R}} - 2\vec{a} \cdot \vec{y} \underbrace{\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{x}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} \right)}_{\in \mathfrak{R}} + 4\vec{a} \cdot \vec{a} \, \frac{(\vec{a} \cdot \vec{x})(\vec{a} \cdot \vec{y})}{(\vec{a} \cdot \vec{a})(\vec{a} \cdot \vec{a})} =$$

$$= \vec{x} \cdot \vec{y} + 4 \, \frac{(\vec{a} \cdot \vec{x})(\vec{a} \cdot \vec{y})}{(\vec{a} \cdot \vec{a})} - 4 \, \frac{(\vec{a} \cdot \vec{x})(\vec{a} \cdot \vec{y})}{(\vec{a} \cdot \vec{a})} = \vec{x} \cdot \vec{y} \to f \; es \; ortogonal \quad cqd$$

Conservación del módulo de un vector

Las transformaciones ortogonales conservan el módulo de los vectores transformados. Además, se trata de una condición necesaria y suficiente para que una transformación sea ortogonal.

Es decir:

$$tortogonal \Leftrightarrow \forall \vec{x} \in E^n |\vec{x}| = |t(\vec{x})|$$

La doble flecha de la demostración representa la condición de **necesario y suficiente**, por tanto su demostración debe llevarse a cabo en ambos sentidos:

- De izquierda a derecha ($\Rightarrow$):

$$\forall \vec{x} \in E^n \quad t(\vec{x}) \cdot t(\vec{x}) = \vec{x} \cdot \vec{x} \rightarrow |t(\vec{x})|^2 = |\vec{x}|^2 \rightarrow |\vec{x}| = |t(\vec{x})|$$

- De derecha a izquierda ($\Leftarrow$):

$$\forall \vec{x} \in E^n \quad |t(\vec{x})| = |\vec{x}| \rightarrow \forall \vec{x} \in E^n \quad |t(\vec{x})|^2 = |\vec{x}|^2 \rightarrow \forall \vec{x} \in E^n \quad t(\vec{x}) \cdot t(\vec{x}) = \vec{x} \cdot \vec{x}$$

Tendremos, pues, en ese caso:

Hipótesis: $\forall \vec{x} \in E^n \quad t(\vec{x}) \cdot t(\vec{x}) = \vec{x} \cdot \vec{x}$

Tesis: $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E^n \quad t(\vec{x}) \cdot t(\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}$

$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E^n \rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in E^n$, aplicamos la hipótesis al vector $\vec{x} + \vec{y}$: $t(\vec{x} + \vec{y}) \cdot t(\vec{x} + \vec{y}) = (\vec{x} + \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \vec{y})$.

Como t es lineal, $[t(\vec{x}) + t(\vec{y})] \cdot [t(\vec{x}) + t(\vec{y})] = (\vec{x} + \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \vec{y})$.

Luego $t(\vec{x}) \cdot t(\vec{x}) + 2t(\vec{x}) \cdot t(\vec{y}) + t(\vec{y}) \cdot t(\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{x} + 2\vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{y} \cdot \vec{y}$.

Al ser $t(\vec{x}) \cdot t(\vec{x}) = \vec{x} \cdot \vec{x} \ \wedge \ t(\vec{y}) \cdot t(\vec{y}) = \vec{y} \cdot \vec{y}$.

Por hipótesis, resulta, después de simplificar, que:

$$t(\vec{x}) \cdot t(\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y} \rightarrow t \ ortogonal$$

Conservación del ángulo entre dos vectores

Toda transformación ortogonal, conserva el ángulo de los vectores. Es decir:

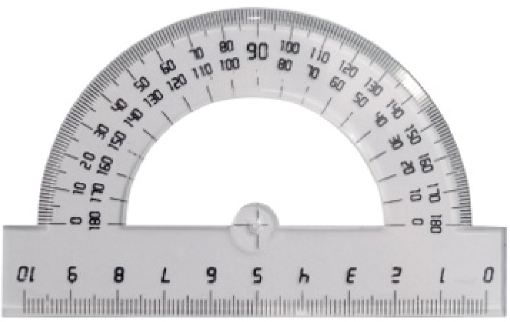
$$t\ ortogonal \ \rightarrow\ \forall \vec{x},\vec{y} \in E^n \quad \left(t(\vec{x}) \overset{\wedge}{,} t(\vec{y}) \right) = \left(\vec{x} \overset{\wedge}{,} \vec{y} \right)$$

$$\cos(\vec{x} \overset{\wedge}{,} \vec{y}) = \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|} \overset{(1)}{=} \frac{t(\vec{x})\cdot t(\vec{y})}{|t(\vec{x})||t(\vec{y})|} = \cos(t(\vec{x}) \overset{\wedge}{,} t(\vec{y}))$$

(1) Ya que al ser t ortogonal, conserva tanto el producto escalar como los módulos de los vectores.

La coincidencia de los cosenos conlleva de inmediato la coincidencia de los ángulos, ya que estos se definen en el intervalo $[0,\ \pi]$. El ángulo que forman dos vectores es siempre el menor de cuantos se pueden definir en torno a ellos.

El recíproco no es cierto en general. Así, la transformación t = 3i (i es la aplicación idéntica) conserva claramente los ángulos, pero no es ortogonal, pues no conserva los módulos.



Matriz de una transformación ortogonal

Vamos a demostrar que la condición necesaria y suficiente para que una transformación sea ortogonal, es que su matriz y la fundamental del espacio en cualquier base verifiquen la relación $T^T \cdot G \cdot T = G$.

Es decir, $t\ ortogonal \Leftrightarrow T^T \cdot G \cdot T = G$.

$$t\ ortogonal \ \Leftrightarrow\ \forall \vec{x}, \vec{y} \in E^n \quad t(\vec{x}) \cdot t(\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y} \Leftrightarrow \forall \vec{x}, \vec{y} \in E^n \quad \|t(x)\| G\{t(y)\} = \|x$$
$$\Leftrightarrow \forall \vec{x}, \vec{y} \in E^n \ \ \|x\| T^T GT\{y\} = \|x\| G\{y\} \Leftrightarrow T^T GT = G$$

Si la base de referencia fuera ortonormal G =1, entonces:

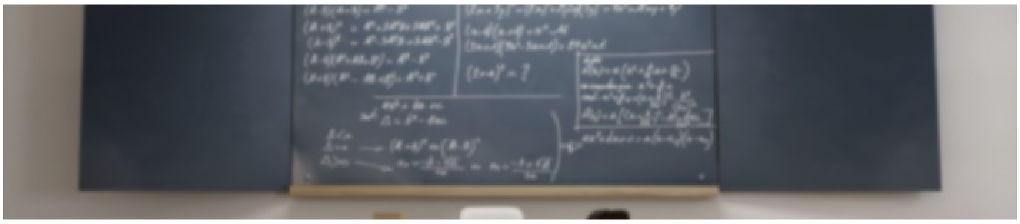
$$t\ ortogonal \ \Leftrightarrow\ T^T \cdot T = I \Leftrightarrow T^{-1} = T^T \Leftrightarrow T\ ortogonal$$

Consecuencia

La matriz de una transformación ortogonal solo puede tener su determinante de valor + l ó - 1, siendo por tanto toda transformación ortogonal un automorfismo de E^n .

El resultado es consecuencia inmediata de la proposición 3, ya que:

$T\ ortogonal \ \Leftrightarrow\ T^T GT = G \rightarrow \ |T^T||G||T| = |G| \rightarrow \ |T|^2 = 1 \rightarrow |T| = \ \pm 1 \rightarrow$ t es automorfismo, pues su matriz es regular.



Las transformaciones ortogonales como grupo

El conjunto de las transformaciones ortogonales tiene estructura de grupo con la ley composición de aplicaciones.

(To,o) GRUPO

Interna: $\forall t_1, t_2 \in T_o \rightarrow t_1 \circ t_2 \in T_o$

Sabemos que la composición de dos endomorfismos de E^n , es otro endomorfismo de E^n. Además:

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E^n \quad (t_1 \circ t_2)(\vec{x}) \cdot (t_1 \circ t_2)(\vec{y}) = t_1[t_2(\vec{x})] \cdot t_1[t_2(\vec{y})] =^{(1)} t_2(\vec{x}) \cdot t_2(\vec{y}) =^{(2)} \vec{x} \cdot \vec{y}$$

(1) por ser t_1 ortogonal.

(2) por ser t_2 ortogonal.

Asociativa: se cumple por ser asociativa la composición de aplicaciones.

Neutro $i \in T_o$ donde i es la aplicación idéntica.

Inverso $t \in T_o \rightarrow t^{-1} \in T_o$

Sabemos que al ser t automorfismo; t^{-1} también lo es.

Así pues, nos limitaremos a comprobar que t^{-1} es también ortogonal.

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E^n \quad t^{-1}(\vec{x}) \cdot t^{-1}(\vec{y}) \overset{(3)}{=} t\left[t^{-1}(\vec{x})\right] \cdot t\left[t^{-1}(\vec{y})\right] = \vec{x} \cdot \vec{y}$$

(3) por ser t ortogonal

Bases ortonormales y transformación ortogonal

La condición necesaria y suficiente para que una transformación sea ortogonal, es que transforme los vectores de una base ortonormal en los de otra base ortonormal.

Observemos de entrada que, al ser una transformación ortogonal un automorfismo, siempre transformará una base del espacio en otra base del mismo espacio.

- Sea $B = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ una base ortonormal de E^n.
- Sea $t(B) = \{t(\vec{e}_1), \ldots, t(\vec{e}_n)\}$ su transformada por el endomorfismo t.

Entonces, $t\, ortogonal \Leftrightarrow [B\ ortonormal \to t(B)\ ortonormal]$.

Veremos la proposición en dos partes:

a) $\left.\begin{matrix} t\ ortogonal \\ B\ ortonormal \end{matrix}\right\} \Rightarrow t(B)\ ortonormal$

Para comprobar esto, basta observar que: $\forall i, j \in I_n : t(\vec{e}_i) \cdot t(\vec{e}_j) \overset{(4)}{=} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \overset{(5)}{=} \partial_{ij} \to t(B)\ ortonormal$

(4) por ser t ortogonal.

(5) por ser B ortonormal.

1/2

b) $\left.\begin{matrix} t\ es\ un\ endomorfismo\ de\ E^n \\ B\ y\ t(B)\ son\ ortonormales \end{matrix}\right\} \Rightarrow t\ es\ ortogonal$

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E^n : \vec{x}\,\vec{y} = (x^i \vec{e}_i) \cdot (y^j \vec{e}_j) = x^i y^j (\vec{e}_i \vec{e}_j) = x^i y^j \partial_{ij} = x^i y^j$$

$$t(\vec{x}) \cdot t(\vec{y}) = t(x^i \vec{e}_i) \cdot t(y^j \vec{e}_j) = x^i t(\vec{e}_i) \cdot y^j t(\vec{e}_j) = x^i y^j \left[t(\vec{e}_i) \cdot t(\vec{e}_j) \right] = x^i y^j \partial_{ij} = x^i y^j$$

2/2

Luego $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E^n \quad t(\vec{x}) \cdot t(\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y} \rightarrow$ t es ortogonal.

Autovalores de una transformación ortogonal

Aún no ha llegado el momento de hablar de autovalores y autovectores, pero cuando lo hagamos conviene saber que las transformaciones ortogonales cumplen determinadas propiedades al respecto:

Si una transformación es ortogonal, sus únicos posibles autovalores son 1 y -1. Sea $\vec{x} \neq 0$ propio de t asociado al autovalor λ. Por ser t ortogonal:

$$\forall \vec{x} \in E^n \quad t(\vec{x}) \cdot t(\vec{x}) = \vec{x} \cdot \vec{x} \rightarrow (\lambda \vec{x}) \cdot (\lambda \vec{x}) = \vec{x} \cdot \vec{x} \rightarrow \lambda^2 (\vec{x} \cdot \vec{x}) = \vec{x} \cdot \vec{x} \rightarrow \lambda^2 = 1 \rightarrow$$

Para reforzar lo dicho, vamos a utilizar un ejemplo traído del principio del tema:

En un espacio vectorial euclídeo E de dimensión n, dado un vector $\vec{a} \neq \vec{0}$, se considera la aplicación $f : E \rightarrow E$, definida por: $f(\vec{x}) = \vec{x} - 2 \cdot \frac{\vec{a} \cdot \vec{x}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} \vec{a}$.

A continuación, vamos a obtener razonadamente los autovalores de f y los subespacios característicos correspondientes.

$$Si \quad \vec{x} \in \omega(\vec{a}) \rightarrow f(\vec{x}) = \vec{x} - 2 \cdot \frac{\vec{a} \cdot \vec{x}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} \vec{a} = \vec{x} - 2 \cdot \frac{0}{\vec{a} \cdot \vec{a}} \vec{a} = \vec{x} \rightarrow \vec{x} \in S(1) \rightarrow \dim(S(1)) =$$

$$Si \quad \vec{x} \in L(\vec{a}) \rightarrow \vec{x} = \alpha \vec{a} \rightarrow f(\alpha \vec{a}) = \alpha \vec{a} - 2 \cdot \alpha \left(\underbrace{\frac{\vec{a} \cdot \vec{a}}{\vec{a} \cdot \vec{a}}}_{=1} \right) \vec{a} = \alpha \vec{a} - 2 \alpha \vec{a} = -\alpha \vec{a} = -\vec{x}$$

$$\rightarrow \dim(S(-1)) = \dim(L(\vec{a})) = 1$$

Con lo que se concluye que: $\begin{cases} S(1) = \omega(\vec{a}) \\ S(-1) = L(\vec{a}) \end{cases}$

Ortogonalidad de autovectores

Vectores asociados a autovalores diferentes en una transformación ortogonal, son ortogonales.

Sean $\vec{x} \in S(1), \vec{y} \in S(-1)$. Al ser t ortogonal:

$$t(\vec{x}) \cdot t(\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y} \to \vec{x} \cdot (-\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y} \to -(\vec{x} \cdot \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y} \to \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$$

En el ejemplo anterior, hemos calculado los subespacios propios asociados a cada autovalor. Vamos a comprobar que dichos subespacios son efectivamente ortogonales entre sí.

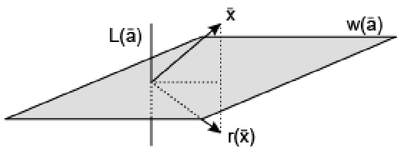
Recordemos que la transformación es: $f(\vec{x}) = \vec{x} - 2 \cdot \frac{\vec{a} \cdot \vec{x}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} \vec{a}$

Los subespacios obtenidos previamente son $\begin{cases} S(1) = \omega(\vec{a}) \\ S(-1) = L(\vec{a}) \end{cases}$

Se puede observar que $\underbrace{S(1) \oplus S(-1)}_{suma\ directa} = \begin{cases} S(1) \cap S(-1) = \left\{\vec{0}\right\} \\ S(1) + S(-1) = E^3 \end{cases}$

También se extrae que $OM(1) = \dim(S(1))$ y $OM(-1) = \dim(S(-1))$, por lo tanto, f es diagonalizable.

Geométricamente es una simetría respecto a $\omega(\vec{a})$.



Resumen

La Transformación Ortogonal. $t\ ortogonal \Leftrightarrow \forall \vec{x}, \vec{y} \in E^n \quad t(\vec{x}) \cdot t(\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}$

Conservación del módulo de un vector. $t\ ortogonal \Leftrightarrow \forall \vec{x} \in E^n \quad |\vec{x}| = |t(\vec{x})|$

Conservación del ángulo entre dos vectores.

- $t\ ortogonal \ \rightarrow\ \forall \vec{x}, \vec{y} \in E^n \quad \left(t(\vec{x}), t(\vec{y})^{\wedge} \right) = \left(\vec{x}, \vec{y}^{\wedge} \right)$
- $\cos(\vec{x} \overset{\wedge}{,} \vec{y}) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|} \overset{(1)}{=} \frac{t(\vec{x}) \cdot t(\vec{y})}{|t(\vec{x})||t(\vec{y})|} = \cos(t(\vec{x}) \overset{\wedge}{,} t(\vec{y}))$

Matriz de una transformación ortogonal. $T^T \cdot G \cdot T = G$

- $t\ ortogonal \ \Leftrightarrow\ T^T \cdot T = I \Leftrightarrow T^{-1} = T^T \Leftrightarrow T\ ortogonal$

Las transformaciones ortogonales como grupo. El conjunto de las transformaciones ortogonales tiene estructura de grupo con la ley composición de aplicaciones: (T_O,o) GRUPO:

Bases ortonormales y transformación ortogonal.

- t ortogonal $\Leftrightarrow [B\ ortonormal \rightarrow t(B)\ ortonormal]$

Ortogonalidad de autovectores. Vectores asociados a autovalores diferentes en una transformación ortogonal, son ortogonales.