Universidad Europea de Madrid

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

# ESPACIOS EUCLÍDEOS

## BASE RECÍPROCA

# Índice

## Presentación

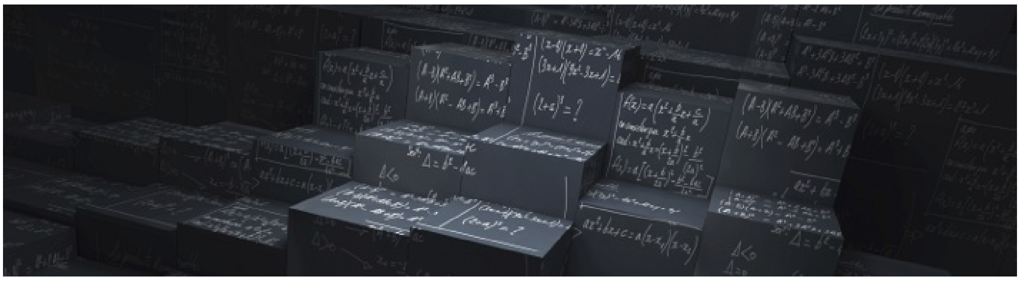
En ocasiones uno no sabe que se tiene que enfrentar a una determinada dificultad hasta que se la encuentra delante. Eso pasó en parte con la geometría y los sistemas de referencia en el siglo XVIII. Se habían descrito sistemas de referencia que ya no eran tan rígidos, tan ortogonales, pero ahora operar con ellos era una cuestión mucho más compleja. Se tuvieron que desarrollar nuevas normas, nuevos sistemas que permitiesen calcular tan bien, y de forma tan segura, como antes con las nuevas referencias.

Las coordenadas curvilíneas trajeron aparejadas los sistemas recíprocos de vectores que permitían resolver cualquier cálculo referido a ellas. Gracias a su inclusión en el álgebra de la matriz de Gram, se podían trazar trayectorias y realizar cálculos en bases cada vez menos regulares.

Nosotros de momento no vamos a estudiar los cálculos complejos sino la herramienta que los hizo posibles, la matriz de Gram.

En este tema aprenderás:

- Qué es una base reciproca, cómo funciona y cómo se llaman sus coordenadas.
- Cómo generar una matriz de Gram de una base determinada y cómo operar con ella y cambiarla de base.
- Las coordenadas contravariantes y covariantes y su relación.
- Y mucho más.



## La matriz de Gram

Como ya hemos visto en temas anteriores, toda operación compleja en álgebra tiene su **método analítico matricial asociado**. El producto escalar no es menos, para llevarlo a cabo utilizaremos la **matriz de Gram**.

En un espacio euclídeo $E^n(\mathfrak{R})$ de base $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$, se define la matriz fundamental de espacio relativo a la base B, o matriz de Gram del espacio mediante la siguiente expresión:

$$\underset{nxn}{G_B} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_n \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{e}_n \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_n \cdot \vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_n \cdot \vec{e}_n \end{pmatrix}$$

Es una matriz simétrica ($G_B = {G_B}^T$) en la que todos los menores principales son positivos.Cualquier producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v} = \lambda$ se podrá realizar:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \lambda \in \mathfrak{R} \quad \Rightarrow \quad (u^1 u^2 \cdots u^n) G_B \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = \lambda \in \mathfrak{R}$$

Por ejemplo, para el caso particular donde dim(E)=3 siendo $G = \begin{pmatrix} 111 \\ 122 \\ 123 \end{pmatrix}$ la matriz del producto escalar en la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Es decir, $G = (g_{ij})_{3x3}$, donde $g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j, \forall i, j = 1, 2, 3$ y $\vec{a}$ el vector de coordenadas covariantes (1,1,0) en dicha base, veamos cómo se calcularía el módulo del vector $\vec{a}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(110) \begin{pmatrix} 111 \\ 122 \\ 123 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{(11-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$$

## Bases recíprocas

Pasemos a definir un concepto nuevo dentro de espacios euclídeos: la base recíproca. Para ello, vamos a partir de un número de elementos y conjuntos que debemos conocer:

- Sea $E^n(\mathfrak{R})$ un espacio vectorial euclídeo n-dimensional.
- Sea $B = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ una base del mismo.

Se denomina **base recíproca** de la B, y la representaremos por **BR**, al conjunto formado por los n vectores del espacio:

- $B_R = \left\{\vec{e}^1, \ldots, \vec{e}^n\right\}$ que verifican las relaciones:
- $\vec{e}^i \cdot \vec{e}_j = \delta^i{}_j = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j \end{cases}$

E n $E^3(\mathfrak{R})$ la base B sería de la forma, $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, mientras que la B' sería, $B_R = \left\{\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3\right\}$.

Se cumpliría la condición, $\vec{e}^i \cdot \vec{e}_j = \delta^i{}_j = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j \end{cases}$, si:

$$\begin{array}{lll} \vec{e}^1 \cdot \vec{e}_1 = 1 & \vec{e}^1 \cdot \vec{e}_2 = 0 & \vec{e}^1 \cdot \vec{e}_3 = 0 \\ \vec{e}^2 \cdot \vec{e}_1 = 0 & \vec{e}^2 \cdot \vec{e}_2 = 1 & \vec{e}^2 \cdot \vec{e}_3 = 0 \\ \vec{e}^3 \cdot \vec{e}_1 = 0 & \vec{e}^3 \cdot \vec{e}_2 = 0 & \vec{e}^3 \cdot \vec{e}_3 = 1 \end{array}$$

## Existencia y unicidad de la base recíproca

Empezaremos por demostrar la existencia y unicidad de cada uno de los vectores de $B_R$.

Buscaremos en primer lugar un vector $\vec{e}_1$, que definiremos por sus coordenadas en B, tal que:

$$\vec{e}^{\,i}\cdot\vec{e}_j = \delta^i{}_j = \begin{cases} 1 & si\ i=j \\ 0 & si\ i\neq j \end{cases}$$

Sea pues

$$\vec{e}^{\,1} = b^{11}\vec{e}_1 + b^{21}\vec{e}_2 + \ldots + b^{n1}\vec{e}_n$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{e}^{\,1}\cdot\vec{e}_1 = 1 \to (b^{11}\vec{e}_1 + b^{21}\vec{e}_2 + \ldots + b^{n1}\vec{e}_n)\cdot\vec{e}_1 = 1 \to b^{11}g_{11} + b^{21}g_{21} + \ldots + b^{n1}g_{n1} = 1 \\ \vec{e}^{\,1}\cdot\vec{e}_2 = 0 \to (b^{11}\vec{e}_1 + b^{21}\vec{e}_2 + \ldots + b^{n1}\vec{e}_n)\cdot\vec{e}_2 = 0 \to b^{11}g_{12} + b^{21}g_{22} + \ldots + b^{n1}g_{n2} = 0 \\ \ldots\ldots \\ \vec{e}^{\,1}\cdot\vec{e}_n = 0 \to (b^{11}\vec{e}_1 + b^{21}\vec{e}_2 + \ldots + b^{n1}\vec{e}_n)\cdot\vec{e}_n = 0 \to b^{11}g_{1n} + b^{21}g_{2n} + \ldots + b^{n1}g_{nn} = 0 \end{array}\right\}(1)$$

Dado que $|G_B|$, el sistema (1) es un sistema de Cramer y, por tanto, existe un único vector que cumple las condiciones exigidas al primer vector de la base recíproca de la B.
Consideraciones análogas garantizarían la existencia y unicidad de los demás vectores de $B_R$.

Sean pues:

$$\begin{array}{l} \vec{e}^{\,1} = b^{11}\vec{e}_1 + b^{21}\vec{e}_2 + \ldots + b^{n1}\vec{e}_n \\ \vec{e}^{\,2} = b^{12}\vec{e}_1 + b^{22}\vec{e}_2 + \ldots + b^{n2}\vec{e}_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vec{e}^{\,n} = b^{1n}\vec{e}_1 + b^{2n}\vec{e}_2 + \ldots + b^{nn}\vec{e}_n \end{array}$$

1/2

Para obtener los coeficientes $b^{ij}$ $i,j\in I_n$ impondremos que $\partial^i{}_j = \vec{e}^{\,i}\cdot\vec{e}_j$ $\forall i,j\in I_n$, efectuando los productos escalares a partir de las coordenadas en B de los vectores que intervienen y trabajando en forma matricial.

(Recordemos que si $\vec{x} = x^i\vec{e}_i, \vec{y} = y^j\vec{e}_j \to \vec{x}\,\vec{y} = \left\|x^1 \ldots x^n\right\| G_B \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$

Si llamamos:

$$\begin{pmatrix} b^{11} & b^{21} & \cdots & b^{n1} \\ b^{12} & b^{22} & \cdots & b^{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b^{1n} & b^{2n} & \cdots & b^{nn} \end{pmatrix} G_B \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

Como $|P| = |(G_B)^{-1}| \neq 0$ los vectores de $B_R$ son linealmente independientes y constituyen por tanto una nueva base del espacio. Además la matriz de cambio de base entre B y $B_R$ será, $P^T = (G_B{}^{-1})^T = G_B{}^{-1}$ pudiéndose poner:

$$\left\|\vec{e}^{\,1}\ \vec{e}^{\,2} \ldots \vec{e}^{\,n}\right\| = \left\|\vec{e}_1\ \vec{e}_2 \ldots \vec{e}_n\right\| G_B{}^{-1} \quad (2)$$

2/2

## Coordenadas contravariantes y covariantes

Dado el vector $\vec{x} \in E^n(\mathfrak{R})$, se denominan **coordenadas contravariantes** de $\vec{x}$ en B a los n escalares que permiten expresar el vector $\vec{x}$ como combinación lineal de los vectores de B, es decir a los n números reales:

$$(x^1, \ldots, x^n) \text{ tales que } \vec{x} = x^i \vec{e}_i \,.$$

Se denominan **coordenadas covariantes** de $\vec{x}$ en B a los n escalares que permiten expresar el vector $\vec{x}$ como combinación lineal de los vectores de $B_R$, es decir a los n números reales: $(x_1, \ldots, x_n)$ tales que $\vec{x} = x_i \vec{e}^{\,i}$ .

Tenemos que darnos cuenta de que:

- Las llamadas ahora coordenadas contravariantes de $\vec{x}$ en B, son las que en temas anteriores hemos llamado simplemente coordenadas de $\vec{x}$ en B (el *apellido* contravariantes surge de la necesidad de distinguirlas de las covariantes recientemente definidas).

- Hemos definido las coordenadas covariantes de $\vec{x}$ en B como las contravariantes de $\vec{x}$ en $B_R$.

Como veremos ahora, las coordenadas covariantes de $\vec{x}$ en B, pueden obtenerse, una a una, efectuando los productos escalares del vector $\vec{x}$ por los vectores de B de forma ordenada:

$$\forall j \in I_n \quad \vec{x} \cdot \vec{e}_j = (x_i \vec{e}^{\,i}) \cdot \vec{e}_j = x_i (\vec{e}^{\,i} \cdot \vec{e}_j) = x_i \partial^i{}_j = x_j$$

Análogamente, las coordenadas contravariantes de $\vec{x}$ en B pueden obtenerse, una a una, efectuando los productos escalares del vector $\vec{x}$ por los vectores de $B_R$ de forma ordenada:

$$\forall j \in I_n \quad \vec{x} \cdot \vec{e}^{\,j} = (x^i \vec{e}_i) \cdot \vec{e}^{\,j} = x^i (\vec{e}_i \cdot \vec{e}^{\,j}) = x^i \partial_i{}^j = x^j$$

Es decir, **las coordenadas contravariantes de $\vec{x}$ en B son las covariantes de $\vec{x}$ en $B_R$.**

## Matriz de Gram como cambio de base

Por otra parte, las coordenadas contravariantes y covariantes de $\vec{x}$ en B se pueden relacionar usando los elementos de la matriz fundamental en dicha base: $x_j = \vec{x} \cdot \vec{e}_j = (x^i \vec{e}_i) \cdot \vec{e}_j = x^i (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = x^i \quad g_{ij}$ .

Es decir: $x_j = x^i g_{ij} \quad \forall j \in I_n \ (i \in I_n$ y es sumatorio).

Expresiones que desarrolladas toman la forma:

$$\begin{aligned} x_1 &= x^1 g_{11} + x^2 g_{21} + \ldots + x^n g_{n1} \\ x_2 &= x^1 g_{12} + x^2 g_{22} + \ldots + x^n g_{n2} \\ &\vdots \\ x_n &= x^1 g_{1n} + x^2 g_{2n} + \ldots + x^n g_{nn} \end{aligned}$$

Aunque también se pueden disponer en su forma matricial $\|x^1 \, x^2 \, \ldots \, x^n\| = \|x_1 \, x_2 \, \ldots \, x_n\| G_B \ (3)$ , o bien: $\|x^1 \, x^2 \, \ldots \, x^n\| = \|x_1 \, x_2 \, \ldots \, x_n\| {G_B}^{-1} \ (4)$.

En lo sucesivo, utilizaremos las siguientes notaciones para simplificar las expresiones que aparezcan:

$$\|x\| = \|x^1 \ldots x^n\| \quad \|x^*\| = \|x_1 \ldots x_n\| \quad \{x\} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \quad \{x^*\} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

El producto escalar de vectores puede expresarse, según sabemos, utilizando contravariantes de los vectores en la forma matricial $\vec{x} \cdot \vec{y} = \|x\| G \{y\}$.

Para el producto escalar, cuando se conocen las covariantes de uno o de los dos vectores que intervienen,resultan las siguientes expresiones:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \|x^*\|\{y\} = \|x^*\|{G_B}^{-1}\{y^*\} = \|x\|\{y^*\}$$

**Forma matricial** $\vec{x} \cdot \vec{y} = \|x\|G\{y\}$.

Teniendo en cuenta que con las notaciones establecidas, los resultados (3) y (4) se expresan en la forma matricial abreviada:

$$\begin{aligned}
(3): &\quad \|x^*\| = \|x\|G_B \rightarrow \{x^*\} = G\{x\} \\
(4): &\quad \|x\| = \|x^*\|{G_B}^{-1} \rightarrow \{x\} = G^{-1}\{x^*\}
\end{aligned}$$

## Cambio de base de la matriz de Gram

Veremos ahora cómo se comportan las coordenadas covariantes y las bases recíprocas ante un cambio de base. Sean:

- $B = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$; $B_R = \left\{\vec{e}^1, \ldots, \vec{e}^n\right\}$
- $B' = \left\{\vec{e}'_1, \ldots, \vec{e}'_n\right\}$ ; $B'_R = \left\{\vec{e}'^1, \ldots, \vec{e}'^n\right\}$

Suponemos conocido el cambio de base de B a B', $\|\vec{e}'_1 \ldots \vec{e}'_n\| = \|\vec{e}_1 \ldots \vec{e}_n\| C$, que abreviadamente notaremos por:

$$\|\vec{e}'\| = \|\vec{e}\| C$$

Ya sabemos (por haberlo tratado en el tema espacios vectoriales) cómo se comportan las coordenadas contravariantes ante este cambio de base:

$$\|x\|_{B'} = \|x\|_B \left(C^{-1}\right)^T.$$

Supondremos también conocido el comportamiento de las matrices fundamentales del espacio:

$$G_{B'} = C^T G_B C$$

Analizaremos, en primer lugar, cómo están relacionadas las covariantes de un vector en ambas bases:

$$\|x^*\|_{B'} =^{(3)} \|x\|_{B'} G_{B'} = \|x\|_B (C^{-1})^T C^T G_B C = \|x\|_B G_B C =^{(3)} \|x^*\|_B C$$

Luego las coordenadas covariantes se comportan como las base, es decir: el cambio de base $\|\vec{e}'_1 \ldots \vec{e}'_n\| = \|\vec{e}_1 \ldots \vec{e}_n\| C$, lleva parejo un cambio de base para las covariantes:

$$\|x'_1 \; x'_2 \ldots x'_n\|_{B'} = \|x_1 \; x_2 \ldots x_n\|_B C$$

## La matriz de Gram de $B_R$

Pasaremos a analizar ahora el comportamiento de las bases recíprocas de las dadas. Daremos para ello la siguiente forma abreviada al resultado (2) anteriormente definido:

$$\|\vec{e}_R\| = \|\vec{e}\|{G_B}^{-1}$$

En consecuencia:

$$\|\vec{e}_R\| = \|\vec{e}\|{G_B}^{-1} = \|\vec{e}\|\left(C^T G_B C\right)^{-1} = \|\vec{e}\|CC^{-1}{G_B}^{-1}\left(C^T\right)^{-1} = \|\vec{e}\|{G_B}^{-1}\left(C^{-1}\right)^T =$$

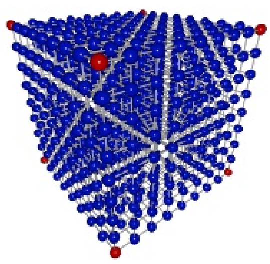
Es decir: el cambio de base $\|\vec{e}'_1 \ldots \vec{e}'_n\| = \|\vec{e}_1 \ldots \vec{e}_n\|C$, lleva aparejado el cambio de bases recíprocas:

$$\left\|\vec{e}'^1 \ldots \vec{e}'^n\right\| = \left\|\vec{e}^1 \ldots \vec{e}^n\right\|(C^{-1})^T.$$

Señalemos finalmente que la expresión (2), unida al comportamiento de las matrices fundamentales ante un cambio de base, permite obtener que:

$$G_{B_R} = ({G_B}^{-1})^T G_B {G_B}^{-1} = {G_B}^{-1}$$

Es decir: **la matriz fundamental en la base recíproca es la inversa de la fundamental en la base inicial.**

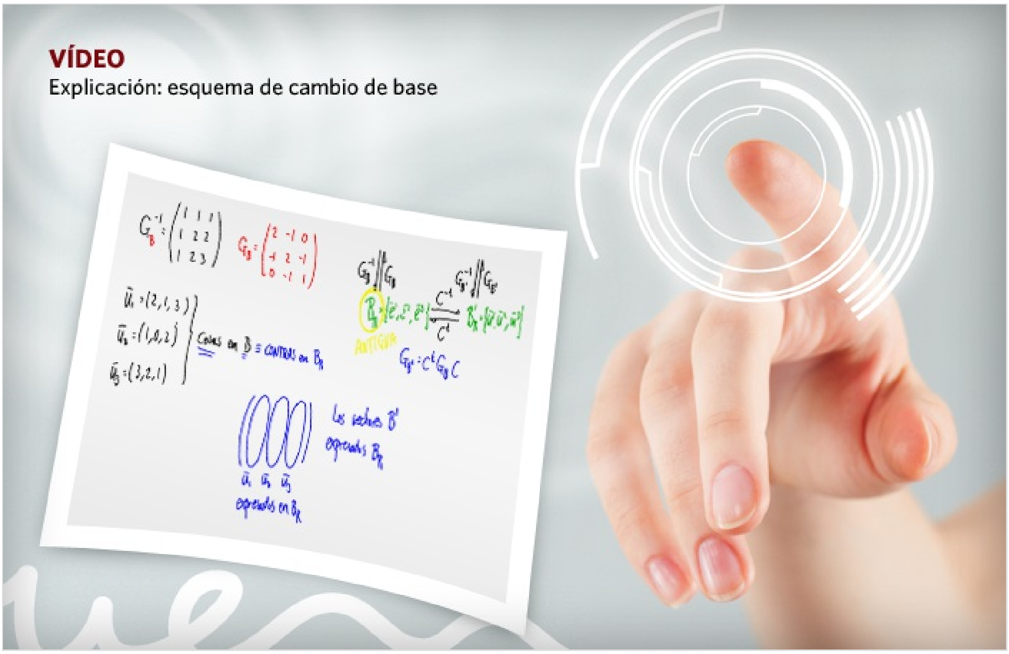


Observa, en último lugar, que si la base B hubiera sido ortonormal (GB=I) la expresión (2) nos garantizaría de inmediato que coincidiría con su recíproca, y la expresión (3) nos permitiría identificar las coordenadas covariantes con las contravariantes de cada vector en dicha base.

**Expresión (3)**

$$\|x^1\; x^2 \ldots\; x^n\| = \|x_1\; x_2 \ldots\; x_n\| G_B \quad (3)$$

## Vídeo: esquema de cambio de base



## Resumen

**La matriz de Gram:** $\underset{nxn}{G_B} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \cdots \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_n \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 \cdots \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_n \\ \vdots \vdots \ddots \vdots \\ \vec{e}_n \cdot \vec{e}_1 \vec{e}_n \cdot \vec{e}_2 \cdots \vec{e}_n \cdot \vec{e}_n \end{pmatrix}$

**Producto escalar:** $\vec{u} \cdot \vec{v} = \lambda$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \lambda \in \Re \quad \Rightarrow \quad (u^1 u^2 \cdots u^n) G_B \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = \lambda \in \Re$$

**Bases recíprocas:** Sea $E^n(\Re)$ un espacio vectorial euclídeo n-dimensional. Sea $B = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ una base del mismo. Se denomina **base recíproca** de la B, Y la representaremos por BR, al conjunto formado por los n vectores del espacio: $B_R = \left\{\vec{e}^1, \ldots, \vec{e}^n\right\}$ que verifican las relaciones: $\vec{e}^i \cdot \vec{e}_j = \delta^i{}_j = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j \end{cases}$

**Cambio de base de la matriz de Gram:** $G_{B'} = C^T G_B C$

**La matriz de Gram de BR:** $G_{B_R} = (G_B{}^{-1})^T G_B G_B{}^{-1} = G_B{}^{-1}$