Universidad Europea de Madrid

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

ESPACIOS EUCLÍDEOS

EL PRODUCTO ESCALAR

Índice

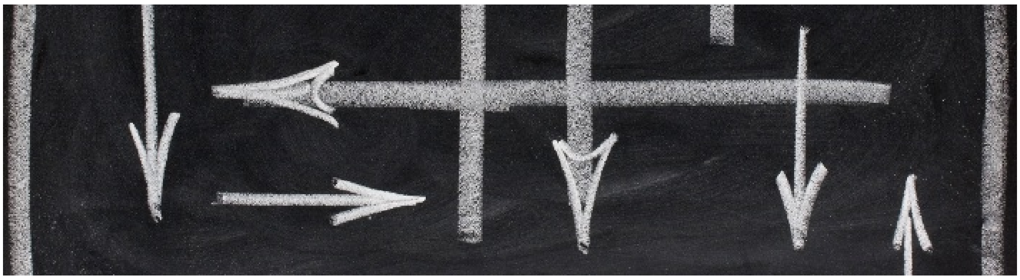
Presentación

Hasta ahora, en espacios vectoriales podemos plantear dónde están situados unos vectores respecto de otros, según sus componentes en una determinada base, ¿Pero cómo saber qué ángulo forman dos vectores o cuánto mide un determinado vector de largo? Hasta la introducción del concepto del producto escalar, esta pregunta no tiene respuesta.

El producto escalar es la operación a partir de la cual germina toda la geometría métrica descriptiva. Aún falta por llegar el importante concepto del "punto geométrico", pero el paso hacia delante es enorme en cuanto a las posibilidades que se abren. No solo en el ámbito geométrico, en física, por ejemplo, un vector que representa una fuerza no solo tiene ya dirección y sentido, sino que ahora podremos hablar de la magnitud de dicha fuerza en esa determinada dirección gracias al concepto de módulo.

En este tema aprenderemos:

- Qué es el producto escalar de dos vectores, y cómo engendra el espacio euclídeo.
- Cómo se calcula el módulo de un vector y el ángulo que forman dos.
- Profundizaremos en el concepto de ortogonalidad de dos vectores, estudiando los subespacios ortogonales y las propiedades de estos.
- Las desigualdades geométricas de los módulos de Schwartz y Minkowski.
- Y mucho más.



El producto escalar

El producto escalar, o producto interior, es una operación entre dos vectores cuyo resultado es un escalar (de ahí su nombre).

Se plantea del siguiente modo:

$$\left.\begin{array}{l} f: V \times V \to \mathfrak{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) \to \lambda \in \mathfrak{R} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \lambda \in \mathfrak{R}$$

Observemos las propiedades de esta operación:

1. Simetría: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

2. Linealidad: $\begin{cases} (\lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{u}_2) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u}_1 \cdot \vec{v}) + \mu(\vec{u}_2 \cdot \vec{v}) & 1^{er} \arg umento \\ \vec{v} \cdot (\lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{u}_2) = \lambda(\vec{v} \cdot \vec{u}_1) + \mu(\vec{v} \cdot \vec{u}_2) & 2^{o} \arg umento \end{cases}$

Debido a la simetría, con que cumpla linealidad en uno de los dos argumentos ya se puede considerar que la cumple en ambos

3. Positividad: $\forall \vec{v} \neq \vec{0} \quad \vec{v} \cdot \vec{v} > \vec{0}$.

Así, diremos que cualquier operación que cumpla estas propiedades en un espacio vectorial, es un producto escalar.

Llamaremos espacio euclídeo a un espacio vectorial dotado de un producto escalar.

El producto escalar se representará como $\vec{u} \cdot \vec{v}$. También se puede utilizar la notación < u,v >.

El producto escalar habitual

Es posible que en otras asignaturas o en otros niveles de formación ya te hayas topado con el producto escalar pues, es habitual que se use en asignaturas de base física o dónde se utilice mucho la geometría.

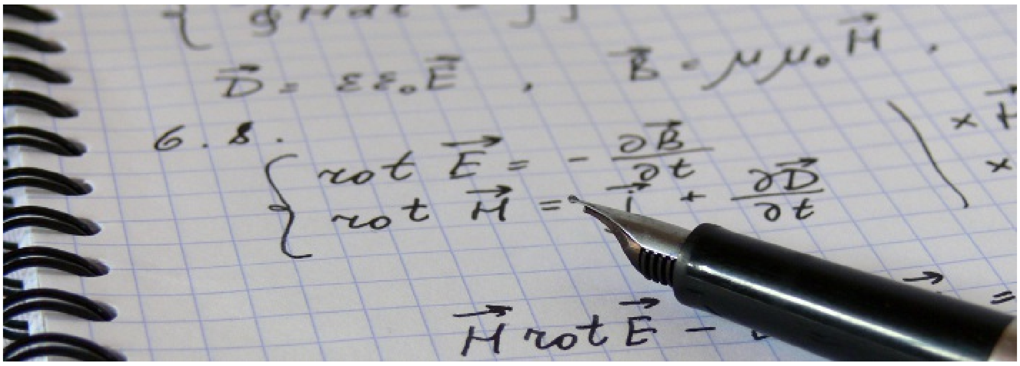
El problema surge cuando uno se da cuenta de que la información con la que contaba hasta el momento acerca de los productos escalares estaba sesgada.

Hasta el momento, el producto escalar de dos vectores de R^3, para quien haya trabajado con él, se realizaba así:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (x^1, x^2, x^3) \cdot (y^1, y^2, y^3) = x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3 \in \Re$$

Esto no es incorrecto, pero sí incompleto. ¿Por qué? Porque no es el único producto escalar existente en R^3. De hecho, cualquier operación que nos definan o definamos y que cumpla las condiciones ya descritas (**simetría**, **linealidad** y **positividad**) es un producto escalar, sin importar qué aspecto tenga.

Teniendo esto siempre en mente, continuemos con el estudio de la operación.



Norma o módulo de un vector

La norma o módulo de un vector es $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$.

La noción corresponde, intuitivamente, a la *longitud del vector*. También se puede denotar $\|\vec{v}\|$.

Con cualquier producto escalar, el único vector de módulo cero es el $\vec{0}$.

El módulo de un vector es el mismo que el de su opuesto: $|\vec{v}| = |-\vec{v}|$

El módulo de $a\vec{v}$ es $|a\vec{v}| = |a||\vec{v}|$ (es decir, el módulo queda multiplicado por el valor absoluto del escalar).

Distancia entre dos vectores

La distancia entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es la norma del vector diferencia entre ambos.

$$dist(\vec{u}, \vec{v}) = |\vec{u} - \vec{v}|$$

Puedes observar que si alguno de los dos vectores es nulo no podemos dividir por su módulo y, por tanto, el ángulo no está definido. En efecto, geométricamente, el vector nulo no forma ángulo ninguno.

Ángulo entre dos vectores

El producto escalar de dos vectores también puede expresarse en función de los módulos de los vectores que lo conforman, así como el coseno del ángulo que forman:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\,\vec{u}\,||\,\vec{v}\,|\cos(\vec{u},\overset{\wedge}{}\vec{v})$$

Donde $(\vec{u},\overset{\wedge}{}\vec{v})$ es el ángulo que forman ambos vectores.

Por tanto, para generalizar la noción de ángulo a cualquier espacio euclídeo, definimos:

$$(\vec{u},\overset{\wedge}{}\vec{v}) = \arccos\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\,\vec{u}\,||\,\vec{v}\,|}\right)$$

Vectores ortogonales

Dos vectores $\vec{u},\vec{v}$ son ortogonales si su producto escalar es cero: $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

Si miramos la definición de ángulo entre dos vectores, $(\vec{u},\overset{\wedge}{}\vec{v}) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}\,(rad)$

Es decir que dos vectores ortogonales forman 90º.

Cabe destacar que si dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales, entonces también lo son sus múltiplos $\alpha\vec{u}$ y $\beta\vec{v}$ (α, β escalares).

Subespacios ortogonales

Se llama subespacio ortogonal a otro, dado U, al subespacio $\omega(U)$, o bien $U^{\perp}$, formado por todos aquellos vectores del espacio euclídeo que son ortogonales a los de U.

Analíticamente, se enuncia: $U^{\perp}=\{\vec{x}\in E/\vec{x}\cdot\vec{y}=0 \quad \forall\vec{y}\in U\}$.

Puede comprobarse que $\underbrace{U\oplus U^{\perp}}_{suma\ \ directa}=\begin{cases} U\bigcap U^{\perp}=\{\vec{0}\} \\ U+U^{\perp}=E^{n}\end{cases}$

Veamos un ejemplo:

Si definimos en R^3 un producto escalar habitual, $\vec{x}\cdot\vec{y}=(x^1,x^2,x^3)\cdot(y^1,y^2,y^3)=x^1y^1+x^2y^2+x^3y^3\in\mathfrak{R}$, y tenemos un subespacio $U=L\{(1,1,1),(1,0,1)\}$

El subespacio ortogonal al U ($U^{\perp}$) se puede calcular teniendo en cuenta que ser ortogonal a todos los vectores de U equivale a ser ortogonal a los de su base.

En tal caso podemos definir $U^{\perp}$ como $U^{\perp}=\{\vec{x}\in E/\vec{x}\cdot\vec{y}=0 \quad \forall\vec{y}\in U\}$.

$$U^{\perp} = \{\vec{x} = (x^1, x^2, x^3) \in E/(x^1, x^2, x^3) \cdot (1,1,1) = 0 \quad \wedge \quad (x^1, x^2, x^3) \cdot (1,0,1) =$$

$$\left.\begin{array}{lll} (x^1, x^2, x^3) \cdot (1,1,1) = 0 & \Rightarrow & x^1 + x^2 + x^3 = 0 \\ (x^1, x^2, x^3) \cdot (1,0,1) = 0 & \Rightarrow & x^1 + x^3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x^1 = \alpha \\ x^2 = 0 \\ x^3 = -\alpha \end{array}\right. \qquad \forall \alpha \in$$

Con lo que concluimos que $U^{\perp} = L\{(1,0-1)\}$.

Desigualdad de Schwartz

En cualquier espacio euclídeo E, se verifica que:

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E \; |\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq |\vec{x}||\vec{y}|$$

Para comprobarlo, se parte de:

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \; \forall \lambda \in \Re \rightarrow (\vec{x} + \lambda \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \lambda \vec{y}) \geq 0$$

Como además:

$$(\vec{x} + \lambda \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \lambda \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{x} + \lambda(\vec{y} \cdot \vec{x}) + \lambda(\vec{y} \cdot \vec{x}) + \lambda^2(\vec{y} \cdot \vec{y}) = |\vec{x}|^2 + 2\lambda(\vec{x} \cdot \vec{y}) + \lambda^2 |\vec{y}$$

(Nota: esta ecuación no puede tener dos soluciones reales, ya que entonces la forma cuadrática no sería definida positiva. El discriminante de la ecuación ha de ser nulo o negativo).

La desigualdad resulta trivial si: $\vec{y} = \vec{0} \quad (0 \leq 0)$.

En otro caso es posible tomar: $\lambda = -\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{y}|^2}$, con lo que entrando en (1).

$|\vec{x}|^2 - 2\frac{(\vec{x} \cdot \vec{y})^2}{|\vec{y}|^2} + \frac{(\vec{x} \cdot \vec{y})^2}{|\vec{y}|^4} |\vec{y}|^2 \geq 0.$

Es decir: $|\vec{x}|^2 - \frac{(\vec{x}\cdot\vec{y})^2}{|\vec{y}|^2} \geq 0$, de donde: $|\vec{x}|^2|\vec{y}|^2 \geq (\vec{x}\cdot\vec{y})^2$.

Tomando finalmente raíces cuadradas con determinación positiva, se obtiene el resultado:

$$|\vec{x}||\vec{y}| \geq |\vec{x}\cdot\vec{y}|$$

Obsérvese que en el segundo miembro aparece el valor absoluto del número real $\vec{x}\cdot\vec{y}$, mientras que en el primero, aparecen los módulos de los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$.

Desigualdad de Minkowski

En cualquier espacio euclídeo E, se verifica que:

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E \; |\vec{x}+\vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$$

Para comprobarlo, se parte de:

$$|\vec{x}+\vec{y}|^2 = (\vec{x}+\vec{y}) \cdot (\vec{x}+\vec{y}) = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 + 2(\vec{x} \cdot \vec{y}) \leq |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 + 2|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq |\vec{x}|^2 + |$$

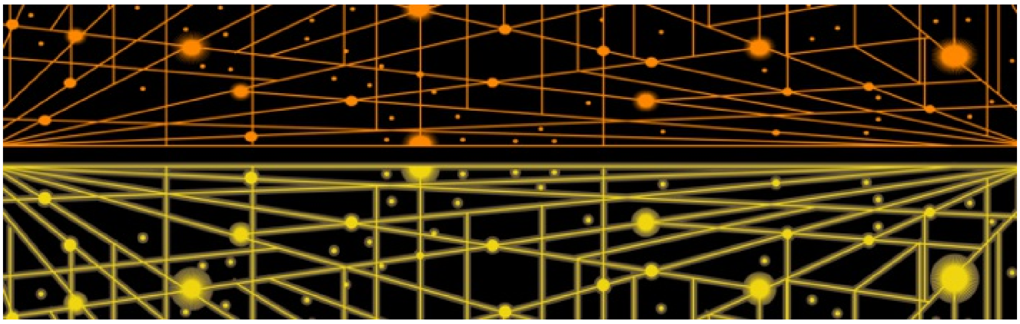
Lo cual es posible gracias a la desigualdad de Schwarz, antes descrita.

De este modo:

$$|\vec{x}+\vec{y}|^2 = \leq (|\vec{x}| + |\vec{y}|)^2$$

Donde, tomando raíces cuadradas con determinación positiva, se obtiene:

$$|\vec{x}+\vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$$



Resumen

- El producto escalar, se plantea: $\left.\begin{array}{r} f : V \times V \to \Re \\ (\vec{u}, \vec{v}) \to \lambda \in \Re \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \lambda \in \Re$
  - Simetría. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
  - Linealidad. $\begin{cases} (\lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{u}_2) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u}_1 \cdot \vec{v}) + \mu(\vec{u}_2 \cdot \vec{v}) & 1^{er} \arg umento \\ \vec{v} \cdot (\lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{u}_2) = \lambda(\vec{v} \cdot \vec{u}_1) + \mu(\vec{v} \cdot \vec{u}_2) & 2^{o} \arg umento \end{cases}$
  - Positividad. $\forall \vec{v} \neq \vec{0} \quad \vec{v} \cdot \vec{v} > \vec{0}$.
- Norma o módulo de un vector: $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$
- Ángulo entre dos vectores: $(\vec{u}, \stackrel{\wedge}{} \vec{v}) = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right)$
- Otra forma de plantear el producto escalar: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos(\vec{u}, \stackrel{\wedge}{} \vec{v})$
- Vectores ortogonales: Dos vectores $\vec{u}, \vec{v}$son ortogonales si su producto escalar es cero: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Subespacios ortogonales. $U^{\perp} = \{\vec{x} \in E / \vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \quad \forall \vec{y} \in U\}$. Puede comprobarse que:

$$\underbrace{U \oplus U^{\perp}}_{suma \quad directa} = \begin{cases} U \cap U^{\perp} = \{\vec{0}\} \\ U + U^{\perp} = E^{n} \end{cases}$$