Universidad Europea de Madrid

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

APLICACIONES EN ESPACIOS VECTORIALES

LA MATRIZ DEL HOMOMORFISMO

Índice

Presentación

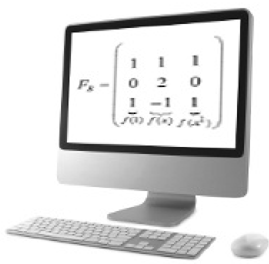
En álgebra, una constante en casi cualquier procedimiento es que si hay operaciones que se van a realizar de forma reiterada, lo mejor es proceder matricialmente. Cada operación que realicemos tendrá su matriz asociada, con lo que se resumirán decenas de cálculos en uno solo más general.

El cálculo matricial e un campo desarrollado a raíz de la necesidad de tener medios más eficientes de operar. Con la introducción del cálculo computacional se pueden utilizar grandes, enormes matrices para trabajar con espacios complejos.

El cambio de base tenía su matriz asociada como ya hemos estudiado, pues bien, ahora le toca el turno al homomorfismo.

En este tema aprenderás:

- Cómo se calcula la matriz de un homomorfismo.
- Cómo se obtienen el núcleo e imagen matricialmente.
- Cómo puedo conocer propiedades de la estructura del homomorfismo a través del estudio de la estructura de su matriz asociada.
- Y mucho más.



Expresión matricial de un homomorfismo

A la hora de realizar operaciones reiterativas o con vectores de grandes dimensiones se hace necesario un **sistema que permita el cálculo de homomorfismos** de forma sencilla y rápida. La **expresión matricial** de un homomorfismo permite esto, y también el cálculo de determinadas peculiaridades de cada homomorfismo con muy pocos pasos.

Una aplicación lineal entre espacios vectoriales puede por tanto escribirse matricialmente mediante la **matriz asociada a la aplicación lineal**. La matriz asociada en sí es propia de una determinada base, teniendo una misma aplicación distintas matrices para distintas bases. Existen muchas formas de nombrar las matrices de un homomorfismo, nosotros usaremos la siguiente:

Partiendo de un homomorfismo entre dos espacios vectoriales V^n y W^m, de la forma:

$$f : V^n \to W^m$$

$$\left.\begin{array}{r} \vec{x} \in V^n \\ \vec{y} \in W^m \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad f(\vec{x}) = \vec{y}$$

Llamaremos $F_{B_1 B_2}$ a la matriz del homomorfismo f expresada en la base B. Dicha matriz transformará a los vectores de V^n expresados en B_1 en vectores de W^m expresados en B_2. Si deseo poder transformar esos mismos vectores expresados en otras bases deberé calcular la matriz para esas bases en particular (como veremos más adelante).

La expresión matricial funcionaría del siguiente modo:

$$f(\vec{x}) = \vec{y} \quad \Rightarrow \quad \left(F_{B_1 B_2}\right) \underbrace{\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}_{B_1}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix}_{B_2}}_{\vec{y}}$$

Cálculo de la matriz del homomorfismo

La matriz, $F_{B_1 B_2}$, de homomorfismo $f : V^n \to W^m$ requiere primero que definamos las bases B_1 y B_2.

$B_1 = \{\vec{e}_i\} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\} \subset V^n$	$B_2 = \{\vec{u}_j\} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\} \subset W^m$

Una vez definidas las bases, debemos calcular el transformado de cada uno de los vectores de la primera base, expresado en la segunda:

$$\begin{aligned} f(\vec{e}_1) &= a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \ldots + a_m\vec{u}_m \\ f(\vec{e}_2) &= b_1\vec{u}_1 + b_2\vec{u}_2 + \ldots + b_m\vec{u}_m \\ &\vdots \\ f(\vec{e}_n) &= c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \ldots + c_m\vec{u}_m \end{aligned}$$

Esos vectores conforman las columnas de la matriz:

$$F_{B_1 B_2} = \left(\begin{array}{cccc} a_1 & b_1 & \cdots & c_1 \\ a_2 & b_2 & \cdots & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underbrace{a_m}_{f(\vec{e}_1)} & \underbrace{b_m}_{f(\vec{e}_2)} & \cdots & \underbrace{c_m}_{f(\vec{e}_n)} \end{array} \right)$$

Con lo que nos queda esta matriz de m filas y n columnas que ya hemos visto como se utiliza para operar:

$$\left(F_{B_1 B_2}\right) \underbrace{\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}_{B_1}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix}_{B_2}}_{\vec{y}}$$

Cálculo de la matriz de un endomorfismo

Cuando el espacio de partida y el de llegada coinciden el homomorfismo se llama endomorfismo. En esos casos, en lugar de tener dos bases B_1 del espacio inicial y B_2 del espacio final, utilizaremos una sola, B. La matriz, $F_{B_1B_2}$, pasará a llamarse F_B.

El endomorfismo se expresará: $f: V^n \to V^n$. Y también requiere la definición de la base B. $B = \{\vec{e}_i\} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\} \subset V^n$

Una vez definida la base, debemos calcular el transformado de cada uno de los vectores de la base, expresado en ella misma:

$$\begin{aligned} f(\vec{e}_1) &= a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \ldots + a_n\vec{e}_n \\ f(\vec{e}_2) &= b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + \ldots + b_n\vec{e}_n \\ &\vdots \\ f(\vec{e}_n) &= c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + \ldots + c_n\vec{e}_n \end{aligned}$$

Esos vectores conforman las columnas de la matriz:

$$F_B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & c_1 \\ a_2 & b_2 & \cdots & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underbrace{a_n}_{f(\vec{e}_1)} & \underbrace{b_n}_{f(\vec{e}_2)} & \cdots & \underbrace{c_n}_{f(\vec{e}_n)} \end{pmatrix}$$

Con lo que nos queda esta matriz cuadrada orden n con la que se opera de forma análoga a cuando los espacios de partida y llegada son distintos.

Matriz cuadrada de orden n

$$(F_B)\underbrace{\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}_B}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}_B}_{\vec{y}}$$

Caso práctico de cálculo de la matriz de un endomorfismo

Pongamos un ejemplo de cálculo de matriz de un homomorfismo para ver si las cosas están quedando claras.

Sea $f : \mathfrak{R}^3(\mathfrak{R}) \to \mathfrak{R}^2(\mathfrak{R})$ el homomorfismo definido por las condiciones siguientes: $f(1,1,1) = (2,2); f(1,2,3) = (3,5); f(2,2,1) = (4,3)$. Obtengamos la matriz de f en la base canónica.

En primer lugar establezcamos y nombremos unas bases para cada espacio con las que trabajar. Llamaremos $B_1 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ a la base de $\mathfrak{R}^3(\mathfrak{R})$ y $B_2 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ a la de $\mathfrak{R}^2(\mathfrak{R})$.

Así tendremos que:

$$f(1,1,1) = (2,2) \to f(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) = 2\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 \to f(\vec{e}_1) + f(\vec{e}_2) + f(\vec{e}_3) = 2\vec{u}_1 +$$

$$f(1,2,3) = (3,5) \to f(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3) = 3\vec{u}_1 + 5\vec{u}_2 \to f(\vec{e}_1) + 2f(\vec{e}_2) + 3f(\vec{e}_3) = 3$$

$$f(2,2,1) = (4,3) \to f(2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3) = 4\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 \to 2f(\vec{e}_1) + 2f(\vec{e}_2) + f(\vec{e}_3) = 4$$

- *2(i)-(iii):* $f(\vec{e}_3) = \vec{u}_2 \quad (iv)$
- (iv) en (i): $f(\vec{e}_1) + 2f(\vec{e}_2) = 3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 \quad (v)$
- (iv) en (ii): $f(\vec{e}_1) + f(\vec{e}_2) = 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2 \quad (vi)$
- (v)-(vi): $f(\vec{e}_2) = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \quad (vii)$
- (vii) en (vi): $f(\vec{e}_1) = \vec{u}_1$

Con lo que: $F_B = \left(\begin{matrix} \underbrace{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}}_{f(\vec{e}_1)} & \underbrace{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}}_{f(\vec{e}_2)} & \underbrace{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}}_{f(\vec{e}_3)} \end{matrix}\right)$

Caso práctico de cálculo núcleo e imagen

Bien, ya hemos visto cómo se calcula la matriz de un homomorfismo en la práctica, ahora veamos cómo se calculan núcleo e imagen del mismo modo. Para eso vamos a partir del ejemplo anterior.

Siendo

$f:\mathfrak{R}^3(\mathfrak{R}) \to \mathfrak{R}^2(\mathfrak{R})$ el homomorfismo definido por la siguiente matriz:

$$F_B = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}}_{f(\vec{e}_1)} & \underbrace{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}}_{f(\vec{e}_2)} & \underbrace{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}}_{f(\vec{e}_3)} \end{pmatrix}$$

Calculemos las bases y ecuaciones del núcleo y de la imagen de f.

El rango de la matriz de la transformación es Rg(F_B)=2 y sabemos que Rg(F_B)=dim(Im(f)), luego dim(Im(f))=2

También sabemos que dim(Im(f))+dim(ker(f))=dim(R^3), luego dim(ker(f))=3-2=1.

Como la dim(Im(f))=dim(R^2), podemos decir que Im(f)=R^2, y por lo tanto $B_{\mathrm{Im}(f)} = B_2 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$.

Calculemos ahora el núcleo:

$$F_B = \begin{pmatrix} 110 \\ 011 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{cases} x^1 + x^2 = 0 \\ x^2 + x^3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^1 + x^2 = 0 \\ x^2 + x^3 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x^1 = \alpha \\ x^2 = -\alpha \\ x^3 = \alpha \end{cases} \quad \forall \alpha \in \Re \quad \rightarrow \quad B_{\ker(f)} = \{(1\,,-1\,,\ 1\,)\}$$

El espacio vectorial de los polinomios

Hablemos por un momento del espacio vectorial de los polinomios, al que de momento hemos prestado poca atención.

Es un espacio interesante porque sus vectores a la vez son aplicaciones. Suele denotarse así:

$$P_n = \{p(x) \in P_n \quad / \quad p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad \forall a_i \in \Re$$

Es decir, que el espacio "P sub-n", P_n, de los polinomios de grado menor o igual que n está formado por todos aquellos polinomios cuyo grado es n o inferior. Recordemos, que el grado de un polinomio es el máximo exponente al que están elevadas sus variables.

Fijémonos que en este espacio unos polinomios se distinguen de otros por los coeficientes que acompañan a las variables x. Si fijo todos los coeficientes a_i, desde a_0 hasta a_n, obtendré un polinomio, un vector, en concreto de este espacio.

Pues bien, como hay que fijar n+1 grados de libertad (desde el 0 hasta el n), para fijar un solo vector, podremos decir que $\dim(P_n)=n+1$.

Veamos un caso más concreto, quizá más fácilmente abarcable: P_2.

Este es el espacio de los polinomios de grado menor o igual a 2. Lo forman aquellos polinomios que tienen exponentes hasta el cuadrado de x.

$$P_2 = \{\ p(x) \in P_2 \quad / \quad p(x) = ax^2 + bx + c \quad \forall a,b,c \in \Re\ \}$$

Fijémonos en que ahora tenemos un subespacio de dimensión 3. Pues depende de solo tres coeficientes: a, b y c.

La diferencia entre el polinomio

$t(x) = x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases}$ y el polinomio $q(x) = 2x^2 - 3x + 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = 1 \end{cases}$ son los valores de los coeficientes.

Analogía entre $\mathrm{P_n}$ y $\mathrm{R^{n+1}}$

Ya hemos visto cómo funciona el espacio de los polinomios, pero, ¿cómo podemos trabajar matricialmente con él?

Fijémonos por un momento en una comparativa entre P_2 y R^3.

$$P_2 = \left\{ \, p(x) \in P_2 \quad / \quad p(x) = ax^2 + bx + c \quad \forall a, b, c \in \Re \, \right\}$$

$$\Re^3 = \left\{ \vec{p} \in \Re^3 \quad / \quad \vec{p} = (a, b, c) \quad \forall a, b, c \in \Re \right\}$$

¿En qué se diferencian dos vectores de P_2? Habíamos dicho que en los valores de a, b y c. En ese caso, ¿en qué se diferencian dos vectores de R^3? Precisamente en los valores de a, b y c.

La dimensión de ambos espacios es 3.

Veamos cómo se operan dos vectores de cada uno:

$$\forall p(x), q(x) \in P_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} p(x) = ax^2 + bx + c \\ q(x) = dx^2 + ex + f \end{array} \right\}$$

$$\vec{p} + \vec{q} = (ax^2 + bx + c) + (dx^2 + ex + f) = (a+d)x^2 + (b+e)x + (c+f) \in P_2$$

$$\forall \vec{p}, \vec{q} \in \Re^3 \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{p} = (a, b, c) \\ \vec{q} = (d, e, f) \end{array} \right\} \quad \vec{p} + \vec{q} = (a, b, c) + (d, e, f) = (a+d, b+e, c+f) \in$$

Como se observa, las formas de operar son idénticas. Por tanto, podemos pasar un vector de un espacio a otro sin ninguna dificultad, simplemente recordando que:

$$p(x) = ax^2 + bx + c \;\approx\; \vec{p} = (a, b, c)$$

Lo cual nos permitirá, a la hora de trabajar con el espacio de los polinomios, tratarlos de forma matricial cuando sea necesario, simplemente expresándolos en R^3. Solo hay que poner atención a un pequeño detalle, y es que el espacio de los polinomios puede ordenarse de dos modos: con exponentes crecientes o decrecientes. No afectará al desarrollo de ningún problema, siempre y cuando seamos respetuosos con la ordenación que se nos dé al comenzar.

Caso práctico de polinomios

Planteemos un ejemplo práctico para ver si ha cuajado la idea. Sea el espacio vectorial P_2 de los polinomios de grado menor o igual a dos. Se considera el endomorfismo de P_2, definido como: f $p(x)$=p(1)+$p(2) - p(-2)$x+p(-1)x^2. Vamos a calcular a partir de esto la matriz del endomorfismo en la base canónica de

P_2 :$\{1, x, x^2\}$.Las bases del núcleo y la imagen de f.

$$F_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ \underbrace{1}_{f(1)} & \underbrace{-1}_{f(x)} & \underbrace{1}_{f(x^2)} \end{pmatrix}$$

Ya que:

f(1)=1+(1-1)x+x^2=1+x^2 → (1,0,1)

f(x)=1+(2-(-2))x-x^2=1+2x-x^2 → (1,2,-1)

f(x^2)=1+(4-4)x+x^2=1+x^2 → (1,0,1)

1/2

dim(Im(f))=Rg(FB)=2

dim(Ker(f))+dim(Im(f))=dim(P2)=3 dim(Ker(f))=3-2=1

Cálculo de Ker(f):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2y=0 \\ x-y+z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=0 \\ z=-\alpha \end{cases} \forall \alpha \in \Re \rightarrow B_{N(f)} = \left\{ \underbrace{1-x^2}_{(1,0,-1)} \right\}$$

Cálculo de Im(f):

$$B_{\mathrm{Im}(f)} = \left\{ \underbrace{1+x^2}_{(1,0,1)} \quad , \quad \underbrace{1+2x+x^2}_{(1,2,1)} \right\}$$

2/2

Resumen

Expresión matricial de un homomorfismo:

$$f(\vec{x}) = \vec{y} \quad \Rightarrow \quad \left(F_{B_1B_2}\right) \underbrace{\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}_{B_1}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix}_{B_2}}_{\vec{y}}$$

Cálculo de la matriz del homomorfismo: la matriz, $F_{B_1B_2}$, de homomorfismo $f : V^n \to W^m$ requiere primero que definamos las bases B_1 y B_2.

$$F_B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & c_1 \\ a_2 & b_2 & \cdots & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underbrace{a_n}_{f(\vec{e}_1)} & \underbrace{b_n}_{f(\vec{e}_2)} & \cdots & \underbrace{c_n}_{f(\vec{e}_n)} \end{pmatrix}$$

Cálculo de la matriz de un endomorfismo: Cuando el espacio de partida y el de llegada coinciden, el homomorfismo se llama endomorfismo. En esos casos en lugar de tener dos bases B_1 del espacio inicial y B_2 del espacio final, utilizaremos una sola, B. La matriz, $F_{B_1B_2}$, pasará a llamarse F_B.