Universidad Europea de Madrid

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

ESPACIOS VECTORIALES

EL ESPACIO VECTORIAL

Índice

Presentación 4

El espacio vectorial 5

Axiomática del espacio vectorial 6

- Axioma 1 6
- Axioma 2 6
- Axioma 3 6

El espacio vectorial real: 8

Combinaciones lineales 10

- Independencia lineal 10
- Dependencia lineal 10

Ejemplos de l.i. y de l.d. 12

Base de un espacio vectorial 14

Número de vectores de una base I 16

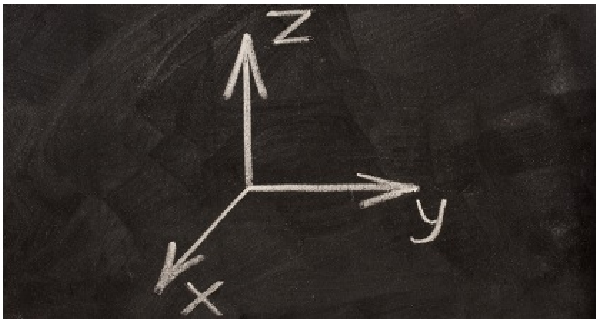
Número de vectores de una base II 18

Cálculo de bases en 20

Resumen 22

Presentación

Antes de arrancar en cualquier tipo de problema en ciencias aplicadas, lo primero que hay que hacer es establecer unas condiciones de contorno: dónde esta el problema, cómo se relaciona con su entorno, dónde están unos elementos respecto de otros, etc. Esto ocurre a la hora de plantear un péndulo y a la hora de diseñar un circuito.



¿Qué respuesta propuso las matemáticas a estas cuestiones? El vector. Un elemento matemático que dependiese de tantos grados de libertad como tuviese el problema y que, al fijarse, fije a su vez tanto un punto como las condiciones únicas del mismo.

Nace así el espacio vectorial, que en geometría dará direcciones y sentidos a las figuras, en física magnitudes direccionales, en electrónica flujos y campos, y así en cada uno de los campos de la ciencia.

En este tema trataremos:

- Qué es un espacio vectorial, cómo funciona y que leyes sigue.
- Qué es un vector, un escalar o una combinación lineal.
- Haremos la introducción y un primer acercamiento a la idea de bases.
- Las tipologías de espacio vectorial y su relación dentro de la estructura del álgebra lineal.

El espacio vectorial

Ya sabemos lo que es un grupo, un anillo y un cuerpo. El **espacio vectorial** es el siguiente peldaño en la escalera de las estructuras algebraicas. Lo que sucede es que en lugar de ampliar en leyes internas o en propiedades de las mismas introduce un nuevo tipo de ley y se aprovecha de estructuras preexistentes.

Primero hemos de definir **los elementos constitutivos** de nuestra nueva estructura algebraica:

- Por un lado tenemos un grupo abeliano (V, +), cuyos elementos llamaremos vectores y que se representarán en general mediante letras del alfabeto latino con una flecha sobre ellos:

$$\vec{v} \in V$$

- Por otro lado tendremos un cuerpo (K; +, ·), cuyos elementos llamaremos escalares y que se representarán en general mediante letras del alfabeto griego:

$$\lambda \in K$$

Se define a continuación, una ley de composición externa (LCE) entre V y K. Dicha ley, dota a V(K) de estructura de espacio vectorial.

La **LCE** se ha de definir del siguiente modo:

$$\cdot \; : V \times K \to V$$

$$\left.\begin{array}{l} \forall \vec{v} \in V \\ \forall \lambda \in K \end{array}\right\} \to \underbrace{\lambda}_{\in K} \cdot \underbrace{\vec{v}}_{\in V} = \vec{w} \in V$$

Axiomática del espacio vectorial

Un espacio vectorial, como toda estructura algebraica, habrá de cumplir una determinada axiomática para que quede completamente constituido. En el caso del espacio vectorial, son tres los axiomomas que habrán de cumplirse.

Axioma 1

Ley modular: $\forall \vec{v} \in V \quad \rightarrow \quad 1_K \cdot \vec{v} = \vec{v}$

Cualquier vector operado mediante la LCE con el neutro con la segunda ley del cuerpo, da como resultado ese mismo vector.

Axioma 2

Asociativa con escalares: $\left.\begin{array}{r} \forall \lambda, \mu \in K \\ \forall \vec{v} \in V \end{array}\right\} \rightarrow \quad \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{v}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{v}$

Axioma 3

Doble distributiva:

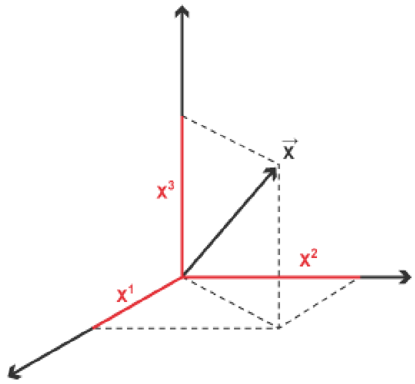
- Respecto a escalares: $\left.\begin{array}{r} \forall \lambda, \mu \in K \\ \forall \vec{v} \in V \end{array}\right\} \rightarrow \quad (\lambda + \mu) \cdot \vec{v} = (\lambda \cdot \vec{v}) + (\mu \cdot \vec{v})$
- Respecto a vectores: $\left.\begin{array}{r} \forall \lambda \in K \\ \forall \vec{u}, \vec{v} \in V \end{array}\right\} \rightarrow \quad \lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = (\lambda \cdot \vec{u}) + (\lambda \cdot \vec{v})$

El vector nulo de V(K) se denota: $\vec{0}$ y supone el elemento neutro del grupo V. cumpliendo, por tanto:

$$\left.\begin{array}{l}\forall\lambda\cdot\in K\\ \forall\vec{v}\in V\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}\lambda\cdot\vec{0}=\vec{0}\\ \vec{0}+\vec{v}=\vec{v}\end{array}\right.$$

El espacio vectorial real: $R^n(R)$

Espacios vectoriales hay infinitos. Pero lo cierto es que a nivel de ingeniería quizá el espacio vectorial más relevante sea el espacio vectorial ***Rⁿ*** sobre el cuerpo de los reales ***R***. Este espacio vectorial es el que se usa habitualmente en física y todas sus ramas. De hecho, es una particularización de R^3, R^n el más habitual de los espacios vectoriales en ingeniería. Un vector cualquiera de ***R³*** se denota:



$$\forall \vec{x} \in \Re^3 \quad \vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$$

Si se opera un escalar de ***R*** con un vector de ***R³***, queda del siguiente modo:

$$\left.\begin{array}{r} \forall \vec{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \Re^3 \\ \forall \lambda \in \Re \end{array}\right\} \quad \lambda \vec{x} = (\lambda x^1, \lambda x^2, \lambda x^3)$$

Por ejemplo, si tuviesemos el vector (1,1,1) y el escalar 3:

$$\left.\begin{array}{r} \vec{u} = (1,1,1) \in \Re^3 \\ 3 \in \Re \end{array}\right\} \quad 3\vec{u} = (3 \cdot 1, 3 \cdot 1, 3 \cdot 1) = (3,3,3)$$

Si se suman dos vectores queda:

$$\left.\begin{array}{r} \forall \vec{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \Re^3 \\ \forall \vec{y} = (y^1, y^2, y^3) \in \Re^3 \end{array}\right\} \quad \vec{x} + \vec{y} = (x^1 + y^1, x^2 + y^2, x^3 + y^3)$$

Por ejemplo, si tuviesemos los vectores (1,1,1) y (3,2,5):

$$\left.\begin{array}{r} \vec{u} = (1,1,1) \in \Re^3 \\ \vec{v} = (3,2,5) \in \Re^3 \end{array}\right\} \quad \vec{u} + \vec{v} = (1,1,1) + (3,2,5) = (1+3, 1+2, 1+5) = (4,3,6$$

Cómo tener un espacio vectorial

En cuanto se defina una LCE entre un grupo y un cuerpo cualquiera que cumpla la axiomática completa, ya tenemos un espacio vectorial.

En detalle

Donde cada componente (número separado por una coma en el vector), representa la magnitud y dirección que ocupa el vector en el espacio respecto a un determinado sistema de referencia.

Cómo se representa un vector R^3

Los vectores de R^3 se representan como flechas en el espacio y se utilizan para representar magnitudes con direcciones y sentidos en el espacio.

Combinaciones lineales

Dado un espacio vectorial V(K), tomemos del mismo un conjunto de vectores $\{\vec{v}_i\}$, que contiene un número p de vectores de la forma:

$$\{\vec{v}_i\} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_p\}$$

Se llama combinación lineal de $\{\vec{v}_i\}$, denotado $L\{\vec{v}_i\}$, a la suma de los p vectores de $\{\vec{v}_i\}$, operados por p escalares respectivamente:

$$L\{\vec{v}_i\} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 + \ldots + \lambda_p\vec{v}_p$$

Se puede abreviar esta expresión, escribiéndola en forma de sumatorio:

$$L\{\vec{v}_i\} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\vec{v}_i$$

Independencia lineal

Se dice que el conjunto de vectores $\{\vec{v}_i\}$ es **linealmente independiente** (l.i.) cuando al igualar la combinación lineal al vector nulo, todos los escalares han de ser necesariamente ceros.

$$L\{\vec{v}_i\} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 + \ldots + \lambda_p\vec{v}_p = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_p = 0$$

Dependencia lineal

Se dice que el conjunto de vectores $\{\vec{v}_i\}$ es **linealmente dependiente** (l.d.) cuando al igualar la combinación lineal al vector nulo, **no** todos los escalares han de ser necesariamente ceros.

$$L\{\vec{v}_i\} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 + \ldots + \lambda_p\vec{v}_p = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad algún\ \lambda_i \neq 0$$

Ejemplos de l.i. y de l.d.

> Veamos cómo funcionan las definiciones de dependencia e independencia lineal cuando las aplicamos a un caso práctico.

Tomemos, por ejemplo, dos grupos de vectores de R^3: $\{\vec{v}_i\}$ y $\{\vec{u}_i\}$. Cada uno de ellos está formado por tres vectores de R^3. Veamos sus vectores constituyentes:

$$\{\vec{v}_i\}=\left\{\underbrace{(1,1,1)}_{\vec{v}_1},\underbrace{(1,1,0)}_{\vec{v}_2},\underbrace{(1,0,0)}_{\vec{v}_3}\right\} \qquad \{\vec{u}_i\}=\left\{\underbrace{(1,1,1)}_{\vec{u}_1},\underbrace{(1,1,0)}_{\vec{u}_2},\underbrace{(0,0,1)}_{\vec{u}_3}\right\}$$

Ahora calculemos una combinación lineal de cada uno:

$$L\{\vec{v}_i\}=\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2+\lambda_3\vec{v}_3=\lambda_1(1,1,1)+\lambda_2(1,1,0)+\lambda_3(1,0,0)$$

$$L\{\vec{u}_i\}=\lambda_1\vec{u}_1+\lambda_2\vec{u}_2+\lambda_3\vec{u}_3=\lambda_1(1,1,1)+\lambda_2(1,1,0)+\lambda_3(0,0,1)$$

Para saber si $\{\vec{v}_i\}$ y $\{\vec{u}_i\}$ son dependientes o independientes, igualemos las combinaciones lineales de cada cual al vector nulo de R³, $\vec{0}=(0,0,0)$, y analicemos sus escalares:

1/3

Primero $\{\vec{v}_i\}$:

$$L\{\vec{v}_i\}=\vec{0} \;\rightarrow\; \lambda_1(1,1,1)+\lambda_2(1,1,0)+\lambda_3(1,0,0)=(0,0,0) \;\rightarrow\; (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\lambda_1+\lambda_2,\lambda_1)=(0,0,0)$$

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_1+\lambda_2=0\\ \lambda_1=0\end{cases} \xrightarrow{\lambda_1=0} 0+\lambda_2=0\rightarrow\lambda_2=0 \xrightarrow{\lambda_1=0\ \ y\ \ \lambda_2=0} 0+0+\lambda_3=0\rightarrow\lambda_3=0\rightarrow\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$$

Con lo que los tres escalares de la combinación lineal son forzosamente iguales a 0, y por lo tanto podemos afirmar que $\{\vec{v}_i\}$ es un conjunto de vectores l.i., linealmente independientes.

2/3

Ahora veamos $\{\vec{u}_i\}$:

$$L\{\vec{u}_i\}=\vec{0} \quad \rightarrow \quad \lambda_1(1,1,1)+\lambda_2(1,1,0)+\lambda_3(0,0,1)=(0,0,0) \quad \rightarrow \quad (\lambda_1+\lambda_2, \lambda_1+\lambda_2, \lambda_1+\lambda_3)=(0,0,0)$$

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2=0 \\ \lambda_1+\lambda_2=0 \\ \lambda_1+\lambda_3=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2=0 \\ \lambda_1+\lambda_3=0 \end{cases} \xrightarrow{\lambda_1=\alpha} \begin{cases} \lambda_1=\alpha \\ \lambda_2=-\alpha \\ \lambda_3=-\alpha \end{cases} \quad \forall \alpha \in \Re$$

Con lo que los tres escalares de la combinación lineal estan ligados por un parámetro α. Si α vale 1, por ejemplo:

$$\begin{cases} \lambda_1=1 \\ \lambda_2=-1 \\ \lambda_3=-1 \end{cases}$$

que son tres valores no nulos de los parámetros de la combinación lineal que hacen que esta se anule, por lo tanto podemos afirmar que $\{\vec{u}_i\}$ es un conjunto de vectores l.d., linealmente dependientes.

3/3

En este ejemplo

Podrían estar formados por más o menos vectores o por distinto número de vectores, pero para el ejemplo hemos tomado este caso en concreto.

Base de un espacio vectorial

La dimensión de un espacio vectorial V es el número de vectores l.i. que existen como máximo en V, o bien el número de parámetros necesarios para describir un vector genérico de V. En $\mathfrak{R}^n$, la n es la dimensión del espacio.

Un conjunto de vectores, $\{\vec{v}_i\} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_p\}$, es generador de V cuando puede escribirse cualquier vector de V como combinación lineal de los vectores de ese conjunto:

$$\{\vec{v}_i\}\ sistema\ generador \quad \Leftrightarrow \quad \forall \vec{u} \in V \quad \exists \alpha_i \in \mathfrak{R} \quad / \quad \vec{u} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3 +$$

Es decir, que cualquier vector de V, se puede escribir como suma de los vectores del conjunto operados con escalares.

Si además de ser **sistema generador**, un conjunto es **sistema libre** (es decir l.i.), a ese conjunto de vectores se le llama **base de V**.

Las bases siempre tienen el mismo número de vectores que dimensión tiene el espacio.

Si estamos en $\mathfrak{R}^3$, por ejemplo, tendríamos una base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, con tres vectores. Esa base permite expresar cualquier vector como combinación lineal de sus vectores. Veamos:

$$\forall \vec{x} \in \mathfrak{R}^3 \quad \vec{x} = (x^1, x^2, x^3)_B = x^1 \vec{u}_1 + x^2 \vec{u}_2 + x^3 \vec{u}_3$$

Esto significa que las componentes de un vector, representan los escalares por los que hay que operar la los vectores de la base de forma que su combinación lineal nos dé el vector buscado.

Es decir, el vector $(1,2,3)_B$ es un vector formado por la suma de los vectores de la base B operados por los escalares 1, 2 y 3, de la forma:

$$(1,2,3)_B = \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 + 3\vec{u}_3$$

Número de vectores de una base I

Demostremos que dos bases cualesquiera de un mismo espacio vectorial de dimensión finita tienen el mismo número de vectores:

- Sea V(K) un espacio vectorial de dimensión finita.
- Sean $B_1 = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m\}$ y $B_2 = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ dos bases de V(K).

Se procederá por reducción al absurdo suponiendo que $m > n$. Dado que el vector nulo no forma parte de ninguna base y que cualquier vector del espacio es combinación lineal de los de la base B_2, se podrá poner:

$$\vec{0} \neq \vec{u}_1 = \lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{v}_n \quad (1)$$

Suponiendo, sin perder la generalidad, que $\lambda_1 \neq 0$. Entonces:

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\lambda_1}\vec{u}_1 + \frac{1}{\lambda_2}\vec{v}_2 + \ldots + \frac{1}{\lambda_n}\vec{v}_n \quad (2)$$

Las relaciones (1) y (2) aseguran que los sistemas: $\{\vec{u}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ y $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ son equivalentes, pues todos los vectores de cada uno de los sistemas, es combinación lineal de los vectores del otro sistema. En consecuencia, el sistema $\{\vec{u}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ genera todo el espacio vectorial y se podrá poner:

$$\vec{u}_2 = \alpha_1 \cdot \vec{u}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \vec{v}_n \quad (3)$$

Se supondrá, sin perder generalidad, que $\alpha_2 \neq 0$. Entonces:

$$\vec{v}_2 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\vec{u}_1 + \frac{1}{\alpha_2}\vec{u}_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\vec{v}_3 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_2}\vec{v}_n \quad (4)$$

Escalar nulo

Debiendo haber entre los escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ alguno no nulo.

Sin nulo no hay base

Debiendo haber necesariamente entre los escalares $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ alguno no nulo, ya que si todos fuesen nulos $\vec{u}_2 = \alpha_1 \cdot \vec{u}_1$ y B_1 no sería base.

Número de vectores de una base II

Las relaciones (3) y (4)...

$$(3)\quad \vec{u}_2 = \alpha_1 \cdot \vec{u}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \vec{v}_n$$

$$(4)\quad \vec{v}_2 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\vec{u}_1 + \frac{1}{\alpha_2}\vec{u}_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\vec{v}_3 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_2}\vec{v}_n$$

...aseguran que los sistemas...

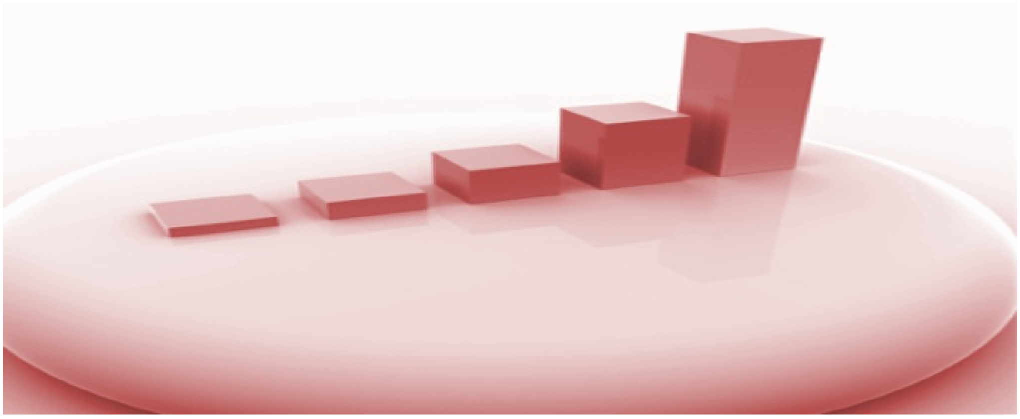
$$\{\vec{u}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\} \text{ y } \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n\}$$

...son equivalentes y en consecuencia que éste último genera todo el espacio.

Se reitera el proceso, llegando a obtener un sistema $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ generador de V(K).

Como $m > n$ en B_1 sobrarían vectores y el vector $\vec{u}_{n+1}$ sería combinación lineal de $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ con lo que la base B_1 no sería base y se concluiría el absurdo.

De forma análoga se procedería con el supuesto $m < n$, concluyendo que m=n.



Cálculo de bases en R^3

Veamos ahora unos cuantos ejemplos de cálculo de bases en R^3. En primer lugar miremos el conjunto:

$$B_1 = \{\vec{u}_1 = (1,2,3), \vec{u}_2 = (1,0,1), \vec{u}_3 = (0,2,2)\}$$
$$\alpha_1(1,2,3) + \alpha_2(1,0,1) + \alpha_3(0,2,2) = (0,0,0) \rightarrow \alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = -1$$

Luego no es sistema libre, luego no es base. Veamos ahora para:

$$B_2 = \{\vec{u}_1 = (1,2,3), \vec{u}_2 = (1,0,1), \vec{u}_3 = (0,2,2), \vec{u}_4 = (0,1,0)\}$$
$$\alpha_1(1,2,3) + \alpha_2(1,0,1) + \alpha_3(0,2,2) + \alpha_4(0,1,0) = (0,0,0) \rightarrow \alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1, \alpha_3$$

Luego no se sistema libre. Luego no es base.

Veamos por último para:

$$B_3 = \{\vec{u}_1 = (1,2,3), \vec{u}_2 = (1,0,1), \vec{u}_3 = (0,2,1)\}$$
$$\alpha_1(1,2,3) + \alpha_2(1,0,1) + \alpha_3(0,2,1) = (0,0,0) \rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

Luego es sistema libre.

$$\lambda_1(1,2,3) + \lambda_2(1,0,1) + \lambda_3(0,2,1) = (a,b,c) \rightarrow \begin{array}{l} +\lambda_2 = a \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_3 = b \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = c \end{array} \rightarrow$$
$$\rightarrow \begin{cases} = 2a + \frac{1}{2}b - c \\ \lambda_2 = -a - \frac{1}{2}b + c \\ \lambda_3 = a + b - c \end{cases} \quad \forall a,b,c \in \Re$$

Luego es sistema generador. Luego es **base**.

Resumen

Axiomática del espacio vectorial:

- Axioma 1. Ley modular: $\forall \vec{v} \in V \quad \rightarrow \quad 1_K \cdot \vec{v} = \vec{v}$
- Axioma 2. Asociativa con escalares: $\left.\begin{array}{l} \forall \lambda, \mu \in K \\ \forall \vec{v} \in V \end{array}\right\} \rightarrow \quad \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{v}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{v}$
- Axioma 3. Doble distributiva:
  - Respecto a escalares: $\left.\begin{array}{l} \forall \lambda, \mu \in K \\ \forall \vec{v} \in V \end{array}\right\} \rightarrow \quad (\lambda + \mu) \cdot \vec{v} = (\lambda \cdot \vec{v}) + (\mu \cdot \vec{v})$
  - Respecto a vectores: $\left.\begin{array}{l} \forall \lambda \in K \\ \forall \vec{u}, \vec{v} \in V \end{array}\right\} \rightarrow \quad \lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = (\lambda \cdot \vec{u}) + (\lambda \cdot \vec{v})$

Combinaciones lineales. Dado $\{\vec{v}_i\} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_p\}$ una combinación lineal de $\{\vec{v}_i\}$ sería:

$$L\{\vec{v}_i\} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 + \ldots + \lambda_p \vec{v}_p = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{v}_i$$

Independencia lineal:

$$L\{\vec{v}_i\} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 + \ldots + \lambda_p \vec{v}_p = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$$

Base: Si además de ser **sistema generador**, un conjunto es **sistema libre** (es decir l.i.), a ese conjunto de vectores se le llama **base de V**.