Universidad
Europea de Madrid

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

LEYES, ESTRUCTURAS BÁSICAS Y COCIENTES

LÓGICA DE PROPOSICIONES

Índice

Presentación

La lógica es el estudio de las leyes más sencillas que rigen el mundo, leyes basadas en una dicotomía absoluta: hay cosas falsas y hay cosas verdaderas.

En el mundo de los ordenadores, esto es, en el mundo informático en general, los elementos más pequeños de la información están codificados también de esa forma bipolar, simbolizados mediante 0 y 1. El estudio de las relaciones lógicas nos acercará al estudio de las relaciones entre los ceros y unos del propio código máquina. Nos acercará a cómo piensa, cómo engrana, cómo discurre la máquina.

Aprenderemos los principios básicos del álgebra y de buena parte de las matemáticas, sin alejarnos mucho de cómo se plantearon hace miles de años en la Grecia Clásica. Esos primeros estudios demuestran una vez más su absoluta solidez, al ser el alimento de nuestra moderna tecnología.

En este tema aprenderás:

- A plantear relaciones lógicas hasta sus últimas consecuencias.
- Veremos la respuesta a muchas preguntas; ¿Qué es una tabla de verdad?, ¿qué es un teorema?, ¿cómo se reduce al absurdo?
- Y mucho más...

Lógica elemental de proposiciones

En matemáticas, una proposición es un enunciado que puede ser verdadero o falso, pero no ambas cosas a la vez. A partir de esta sencilla premisa se abre toda una rama de estudio que puede llegar a ser bastante compleja.

En primer lugar estudiemos cómo se denotan cada una de las operaciones y relaciones que vamos a utilizar de forma frecuente:

- $x \in E$→"x pertenece al conjunto E" →Equivale a afirmar que x es un elemento del conjunto E.
- $A = B$→"A igual a B"→Equivale a afirmar que A y B representan al mismo conjunto.
- $A \subset B$→"A está contenido en B" → Equivale a afirmar que A es un subconjunto de B.

En estas definiciones hablamos de dos conceptos que aunque son muy habituales en la matemática preuniversitaria, convendría repasar para darles un mayor rigor en su definición: el conjunto y el subconjunto.

El conjunto

Un conjunto es una colección de objetos o elementos, que puede ser finita o infinita. Si un conjunto no tiene ningún elemento se le conoce como conjunto vacío. Veamos unos ejemplos de conjunto finito e infinito:

- Conjunto finito: Las letras del abecedario.
- Conjunto infinito: Los puntos de la recta real.

El subconjunto

Un conjunto A es una parte o un subconjunto de E, si solo si, todo elemento de A pertenece a E.

- $\{A \subset E \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in E\}$

Las propiedades de los conjuntos

Durante el desarrollo de la materia descubriremos que cada familia u operación nueva que vaya surgiendo vendrá siempre acompañada de un abanico de propiedades que cumplirán sus elementos. En el caso de los conjuntos, son las siguientes:

- Todo conjunto está contenido en sí mismo. Es decir: $A \subset A$
- Si un conjunto contiene a otro y el otro contiene al primero, significa que ambos son iguales. Es decir: $Si\, A \subset B \wedge B \subset A \rightarrow A = B$, ya que tienen los mismos elementos:
  - $\{A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B\}$
  - $\{B \subset A \Leftrightarrow \forall x \in B \Rightarrow x \in A\}$
- Los conjuntos cumplen la transitividad mediante la pertenencia. Es decir, que si un conjunto $Si\, A \subset B \wedge B \subset C \rightarrow A \subset C$

Se podrá decir también que, sea E un conjunto y R una relación tal que para cada $x \in E$ es o bien verdadera, o bien falsa, se define A como el conjunto formado por todos los elementos de E para los cuales R es verdadera:

- $A = \{x \in E = R(x)\}$

Por ejemplo, tomemos el caso del subconjunto $\bar{D}$:

$$\bar{D} = \left\{(x, y) \in \Re \times \Re : x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

El subconjunto encierra todos los puntos que cumplen $x^2 + y^2 \leq 1$, es decir, que quedan dentro o en el límite de la circunferencia definida por la ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

Operaciones lógicas. Negación

Las operaciones lógicas son aquellas relaciones que se establecen entre dos proposiciones, obteniéndose como resultado una nueva proposición.

Ya conocemos las relaciones de pertenencia $(x \in E)$ y de igualdad $(A = B)$ y mediante operaciones lógicas binarias podemos construir proposiciones más complejas.

Para entender el significado de estas operaciones lógicas se recurre a la tabla de verdad, que es un esquema que permite deducir la verdad o falsedad de una proposición en base a la de sus proposiciones componentes.

Veamos la primera, y más sencilla, de las operaciones lógicas que vamos a estudiar:

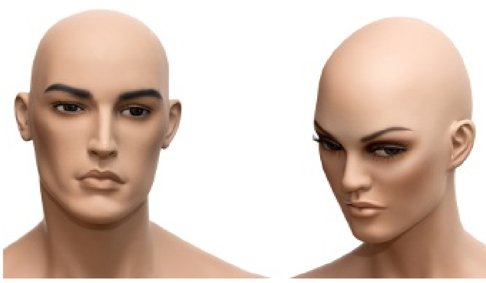
La negación

Para denotar la operación de negación utilizamos el siguiente símbolo: $\neg$. Así, si R es una relación, $\neg R$ es la negación.

Su tabla de verdad es como sigue:

R	V	F
$\neg R$	F	V

Si R es verdadera, $\neg R$ es falsa y viceversa.



Pongamos un sencillo ejemplo para entender cómo funciona:

- R $\rightarrow$ Todos los hombres son calvos.
- $\neg R$ $\rightarrow$ Existe al menos un hombre que no lo es.

R es falso, luego $\neg R$ es verdadera.

Operaciones lógicas. Conjunción y disyunción

Continuemos con este breve repaso por las operaciones lógicas con las dos siguientes: conjunción y disyunción.

Conjunción

En este caso si R y S son proposiciones, la relación $R \wedge S$, (que se leería "R y S") es la conjunción de la R y de la S.

Nota: fijémonos en el hecho de que hay dos proposiciones y, por lo tanto, la tabla de verdad tendrá cuatro filas, una por cada posible combinación de verdadero y falso de las proposiciones: VV, VF, FV y FF.

En detalle [Tabla de verdad](#)

Ejemplo [Ejemplo](#)

La disyunción

Ahora, si R y S son proposiciones, la relación $R \vee S$, "R o S", es la disyunción de R y la de S.

R	S	$R \vee S$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

$R \vee S$ es verdadera si al menos una de las dos, R o S, lo es.

En detalle

Tabla de verdad

R	S	$R \wedge S$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

$R \wedge S$ es verdadera. $\Rightarrow$ R es verdadera y S también.

Ejemplo

Ejemplo

R $\rightarrow$ Todos los hombres son calvos.

S $\rightarrow$ Todas las mujeres son calvas.

$R \wedge S$ $\rightarrow$ Todos los hombres y mujeres son calvos.

Como la primera afirmación es falsa y la segunda también, su conjunción también lo será.

Operaciones lógicas. Implicación, equivalencia

Continuemos con este breve repaso por las operaciones lógicas con las dos siguientes: implicación y equivalencia.

La implicación

En este caso si R y S son proposiciones, la relación $R \Rightarrow S$ (Si R, entonces S) equivale a "R implica S".

R	S	$R \Rightarrow S$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

La implicación de la proposición S (consecuente) por la proposición R (antecedente) es falsa solo si la R es verdadera y la S no lo es.

La equivalencia

Por otro lado, si R y S son proposiciones, la relación $R \Leftrightarrow S$ (que se leería "R equivale a S"), es $(R \Rightarrow S) \wedge (S \Rightarrow R)$.

R	S	$(R \Rightarrow S)$	$(S \Rightarrow R)$	$S \Leftrightarrow R$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

La equivalencia entre dos proposiciones es verdadera si y solo si ambas son verdaderas o ambas son falsas.

Operaciones lógicas. Tautologías

La última operación lógica que vamos a revisar es la tautología. Una tautología no es una proposición en sí misma, sino que es una proposición compuesta, que, independientemente de la verdad o falsedad de sus proposiciones componentes, es siempre verdadera.

Por ejemplo, tomemos la siguiente tautología: $(R \Rightarrow S) \Leftrightarrow (\neg S \Rightarrow \neg R)$

En detalle

Tabla de verdad

Algunas tautologías son muy comunes y aparecen en diversos momentos del estudio de las matemáticas: es el caso de la Ley de De Morgan.

La ley de De Morgan

La tautología de la ley de De Morgan es la siguiente:

$$\neg(R \wedge S) \Leftrightarrow (\neg S \vee \neg R)$$

Y su tabla de verdad queda de este modo:

R	S	¬R	¬S	¬(R∧S)	¬R∨ ¬S	⇔	(R∧S)
V	V	F	F	F	F	V	V
V	F	F	V	V	V	V	F
F	V	V	F	V	V	V	F
F	F	V	V	V	V	V	F

En detalle

Tabla de verdad

Su tabla de verdad quedaría conformada del siguiente modo:

R	S	¬R	¬S	R⇒S	¬R ⇒¬S	⇔
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Tautologías relevantes

Como se acaba de decir, existen un número de tautologías que son relevantes por la frecuencia de su uso en matemáticas, veamos algunas más:

La ley de transitividad

La tautología de la ley de transitividad es la siguiente: $((R \Rightarrow S) \wedge (S \Rightarrow T)) \Rightarrow (R \Rightarrow T)$

Y su tabla de verdad queda de este modo:

R	S	T	R⇒S	S⇒T	R⇒S∧S⇒T	R⇒T	(R⇒S∧S⇒T) ⇒(R⇒T)
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V

Distributivas

Hay dos tautologías habituales que se usaran, también, a lo largo de este curso que son las distributivas. Se formulan del siguiente modo:

Distributiva de $\wedge$ respecto de $\vee$: $(R \wedge (S \vee T)) \Leftrightarrow ((R \wedge S) \vee (R \wedge T))$

Distributiva de $\vee$ respecto de $\wedge$: $(R \vee (S \wedge T)) \Leftrightarrow ((R \vee S) \wedge (R \vee T))$

Aunque las restricciones que rigen una tautología parecen muy estrictas, lo cierto es que en matemáticas existen innumerables ejemplos que se utilizan con mucha frecuencia. En álgebra y matemática discreta veremos bastantes, aunque muchas veces ni siquiera seremos abiertamente conscientes de ello.

Teorema

Un teorema es una proposición verdadera, compuesta por las proposiciones R (hipótesis) y S (tesis), que se expresa en la forma $R \Rightarrow S$, "si R entonces S".

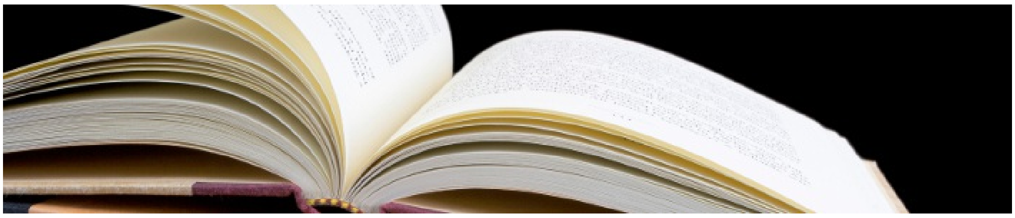
En una demostración directa de un teorema, a partir de la hipótesis R que suponemos verdadera, ha de llegarse deduciendo matemáticamente a que la tesis es verdadera.

En el teorema $R \Rightarrow S$ se dice que la proposición R es suficiente para S, mientras que S se dice que es necesaria para R en el caso de tener $R \Leftrightarrow S$, R es una condición necesaria y suficiente para S y viceversa.

Dado que $(R \Rightarrow S) \Leftrightarrow (\neg S \Rightarrow \neg R)$, a veces es muy útil, para demostrar un teorema $R \Rightarrow S$, demostrar el contrarrecíproco, es decir, su proposición equivalente: $\neg S \Rightarrow \neg R$.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1	A y B son conjuntos: si A=B, entonces $A \subset B$. En el teorema anterior A=B es una condición suficiente para $A \subset B$ y $A \subset B$ es una condición necesaria para A=B. Sin embargo, $A \subset B$ no es suficiente para A=B, ni A=B es necesario para $A \subset B$, es decir, que el recíproco del teorema anterior no se cumple.
Ejemplo 2	$n \in Z$; n es múltiplo de 5 $\Leftrightarrow$ la cifra de las unidades de n es 0 o 5. Por tanto, se podría haber enunciado diciendo: "una condición necesaria y suficiente para que un número entero sea múltiplo de 5 es que la cifra de las unidades de dicho número sea 0 o 5".
Ejemplo 3	Para demostrar utilizando el contrarrecíproco, el siguiente teorema: "$n, m \in \aleph$; si n es par o m es par $\Rightarrow$ n·m es par", habría que demostrar que "$n, m \in \aleph$; si n·m es impar $\Rightarrow$ n o m son impares".



Demostración por reducción al absurdo

Para demostrar el teorema R⇒S, puede utilizarse una demostración por reducción al absurdo que consiste en tomar como hipótesis:

$$R \wedge \neg S$$

Inmediatamente, mediante razonamientos lógicos, llegaríamos a una contradicción:

> Sabemos que R⇒S ⇔ (¬R∧S) ⇔ ¬(R∧¬S)
>
> Por lo tanto, partimos de R∧¬S para llegar a una contradicción.

Por ejemplo pongamos la demostración por reducción al absurdo del teorema: "Si dos rectas distintas a y b del plano son paralelas a una tercera c, entonces a y b son paralelas entre sí".

Supongamos que a y b son paralelas a c, pero no son paralelas entre sí. Si a y b no son paralelas, se cortan en un punto P. Luego tenemos dos rectas a y b que son paralelas a una recta c que pasan por un mismo punto. Esto contradice el axioma de la geometría euclidiana que dice: "solo hay una recta que pasando por un punto, sea paralela a otra recta".

Queda demostrado que a y b tienen que ser paralelas para no caer en la contradicción del axioma.

Principio de inducción

El principio de inducción se utiliza para demostrar que una proposición p que depende de n es válida para todo n (dónde n es un número natural).

Sea $m = \{n \in N / P(n) \; es \; verdadera\}$, para demostrar que p es verdadera $\forall n \in N$, hay que demostrar:

$$\begin{cases} P(0) \; es \; verdadera \\ \forall n \in N; \; P(n) \Rightarrow P(n+1) \end{cases}$$

Lo cual implica demostrar que:

$$\begin{cases} P(0) \; es \; verdadera \; \Rightarrow P(0) \Rightarrow m \\ \forall n \in N; \quad \underbrace{P(n) \Rightarrow m}_{(P(0) \wedge P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots \wedge P(n))} \quad \Rightarrow P(n+1) \Rightarrow m \end{cases}$$

Lo que nos lleva al concepto de **cuantificadores**. Sea E un conjunto y R(a) una relación verdadera o falsa dependiendo de "a":

> La relación (∀a ∈ E) (R(a)) equivale a decir que para cualquier elemento del conjunto E, la relación R(a) es verdadera.

Por ejemplo si tomamos cualquier triángulo posible del conjunto de todos los triángulos, $(\forall t \in T)$ (la suma de los ángulos internos es pi).

> La relación (∃a ∈ E) (R(A)) equivale a decir que existe al menos un elemento del conjunto E para el cual R(a) es verdadero.

Por ejemplo si tomamos cualquier triángulo posible del conjunto de todos los triángulos, $(\exists t \in T)$ (tiene tres lados iguales).

Resumen

El conjunto: un conjunto es una colección de objetos o elementos, que puede ser finita o infinita.

El subconjunto: un conjunto A es una parte o un subconjunto de E, si y solo si, todo elemento de A pertenece a E. $\{A \subset E \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in E\}$

- Negación: si R es una relación, $\neg R$ es la negación.
- Conjunción: si R y S son proposiciones, la relación $R \wedge S$, "R y S", es la conjunción de la R y de la S.
- Disyunción: si R y S son proposiciones, la relación $R \vee S$, "R o S", es la disyunción de R y la de S.
- Implicación: si R y S son proposiciones, la relación $R \Rightarrow S$ (Si R, entonces S) equivale a "R implica S".
- Equivalencia: Si R y S son proposiciones, la relación $R \Leftrightarrow S$, "R equivale a S", es $(R \Rightarrow S) \wedge (S \Rightarrow R)$.

Tautologías: Proposición compuesta, que, independientemente de la verdad o falsedad de sus proposiciones componentes, es siempre verdadera.

Teorema: Un teorema es una proposición verdadera, compuesta por las proposiciones R (hipótesis) y S (tesis), que se expresa en la forma $R \Rightarrow S$, "si R entonces S".