6. Compacidad

Número 1. Demostrar que un espacio es compacto si y sólo si toda familia de cerrados con la propiedad de la intersección finita (p.i.f) (i.e., la intersección de cualquier subfamilia finita es no vacía), tiene intersección no vacía. Mostrar que $\mathbb{R}$ con la topología usual no es compacto utilizando esta caracterización.

Número 2. Probar que en un espacio T_2 cualquier intersección de conjuntos compactos es un compacto.

Número 3. Conjunto de Cantor. Sea C el subconjunto de $I = [0, 1]$ construido como sigue. Se toma primero $A_1 = I \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, luego $A_2 = A_1 \setminus (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$, y en general A_n se obtiene suprimiendo los intervalos abiertos centrales de la división en tres partes de cada intervalo de A_n. Mostrar que el conjunto $C = \bigcap_n A_n$ es compacto (con la topología usual).

Número 4. Sea $(X, \mathfrak{T})$ un espacio topológico, y $(x_n)_n$ una sucesión que converge a x. Mostrar que el subespacio $K = \{x_n | \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ es compacto.

Número 5. Estudiar los subconjuntos compactos de T_{CF} y de T_{CN}.

Número 6. Probar que en un espacio compacto toda sucesión tiene algún valor de adherencia.

Número 7. Probar que en un espacio T_2, dos compactos disjuntos pueden ser separados por dos abiertos disjuntos.

Número 8. Se consideran en $\mathbb{R}^2$ las topologías $\mathfrak{T}_D$, $\mathfrak{T}_\delta$ y $\mathfrak{T}_\rho$ asociadas a las métricas definidas en 1.15. Estudiar qué bolas cerradas son compactas.

Número 9. Caracterizar los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ con la topología de los rayos de la forma $(a, \rightarrow)$.

Número 10. Se considera en $\mathbb{R}$ la topología $\mathfrak{T}$ generada por los intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ junto con los intervalos abiertos de $\mathbb{Q}$ (es decir conjuntos de la forma $(a, b) \cap \mathbb{Q}$). Estudiar si el intervalo $[0, 1]$ es un compacto de $(\mathbb{R}, \mathfrak{T})$.

Número 11. En $\mathbb{R}^2$ se considera la topología cuyos abiertos no vacíos son los complementarios de los compactos usuales. Estudiar si el semiplano $x \geq 0$ es compacto. ¿Y todo el plano?

Número 12. Equipamos el conjunto $X = [0, 1] \cup \{2\}$ con la topología que coincide con la usual en $[0, 1]$, y tiene por base de entornos de 2 los conjuntos $(a, 1) \cup \{2\}$ con $0 < a < 1$. Estudiar si este espacio es compacto. Encontrar dos subconjuntos compactos cuya intersección no lo sea.

Número 13. Mostrar con un ejemplo que la adherencia de un conjunto compacto no tiene por qué serlo.

Número 14. (Lema del tubo) Sean $K \subset X$, $L \subset Y$ dos compactos en dos espacios topológicos X e Y. Demostrar que todo abierto $W \subset X \times Y$ que contiene a $K \times L$, contiene el producto $U \times V$ (un tubo) de dos abiertos U y V conteniendo respectivamente a K y a L.

Número 15. En $\mathbb{R}$ se considera la topología del número 5.15. Demostrar que con esta topología $\mathbb{R}$ es un espacio compacto homeomorfo a la unión de dos circunferencias tangentes en un punto.

Número 16. Se considera en $\mathbb{R}$ la topología usual. Demostrar que si un subconjunto $A \subset \mathbb{Q}$ tiene algún punto adherente irracional, entonces A no es compacto. Deducir que $\mathbb{Q}$ no es localmente compacto (con la topología usual).

Número 17. Demostrar el *Teorema de Baire*: "En un espacio localmente compacto y T_2, una intersección numerable de abiertos densos es densa a su vez".

Número 18. Un núumero real se dice *transcendente* si no es raíz de ningún polinomio (no nulo) con coeficientes racionales. Demostrar (aplicando el teorema de Baire) que el conjunto de números transcendentes es denso en $\mathbb{R}$ con la topología usual.

Número 19. Estudiar con qué topologías de las que han ido apareciendo en estos problemas es la recta $\mathbb{R}$ un espacio localmente compacto.

Número 20. Se equipa el plano $\mathbb{R}^2$ con la topología de 2.15 (resp. la de 5.18). Estudiar si es un espacio localmente compacto.

Número 21. Probar que si dos espacios localmente compactos y T_2 son homeomorfos, entonces lo son sus compactificaciones de Alexandroff. Mostrar, mediante un ejemplo, que el recíproco no es cierto.

Número 22. Calcular al compactificación de Alexandroff de $\mathbb{R}$ con la topología discreta (véase ejercicio 2.9)

Número 23. Se equipa el conjunto $X = (-1, 0) \cup (0, 1) \subset \mathbb{R}$ con la topología usual. Hallar su compactificación de Alexandroff.

Número 24. Encontrar todos los subconjuntos compactos del espacio $\mathbb{R}^2$ equipado con la topología del 5.10.

Número 25. Sea $\mathcal{T}$ la topología de la recta real $\mathbb{R}$ de 2.18. Mostrar que $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ no es compacto. ¿Es localmente compacto?

Número 26. Estudiar si el plano $\mathbb{R}^2$ con la topología $\mathcal{T}$ de 2.19 es un espacio localmente compacto.

Número 27. Un espacio topológico se dice *σ-compacto* si puede escribirse como la unión numerable de subespacios compactos. Dar ejemplos de tales espacios. Probar que todo σ-compacto es de Lindelöf.

Número 28. Dar un ejemplo de un subespacio no compacto del plano cuyas proyecciones sean compactas.

Número 29. Sea (X, d) un espacio métrico, $\emptyset \neq K \subset X$ un subespacio compacto y $\emptyset \neq F \subset X$ un cerrado. Mostrar que si $K \cap F = \emptyset$, entonces $d(K, F) > 0$.

Número 30. Probar que toda compactificación de $\mathbb{R}$ lo es de $\mathbb{Q}$.

Número 31. Un espacio topológico se dice que es un *continuo* si es compacto y conexo. Caracterizar los continuos de la recta real. Dar ejemplos de dos continuos en el plano no homeomorfos.