Hoja de problemas V. Teoría de Galois. 2018-2019

Ejercicio 1. *Denotamos por E el cuerpo de descomposición en $\mathbb{C}$ de $x^3 - 2$ sobre $\mathbb{Q}$. Encontrar un grupo de seis automorfismos de E con cuerpo fijo $\mathbb{Q}$ y demostrar que $|E : \mathbb{Q}| = 6$. Encontrar todos los subcuerpos de E.*

Ejercicio 2. *Sea $f(x) = x^4 - 3x^2 + 4 \in \mathbb{Q}[x]$. Calcular el grupo de Galois de f sobre $\mathbb{Q}$ y los cuerpos fijos por sus subgrupos.*

Ejercicio 3. *Consideremos $\xi = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ y sea ϕ el $\mathbb{Q}$-automorfismo de $\mathbb{Q}(\xi)$ dado por $\phi(\xi) = \xi^4$. Demostrar que el cuerpo fijo de ϕ es $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.*

Ejercicio 4. *Sea E el cuerpo de descomposición en $\mathbb{C}$ del polinomio x^4+1 sobre $\mathbb{Q}$. Demostrar que $|E : \mathbb{Q}| = 4$. Encontrar los automorfismos de E con cuerpos fijos $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ y $\mathbb{Q}(i)$. ¿Existe un automorfismo de E cuyo cuerpo fijo sea $\mathbb{Q}$?*

Ejercicio 5. *Sea $E = \mathbb{Q}(\xi)$ donde $\xi = e^{\frac{2\pi i}{7}}$. Demostrar que E es una extensión normal de $\mathbb{Q}$ y determinar su grupo de Galois. Encontrar todos los cuerpos intermedios de la extensión $E/\mathbb{Q}$, los subgrupos de $Gal(E/\mathbb{Q})$ que les corresponden y determinar cuáles de ellas son extensiónes normales de $\mathbb{Q}$.*

Ejercicio 6. *Sea ϕ un automorfismo del cuerpo E con cuerpo fijo el subcuerpo F. Supongamos que $f \in E[x]$ es mónico y se descompone en factores lineales en E. Demostrar que si siempre que $f(\alpha) = 0$ se tiene que $f(\phi(\alpha)) = 0$ para $\alpha \in E$, entonces $f \in F[x]$.*

Ejercicio 7. *Sea E una extensión normal de F con $\mathrm{Gal}(E/F)$ un grupo cíclico de orden n. Demostrar que las siguientes condiciones se cumplen:*

a) Para cada divisor d de n existe exactamente un cuerpo intermedio B con $|E : B| = d$.

b) Si B_1 y B_2 son dos cuerpos intermedios, entonces $B_1 \subseteq B_2$ si y sólo si $|E : B_1|$ divide a $|E : B_2|$.

Ejercicio 8. *Sea E/K una extensión de Galois, F/K una subextensión y $a \in F$. Probar que $F = K(a)$ si y sólo si los únicos elementos de $\mathrm{Gal}(E/K)$ que fijan a están en $Gal(E/F)$.*

Utilizando estos resultados probar que

1. $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, \sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5} + \sqrt{5})$;

2. El cuerpo de descomposición de $x^6 - 3x^3 + 2$ es $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2} + 2\sqrt{-3})$.

Ejercicio 9. *Sea $\alpha = \sqrt{2}+i$ y sea f el polinomio mínimo de α sobre $\mathbb{Q}$. Calcular el grupo de Galois de f sobre $\mathbb{Q}$. Calcular los cuerpos fijos por los subgrupos.*

Ejercicio 10. *Dado el polinomio $p(x) = x^6 - 3x^3 + 2$.*

(i) *Obtener el cuerpo de descomposición de $p(x)$ sobre $\mathbb{Q}$, llamémosle E.*

(ii) *Decidir justificadamente el grado de la extensión de cuerpos* $E/\mathbb{Q}$.

(iii) *Describir el grupo de Galois de la extensión* $E/\mathbb{Q}$.

(iv) *Encontrar todas las subextensiones intermedias de grado* 2 *sobre* $\mathbb{Q}$.

Ejercicio 11. *Dado el polinomio* $p(x) = x^4 - 2x^2 + 2$.

(i) *Obtener el cuerpo de descomposición de* $p(x)$ *sobre* $\mathbb{Q}$, *llamémosle* E.

(ii) *Decidir justificadamente el grado de la extensión de cuerpos* $E/\mathbb{Q}$.

(iii) *Describir el grupo de Galois de la extensión* $E/\mathbb{Q}$ *y decir a que grupo es isomorfo.*

(iv) *Encontrar todas las subextensiones intermedias de grado* 4 *sobre* $\mathbb{Q}$.

Ejercicio 12. *Sea* ξ *una raíz* 67*-ésima de unidad en* $\mathbb{C}$. *Demostrar que* $\mathbb{Q}(\xi) = \mathbb{Q}(\xi^2 + \xi^3)$.

Ejercicio 13. *Sea* f *un polinomio irreducible sobre* $\mathbb{Q}$ *con el grupo de Galois abeliano y* u *una raíz de* f *en* $\mathbb{C}$. *Demostrar que el grado de* f *es primo si y sólo si no hay extensiones intermedias entre* $\mathbb{Q}$ *y* $\mathbb{Q}(u)$.

Ejercicio 14. *Sea* ξ *una raíz* 11*-ésima primitiva de la unidad en* $\mathbb{C}$.

a. Construir la menor subextensión normal de $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$ *que contiene a* ξ. *La llamaremos* E.

b. Ver que el grupo de Galois de E/K *es cíclico. Encontrar un generador y expresar todos los automorfismos de* $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ *en función de este generador.*

c. ¿Cuántas subextensiones distintas de $\mathbb{Q}$ *y* $\mathbb{Q}(\xi)$ *tiene* $\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q}$*? ¿Qué grados tienen?*

d. Decidir cuáles de los siguientes cuerpos son subextensiones de $E/\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{11}),\ \mathbb{Q}(\sqrt{-11}),\ \mathbb{Q}(i),\ \mathbb{Q}(\sqrt[5]{5}).$$

e. Sea p *un primo impar y* ϕ *una raíz* p*-ésima primitiva de la unidad en* $\mathbb{C}$. *Sea* $M = \mathbb{Q}(\phi)$. *Demostrar que* $L/\mathbb{Q}$, *la única subextensión de* $M/\mathbb{Q}$ *de grado 2, es real (*$L \subseteq \mathbb{R}$*) si y sólo si* $p \equiv 1 \pmod 4$.

Ejercicio 15. *Sea* $f \in K[x]$ *un polinomio separable de grado 6 con grupo de Galois* $G =< \alpha >$ *cíclico y* $u_1, \cdots, u_6$ *sus raíces. Supongamos que* α *actúa de la siguiente forma sobre las raíces:*

$$\alpha(u_1) = u_3, \alpha(u_2) = u_4, \alpha(u_3) = u_5, \alpha(u_4) = u_2, \alpha(u_5) = u_1.$$

Demostrar que f *no es irreducible en* $K[x]$ *y calcular los grados des sus factores irreducibles.*

Ejercicio 16. *Sea* $F = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{3}, i)$.

a. Demostrar que $F/\mathbb{Q}$ *es una extensión de Galois y demostrar que su grupo de Galois es isomorfo al grupo diédrico de orden 12.*

b. Demostrar que F *es el cuerpo de descomposicón de* $x^3 + \sqrt{3}$ *sobre* $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

c. Encontrar un subcuerpo intermedio $\mathbb{Q} \subseteq E \subseteq F$ *tal que* $E/\mathbb{Q}$ *es una extensión de Galois de grado 6.*

Ejercicio 17. *Sea* F/K *es una extensión de Galois con grupo de Galois isomorfo al grupo de permutaciones de tres elementos.*

a. Demostrar que F *es el cuerpo de descomposición de un polinomio de grado* 3 *sobre* K.

b. Dar un contraejemplo que pruebe que el recíproco no es cierto.

Ejercicio 18. *Sea* $f \in K[x]$ *un polinomio irreducible,* F *su cuerpo de descomposición y* $a \in F$ *una raíz de* f.

a. Demostrar que si F/K *tiene grupo de Galois abeliano, entonces* $F = K(a)$.

b. ¿Es cierta la implicación inversa? Justificar la respuesta dando una demostración o un contraejemplo.

Ejercicio 19. *Sea* E *el cuerpo de descomposición de* $f(x) = x^p - 2$*, donde* p *es un primo. Demostrar que* $E = \mathbb{Q}(\alpha, \xi)$ *donde* $\xi^p = 1$, $\xi \neq 1$ *y* $\alpha^p = 2$. *Demostrar que* $|E : \mathbb{Q}| = p(p-1)$. *Si* $p = 5$*, calcular el grupo de Galois y los cuerpos fijos por los subgrupos.*

Ejercicio 20. *Supongamos que* E/K *es Galois con* $\mathrm{Gal}(E/K) \cong C_2 \times C_2$. *Probar que existen* $a, b \in E$ *tales que* $E = K(a, b)$ *con* $a^2, b^2 \in K$.

Ejercicio 21. *Construir extensiónes de* $\mathbb{Q}$ *con los siguientes grupos de Galois:*

$$C_2 \times C_2, C_4, \Sigma_3, D_8, D_{12}, D_{20}.$$

Ejercicio 22. *Sea* E *un cuerpo de descomposición sobre* K *de un polinomio irreducible* f. *Supongamos que el grupo de Galois de* E/K *es isomorfo al grupo quaternio* Q_8. *¿Que se puede decir sobre el grado de* f*?*

Ejercicio 23. *Sea* E/K *una extensión de Galois and* K_1 *and* K_2 *subextensiónes. Pongamos* $G = Gal(E/K)$.

1. Probar que el subgrupo $Gal(E/(K_1 \cap K_2)$ *de* G *es igual al subgrupo generado por* $Gal(E/K_1)$ *y* $Gal(E/K_2)$.

2. Sea K_3 *el ménor subcuerpo que contiene a* K_1 *y* K_2. *Probar que el subgrupo* $Gal(E/K_3)$ *de* G *es igual a la intersección de* $Gal(E/K_1)$ *y* $Gal(E/K_2)$.

3. Supongamos que K_1/K *y* K_2/K *es de Galois. Probar que* K_3 *es de Galois. Demostrar que* $Gal(K_3/K_1) \cong Gal(K_2/(K_1 \cap K_2))$.

Ejercicio 24. *Sea L el cuerpo de descomposición de $x^8 - 2$ en $\mathbb{C}$.*

(i) *Calcula $|L : \mathbb{Q}|$.*

(ii) *Demuestra que $Gal(L/\mathbb{Q})$ es isomorfo a $G = \langle \tau, \sigma | \ \sigma^8 = \tau^2 = 1, \tau\sigma\tau = \sigma^3 \rangle$.*

(iii) *Calcula todas las subextensiones de $L/\mathbb{Q}$ de grado 8.*

(iv) *Calcula los subcuerpos de L fijos por los subgrupos de $Gal(L/\mathbb{Q})$ de orden 8.*

Ejercicio 25. *Sea E/K una extensin finita y sea L/K una subextensión normal de E/K. Sean $\alpha, \beta \in E$ dos races de un polinomio irreducible $p(x)$ sobre K. Demostrar que $|L(\alpha) : L| = |L(\beta) : L|$.*

Ejercicio 26. *Sea $p(x) = x^9 - 1 \in \mathbb{Q}[x]$.*

(i) *Encuentra el cuerpo de descomposicin E de p sobre $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{C}$.*

(ii) *Cálcula el grupo de Galois G de $E/\mathbb{Q}$.*

(iii) *Cálcula el retículo de los subgrupos de G, y el correspondiente retículo de cuerpos intermedios.*

(iv) *Di qué cuerpos intermedios F de $E/\mathbb{Q}$ son extensiones de Galois sobre $\mathbb{Q}$ y para aquellos que lo sean di a qu cociente es isomorfo* $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$.

Ejercicio 27. *Sea ξ_{44} una raz primitiva 44-ésima de 1. Calcular todas las subextensiones de $\mathbb{Q}(\xi_{44})$ de grado 2.*

Ejercicio 28. ✠*(Dedekind) Sea K un cuerpo y sean $\tau_1, \ldots, \tau_n$ automorfismos distintos de K. Entonces $\tau_1, \ldots, \tau_n$ son K-linealmente independientes.*