OBSERVACIÓN: En algunos lugares de esta hoja se confunden, por comodidad, los espacios $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$, una confusión que el contexto aclarará en cada caso.

1. Para cada $a \in \mathbb{R}$ consideramos los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$:

$$V(a) = \left\langle \begin{bmatrix} 1\\0\\1\\0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1\\2\\5\\2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -a\\2\\4-a\\5 \end{bmatrix} \right\rangle \quad , \quad W(a) = \left\langle \begin{bmatrix} -1\\2\\a\\0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2\\2\\6\\2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\2\\4\\5 \end{bmatrix} \right\rangle .$$

Halla, en función del parámetro a, la dimensión de $V(a)+W(a)$, una base de $V(a)\cap W(a)$ y un complementario de $V(a)\cap W(a)$ en $\mathbb{R}^4$.

2. Para cada $a \in \mathbb{R}$ sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, donde A es la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & a \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 6 & 2 \end{pmatrix} .$$

a) Halla, en función de a, una base de $\operatorname{Im} f$ y una base de $\ker f$.

b) Comprueba que, para todos los valores de a, se cumple:

$$\dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\ker f) = \dim\big(\text{dominio de } f\big).$$

3. Para el espacio vectorial $\mathbb{V}$ de las matrices reales simétricas 2×2, consideramos la siguiente base:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} .$$

a) Comprueba que $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ dada por $f(M) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - M$ es lineal y halla la matriz A de f respecto de $\mathcal{B}$ en salida y en llegada (atención: A es 3×3).

b) Utiliza A para hallar una base de $\operatorname{Im} f$ y una base de $\ker f$ (atención: estas bases tienen que ser conjuntos de matrices simétricas 2×2).

c) Comprueba que $\dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\ker f) = \dim\big(\text{dominio de } f\big)$.

4. Sea $\mathbb{R}[x]_{\le 1}$ el espacio vectorial $\{\varphi \equiv a + bx \;:\; a, b \in \mathbb{R}\}$ de los polinomios reales de grado ≤ 1.

a) Demuestra que se pueden definir dos aplicaciones $F, G : \mathbb{R}[x]_{\le 1} \to \mathbb{R}[x]_{\le 1}$ por las siguientes fórmulas:

$$F(\varphi) = (1+3x)\,\varphi + (1-3x^2)\,\varphi' \quad , \quad G(\varphi) = (6+3x)\,\varphi + (1-3x^2)\,\varphi' .$$

b) Comprueba que F y G son lineales y halla sus matrices respecto de la base $\{1, x\}$, tanto en salida como en llegada.

c) Utiliza el resultado de b) para demostrar rápidamente que $G = \frac{3}{4}F^4 - F^3 - 5F$, es decir

$$G = \frac{3}{4}\, F\circ F\circ F\circ F - F\circ F\circ F - 5\,F.$$

5. Sea $\mathbb{R}[x]_{\le 2}$ el espacio vectorial $\{\varphi \equiv a + bx + cx^2 \;:\; a, b, c \in \mathbb{R}\}$ de los polinomios reales de grado ≤ 2. Definimos una aplicación $F : \mathbb{R}[x]_{\le 2} \to \mathbb{R}[x]_{\le 2}$ por la fórmula $F(\varphi) = 2\,\varphi - (x+1)\,\varphi'$.

a) Comprueba que F está bien definida y es lineal.

b) Halla la matriz A de F respecto de la base $\{2+x, 3x, x^2\}$ en salida y la base $\{1, x, x^2\}$ en llegada.

c) Utiliza A para hallar una base de $\operatorname{Im} F$ y una base de $\ker F$ (atención: estas bases tienen que ser conjuntos de polinomios). Comprueba que $\dim(\operatorname{Im} F) + \dim(\ker F) = \dim\big(\text{dominio de } F\big)$.

6. Para cada $a \in \mathbb{R}$ se define la aplicación $f_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ como $f_a(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} a \\ 3 \end{bmatrix} \mathbf{v}^t + \mathbf{v}\,[1 \;\; 3a]$.

a) Comprueba que f_a es lineal y halla su matriz respecto de las bases estándar de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

b) Utiliza el resultado de a) para determinar los valores de a para los que f_a es inyectiva.

7. Para cada $a \in \mathbb{R}$ definimos la aplicación lineal $g_a : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ como $g_a(\mathbf{x}) = A_a\mathbf{x}$, siendo

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2a \\ 3 & 4+a & 3a & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5+a \end{pmatrix}.$$

Determina los valores de a para los que g_a es suprayectiva.

8. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{x}$.

a) ¿Por qué es $(f \circ f)(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}\mathbf{x}$?

b) Halla la matriz A de f respecto de la base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ en salida y la base estándar en llegada.

c) Halla la matriz B de $f^2 = f \circ f$ respecto de $\mathcal{B}$ en salida y la base estándar en llegada.

d) Explica por qué $B \neq A^2$.

9. Para cada $a \in \mathbb{R}$ definimos $T_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $T_a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

a) Halla la matriz A_a de T_a respecto de la base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ en salida y la base estándar en llegada.

b) Halla la matriz B_a de T_a respecto de la base estándar en salida y la base $\mathcal{B}$ en llegada.

c) Comprueba que A_a y B_a no son inversas la una de la otra, excepto si $a = -1/3$. Explica este fenómeno (indicación: para todo a calcula la compuesta $T_a \circ T_a$).