ÁLGEBRA LINEAL

Hoja 3: Espacios Vectoriales. Subespacios vectoriales, ecuaciones, y operaciones con subespacios.

1. Calcula la dimensión y una base de W_1, W_2, W_1+W_2 y $W_1 \cap W_2$. Decide si W_2 es un complementario de W_1 y comprueba que se verifica la fórmula de Grassmann en cada uno de los siguientes casos:

(a) $W_1 = \{(x,y,z,t,u) \in \mathbb{R}^5 \mid x+y+2z+2u=0,\ 3y+3z-t+2u=0\} \subset \mathbb{R}^5$;
$W_2 = \{(x,y,z,t,u) \in \mathbb{R}^5 \mid 2x-y+t=0,\ 3x-z+t-4u=0\} \subset \mathbb{R}^5$.

(b) $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\Big|\, a+d=0 \right\} \subset M_2(\mathbb{C})$;
$W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 1/2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1/2 \\ -3/2 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}} \subset M_2(\mathbb{C})$.

2. Sea $W = \langle (1,2,-1) \rangle \subset \mathbb{R}^3$. Describe W como el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

3. Demuestra que $\mathbb{R}^3 = \langle (1,1,0) \rangle_{\mathbb{R}} \oplus \langle (1,0,1),(1,1,1),(2,1,2) \rangle_{\mathbb{R}}$.

4. Encuentra todos los vectores $v \in \mathbb{R}^3$ tales que $\mathbb{R}^3 = \langle (1,-1,1),(0,2,-2) \rangle_{\mathbb{R}} \oplus \langle v \rangle_{\mathbb{R}}$.

5. Demuestra que los siguientes subespacios vectoriales se pueden describir como el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

(a) $V_1 = \{A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) : A = A^t\}$.

(b) $V_2 = \{A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) : A$ es diagonal $\}$.

6. Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por $(1,2,-5,3)$ y $(2,-1,4,7)$. Da ecuaciones que describan W.

7. Consideremos en $\mathbb{R}^4$ los subespacios vectoriales $W_1 = < v_1, v_2, v_3 >$ y $W_2 = < v_4, v_5 >$ con

$$v_1 = (1,-2,-1,3),\ v_2 = (0,2,1,-1),\ v_3 = (-2,6,3,-7),\ v_4 = (1,2,1,1),\ v_5 = (2,0,-1,1).$$

Da ecuaciones que determinen W_1, W_2, W_1+W_2 y $W_1 \cap W_2$.

8. Sea $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}[x] = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 : a_0,a_1,a_2,a_3 \in \mathbb{R}\}$, y considera el subespacio $W = \{(a-b) + 2ax + bx^2 + (a+2b)x^3 : a,b \in \mathbb{R}\}$. Da ecuaciones para W y para un complementario.

9. Sea $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}[x] = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 : a_0,a_1,a_2 \in \mathbb{R}\}$. Demuestra que el conjunto $B = \{1-x, x+x^2, x^2\}$ es una base de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$[x]. Calcula las coordenadas de los vectores $1, x, x^2$ respecto a la base B.

10. Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^4$ definido por

$$W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y=0\,,\ z+t=0\}.$$

Calcula una base del espacio vectorial cociente $\mathbb{R}^4/W$ y encuentra las coordenadas de los vectores

$$[(2,-2,0,0)] \quad \text{y} \quad [(3,4,0,0)] \in \mathbb{R}^4/W$$

en dicha base.

10. Sea W el subespacio vectorial de $M_{2\times 3}(\mathbb{Q})$ definido por

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{Q}) \;\middle|\; \begin{array}{c} a+b=0 \\ a'+b'=0 \\ c+c'=0 \end{array} \right\}.$$

Encuentra una base de $M_{2\times 3}(\mathbb{Q})/W$ y las coordenadas del vector $[v]$, con $v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, respecto a dicha base.