Hoja 2: Espacios y subespacios vectoriales

Utilizaremos la notación $\mathbb{K}$ para indicar un cuerpo cualquiera.

1. Decide si los siguientes conjuntos son espacios vectoriales sobre los cuerpos especificados:

(a) El conjunto $\mathbb{K}[x]$ de los polinomios con coeficientes en un cuerpo $\mathbb{K}$, sobre $\mathbb{K}$.

(b) El conjunto $\mathbb{K}[x]_{\leq n}$ de los polinomios de orden menor o igual que n, sobre $\mathbb{K}$.

(c) Los reales $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$.

(d) Los complejos $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$, y sobre $\mathbb{Q}$.

(e) El conjunto de funciones $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f$ es una función continua$\}$ sobre $\mathbb{R}$.

(f) El conjunto de funciones $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f$ es una función derivable$\}$ sobre $\mathbb{R}$.

(g) El conjunto $\{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}$ sobre $\mathbb{R}$.

(h) El conjunto $\{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q}) : \det(A) = 0\}$ sobre $\mathbb{Q}$.

(i) El conjunto de las sucesiones de Cauchy de números reales, sobre $\mathbb{R}$.

(j) El conjunto de funciones $\{\alpha \sin(x) + \beta \cos(x) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, sobre $\mathbb{R}$.

2. Para las siguientes parejas V, W, formadas por un espacio vectorial V y un subconjunto $W \subset V$, dí razonadamente si W es o no es subespacio vectorial de V.

$V = \mathbb{R}^2\ ,\ W = \{\, \mathbf{x}\ :\ x_2 = 2x_1 \,\}$.
$V = \mathbb{R}^2\ ,\ W = \{\, \mathbf{x}\ :\ x_2 = x_1^2 \,\}$.
$V = \mathbb{R}^2\ ,\ W = \{\, \mathbf{x}\ :\ x_2 = 2x_1 - 3 \,\}$.
$V = \mathbb{R}^3\ ,\ W = \{\, \mathbf{x}\ :\ x_2 = 0 \,\}$.
$V = \mathbb{R}^3\ ,\ W = \{\, \mathbf{x}\ :\ x_1 x_2 = 0 \,\}$.
$V = \mathbb{R}^2\ ,\ W = \{\, \mathbf{x}\ :\ x_1^2 + x_2^2 = 2x_1 x_2 \,\}$.
$V = \mathbb{R}^2\ ,\ W = \{\, \mathbf{x}\ :\ x_2 > 0 \,\}$.
$V = \mathrm{M}_n(\mathbb{K})\ ,\ W = \{A \in V\ :\ A\ \text{ es simétrica}\ \}$.
$V = \mathrm{M}_n(\mathbb{K})\ ,\ W = \{A \in V\ :\ A\ \text{ es invertible}\ \}$.
$V = \mathrm{M}_2(\mathbb{K})\ ,\ W = \{A \in V\ :\ \det A = 0\,\}$.
$V = \mathrm{M}_{n\times 2}(\mathbb{R})\ ,\ W = \left\{ A \in V\ :\ A \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}_{n\times 1} \right\}$.
$V = \{\text{funciones } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}\ ,\ W = \{f\ :\ f\ \text{ es creciente}\ \}$.
$V = \{\text{funciones } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}\ ,\ W = \{f\ :\ f(7) = 0\ \}$.
$V = \{\text{funciones } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}\ ,\ W = \{f\ :\ f''(x)\ \text{ existe y }\ f''(x) \equiv x f(x)\ \}$.
$V = \mathbb{R}[x]\ ,\ W = \{\, p(x)\ :\ p(x)\ \text{ es divisible por } x - 2 \,\}$.
$V = \mathbb{R}[x]\ ,\ W = \{\, p(x)\ :\ p(2) = 0 \,\}$.
$V = \mathbb{R}[x]\ ,\ W = \{\, p(x)\ :\ p(0) = 2 \,\}$.
$V = \mathbb{R}[x]\ ,\ W = \{\, p(x)\ :\ p(x)\ \text{ es divisible por } 1 + x^2 \,\}$.

3. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$.

(a) Demuestra que el elemento neutro de la suma en V es único. Lo llamamos *vector nulo*. Lo denotamos por $\mathbf{0}$ en los documentos impresos y por $\vec{0}$ cuando escribimos a mano.

(b) Demuestra que el opuesto de cada vector $v \in V$ es único. Lo denotamos por $-v$.

(c) Si denotamos por 0 al elemento neutro de la suma en $\mathbb{K}$, demuestra que para todo $v \in V$ es $0\,v = \vec{0}$.

(d) Si denotamos por 1 al elemento neutro del producto en $\mathbb{K}$, y por -1 a su opuesto, demuestra que para todo $v \in V$ se tiene que $(-1)\,v = -v$.

(e) Demuestra que para todo $a \in \mathbb{K}$ y todo $v \in V$ es $-(av) = (-a)v = a(-v)$.

4. (a). Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $W \subseteq V$ un subconjunto *no vacío* de V. Demuestra que las tres condiciones siguientes son equivalentes:

1. W es un subespacio vectorial de V.
2. Para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y cualesquiera $u, v \in W$, se tiene que $\alpha u + \beta v \in W$.
3. Para cualesquiera $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \mathbb{K}$ y cualesquiera $v_1 \ldots, v_s \in W$, se tiene que $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_s v_s \in W$.

(b). Si V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $\{W_i\}_{i \in I}$ es una colección de subespacios vectoriales de V, demuestra que $W = \bigcap_{i \in I} W_i$ es de nuevo un subespacio vectorial de V (no olvides demostrar que $W \neq \varnothing$).

5. Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por $(1, 2, -5, 3)$ y $(2, -1, 4, 7)$. Se pide

(a) Determina si el vector $(0, 0, -37, -3)$ pertenece a W o no.

(b) Determina para qué valores de α y β el vector $(\alpha, \beta, -37, -3)$ pertenece a W.

6. Queremos decidir, razonadamente, si los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$ son iguales o no:

$$\left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \quad \text{y} \quad \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \\ \lambda \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Hazlo primero para $\lambda = 2$ y luego para $\lambda = -2$.

7. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$.

(a) Hay una lista *de un solo vector* que es linealmente dependiente ¿cuál es?

(b) Dados $v_1, v_2 \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$, demuestra que las tres condiciones siguientes son equivalentes:

1. La lista v_1, v_2 es linealmente dependiente.
2. Existe un escalar $a \in \mathbb{K}$ tal que $v_2 = a v_1$.
3. Existe un escalar $b \in \mathbb{K}$ tal que $v_1 = b v_2$.

8. A continuación se dan dos listas formadas por un espacio vectorial V, varios vectores de V, y un vector más de V separado del resto de la lista por un punto y coma. Se pide:

(a) Determinar si los vectores separados por comas son linealmente independientes o no.

(b) Determinar si el último vector es o no combinación lineal de los otros. Caso de serlo, halla *todas* las combinaciones lineales de los otros que lo dan por resultado.

- $M_2(\mathbb{R})$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}.$
- $M_2(\mathbb{R})$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$
- $\mathbb{R}[x]$, $x(x-1)$, $x(x-2)$, $(x-1)(x-2)$, $x-1$; $3 + 2x^2$.

9. Construye una base de $\mathbb{R}^4$ que contenga a los vectores $(2, -2, 3, 1)$ y $(-1, 4, -6, -2)$.

10. Demuestra que si V es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ entonces se da *una* de las siguientes posibilidades:

(a) $V = \{\mathbf{0}\}$,

(b) V es una recta que pasa por el origen,

(c) V es un plano que pasa por el origen,

(d) $V = \mathbb{R}^3$.