Hoja 3

Decimos **curva espacial** para referirnos a cualquier curva en $\mathbb{R}^3$.
Una curva espacial α es **birregular** si su vector curvatura $\mathbf{k}$ es distinto de $\mathbf{0}$ en cada punto de α. Esto permite definir la **normal** $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\|\mathbf{k}\|$ y la **binormal** $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$.
Si $\alpha(t)$ es cualquier parametrización regular (no necesariamente por longitud de arco) entonces la curva es birregular si y sólo si $\alpha'(y)$ y $\alpha''(t)$ son linealmente independientes para todo t.

Nota: Saber hacer los ejercicios marcados con un asterisco es fundamental para la correcta comprensin del material.

---

1. (*) Sea $\alpha(t)$ un camino regular (no necesariamente birregular) en el espacio. Demuestra que α está contenido en una esfera de centro el punto $\mathbf{p}_0$ si y sólo si los planos normales afines de α pasan todos por $\mathbf{p}_0$.

2. (*) Sean a, b, c constantes con $c^2 = a^2 + b^2$ y $c > 0$. Consideramos la **hélice circular:**
$$\alpha(s) \;=\; \left(a\cos\frac{s}{c}\ ,\ a\,\mathrm{sen}\,\frac{s}{c}\ ,\ b\,\frac{s}{c} \right)\ .$$
   (a) Demuestra que $\alpha(s)$ es parametrización por longitud de arco.
   (b) Halla el plano osculador, la curvatura y la torsión de α.
   (c) Comprueba que las tangentes de α forman un ángulo constante con el eje z.
   (d) Comprueba que las normales de α forman ángulo recto con el eje z.

3. (*) Se dice que una curva en $\mathbb{R}^3$ es una **hélice generalizada** si es regular y forma un ángulo constante, no nulo, con una dirección fija (llamada *eje de hélice*). Demuestra que las hélices generalizadas con eje de hélice vertical admiten parametrizaciones de la forma:
$$\gamma(t) \;=\; \big(x(t)\,,\ y(t)\,,\ c_0 + c_1 t \big)\ ,$$
siendo $\gamma_0(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ una curva plana parametrizada por longitud de arco y c_0, c_1 constantes. Demuestra que γ es birregular si y sólo si lo es γ_0.

4. Sea $\alpha(s)$ curva birregular parametrizada por longitud de arco, con curvatura k y torsión τ. Definimos una nueva curva paramétrica β mediante $\beta(s) = \mathbf{t}_\alpha(s)$. Comprueba que β es parametrización regular ¿es una parametrización por longitud de arco?
   Demuestra que $\mathbf{k}_\beta = \dfrac{\tau}{k}\,\mathbf{b}_\alpha - \mathbf{t}_\alpha$. (**Indicación:** calcula $\beta'(s)$ y $\beta''(s)/\|\beta'(s)\|$).

5. Sea $\alpha(s)$ una curva birregular parametrizada por longitud de arco. Definimos una nueva parametrización $\beta(\tilde{s}) = \alpha(-\tilde{s})$. Halla el triedro de Frenet, curvatura y torsión de β a partir de los de α.

6. (*) Sea α curva birregular en el espacio. Demuestra que si todos los planos osculadores afines de α pasan por un mismo punto entonces α es plana.

7. (*) Sea α una curva espacial birregular cuyas normales afines pasan todas por un mismo punto. Demuestra que α está contenida en una circunferencia.

8. (*) Dada una curva espacial birregular ¿pueden pasar todas sus binormales afines por un mismo punto?

9. Demuestra que, dadas constantes cualesquiera k_0, τ_0 con $k_0 > 0$, hay una hélice circular (ejercicio 2) que las realiza como curvatura y torsión. Deduce que una curva birregular está contenida en una hélice circular si y sólo si su curvatura y su torsión son constantes.

10. Sea α curva espacial birregular y supongamos que es, además, una hélice generalizada (ver ejercicio 3). Demuestra que las normales de α son perpendiculares al eje de hélice.

11. (*) **(Teorema de Lancret).** Sea α una curva birregular con curvatura k y torsión τ. Demuestra que las condiciones siguientes son equivalentes:

    (a) α es una hélice generalizada (ver ejercicio 3).

    (b) El vector $\mathbf{t}_\alpha$ traza una circunferencia en el espacio.

    (c) El cociente τ/k es constante.

    Indicación: el eje de hélice coincidirá con el de la circunferencia trazada por $\mathbf{t}_\alpha$.

12. Sean $\alpha(t), \beta(t) : J \to \mathbb{R}^3$ dos curvas birregulares que utilizan el mismo parámetro (no necesariamente la longitud de arco). Suponiendo que cumplen las identidades:

$$k_\alpha(t) = k_\beta(t) \quad , \quad \tau_\alpha(t) = \tau_\beta(t) \quad , \quad \|\alpha'(t)\| = \|\beta'(t)\| \, ,$$

demuestra que existe un movimiento directo $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\beta(t) = \varphi \circ \alpha(t)$.