MODELADO Y SIMULACIÓN INTRODUCCIÓN

Eduardo Martínez

- 1 Sistemas Dinámicos y Modelos Matemáticos
- 2 Principios de la Teoría General de Sistemas
- 3 Modelos Continuos y Discretos

Sistemas Dinámicos

- Definición de Sistema
  - Un Sistema es una disposición delimitada de entidades interactuantes.
    - Disposición: define la Estructura del Sistema.
    - Delimitación: las acciones del resto del universo sobre el sistema se reemplazan por entradas.
    - Entidades interactuantes: son los componentes del sistema: procesos, elementos, subsistemas, etc.
- Definición de Sistema Dinámico
  - Un Sistema Dinámico es un Sistema en el cual hay almacenamiento de energía, materia o información; es decir, un Sistema Dinámico es un sistema con memoria.

Modelos Matemáticos

Por cuestiones de costo, riesgo o imposibilidad (si el sistema todavía no existe por ejemplo), en muchas ocasiones no se puede experimentar sobre los sistemas reales. En estos casos se recurre a la experimentación sobre **Modelos** del sistema.

Definición de Modelo

Un Modelo es una *representación simplificada* de un Sistema que permite responder interrogantes sobre este último sin recurrir a la experimentación sobre dicho sistema.

Definición de Modelo Matemático

Conjunto de expresiones matemáticas que describen las relaciones existentes entre las magnitudes que caracterizan al sistema.

Variables y parámetros

- Las magnitudes que caracterizan y rigen la evolución de un sistema se denominan variables y parámetros.
  - Los parámetros son magnitudes constantes (o que varían lentamente, independientes de lo que ocurre en el sistema). Ej: masa, resistencia eléctrica, etc.
  - Las variables son magnitudes que cambian con el tiempo. Entre ellas encontramos:
    - *Variables fundamentales*: tiempo (t) y espacio (x, y, z). Son independientes de la evolución del sistema.
    - *Entradas*: representan la acción del resto del universo sobre el sistema. Son independientes de la evolución del mismo.
    - *Variables dependientes*: representan la magnitudes que cambian en función de la evolución del sistema.
    - *Salidas*: Son variables dependientes que nos interesan y que podemos observar.

- 1 Sistemas Dinámicos y Modelos Matemáticos
- 2 Principios de la Teoría General de Sistemas
- 3 Modelos Continuos y Discretos

Teoría General de Sistemas

La Teoría General de Sistemas estudia las propiedades generales de los Sistemas Dinámicos y de sus modelos matemáticos.

Entre otros problemas, la Teoría General de Sistemas estudia y define:

- Clasificación de Modelos Matemáticos
- Modelado de Sistemas
- Control de Sistemas
- Simulación de Modelos

Modelado y Simulación

Modelado

Es el proceso de obtención de modelos matemáticos.

Dos caminos posibles:

- A partir de principios analíticos y/o físicos.
- Mediante experimentación (identificación)

Simulación

Es la experimentación sobre un modelo matemático de un sistema, generalmente implementado en una computadora.

- La simulación de un sistema, además del modelado, suele requerir la utilización de técnicas de aproximación *(métodos numéricos de integración, por ejemplo).*

Clasificación de Modelos Matemáticos

Los modelos se pueden clasificar de distintas formas. Una de ellas es en función de la manera en que las variables evolucionan en el tiempo.

- Tiempo Continuo: Las variables evolucionan continuamente en el tiempo. Generalmente se representan mediante ecuaciones diferenciales.

- Tiempo Discreto: Las variables sólo pueden cambiar en determinados instantes de tiempo. Se suelen representar mediante ecuaciones en diferencias.

- Eventos Discretos: Las variables pueden cambiar en cualquier momento, pero sólo puede haber números finitos de cambios en intervalos de tiempo finitos.

- 1 Sistemas Dinámicos y Modelos Matemáticos
- 2 Principios de la Teoría General de Sistemas
- 3 Modelos Continuos y Discretos

Modelos de Tiempo Continuo

Hay dos grandes categorías:

- Modelos de Parámetros Concentrados, que se representan mediante Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l}\sin(\theta(t)) = 0 \quad (\textit{péndulo sin rozamiento})$$

- Modelos de Parámetros Distribuidos, que se representan mediante Ecuaciones en Derivadas Parciales

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \quad (\textit{difusión del calor})$$

Modelos de Tiempo Discreto

- Los modelos de tiempo discreto se representan generalmente como ecuaciones en diferencias.

$$N(t_{K+1}) = \lambda . N(t_K) . e^{-aP(t_K)}$$
$$P(t_{K+1}) = N(t_K) . (1 - e^{-aP(t_K)}) \qquad (Nicholson - Bailey)$$

- Los instantes de tiempo en los cuales hay cambios en las variables se denotan t_0, t_1, . . . , t_k , ... La distancia $(t_{k+1}) - t_k$ se denomina <u>paso</u> y suele ser constante.

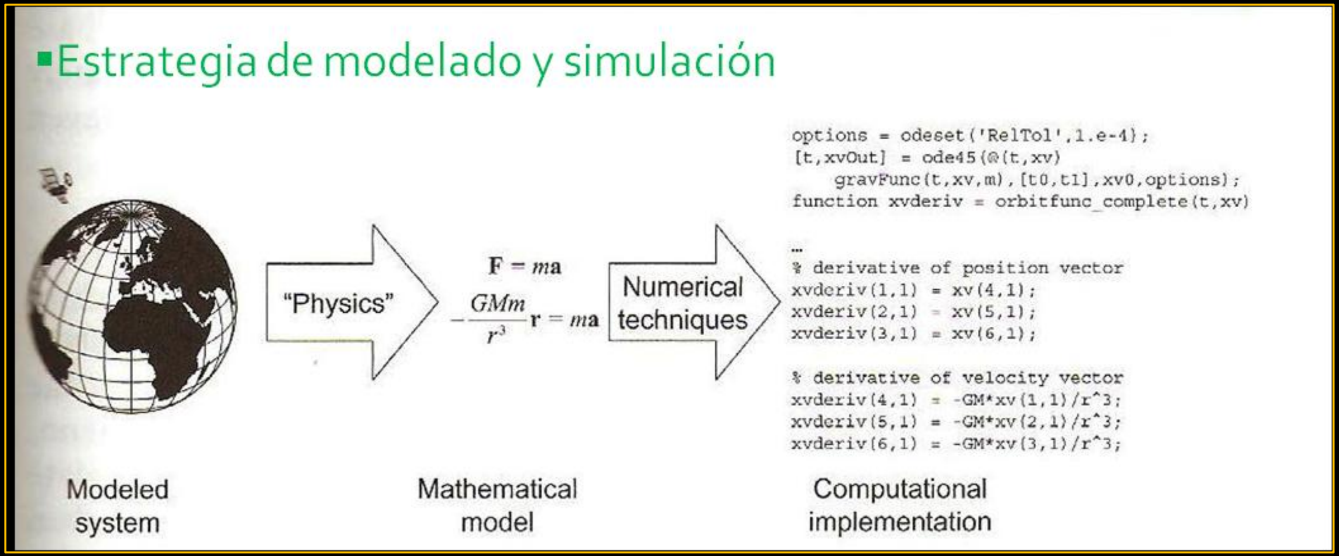
Modelos de Eventos Discretos

Consideremos el siguiente ejemplo: un sistema, que posee un sensor detecta cada vez que entra o sale una persona de una habitación y registra el número de personas dentro de la misma. El número de personas se imprime en un panel cada vez que se modifica.

- Cada vez que entra o sale una persona, ocurre un evento de entrada.
- Al imprimirse el número en el panel, ocurre un evento de salida.
- El número de personas dentro de la habitación representa el estado del sistema.

Este tipo de modelos no tiene un formalismo de representación unificado.

Sistemas continuos: M y S



clases de modelos continuos

Name	Some Uses	Formula
First-order ordinary	Predator–prey models (others)	$\dot{x} = xf(x,y)$ $\dot{y} = yg(x,y)$
Second-order ordinary	Orbits Oscillators Ballistics (many, many more)	$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$
	RLC circuits	$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = V(t)$
Second-order partial (not covered herein)	Water waves Sound waves Electromagnetic radiation Heat transfer Chemical diffusion Schrödinger's equation	$\nabla^2 f = \frac{1}{D}\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ $i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi$ etc.

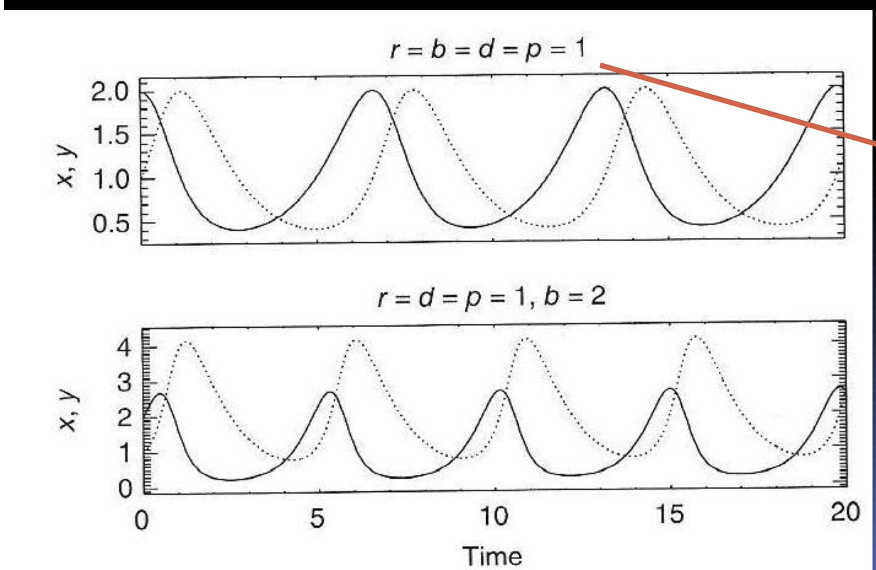
Sistemas continuos: modelos

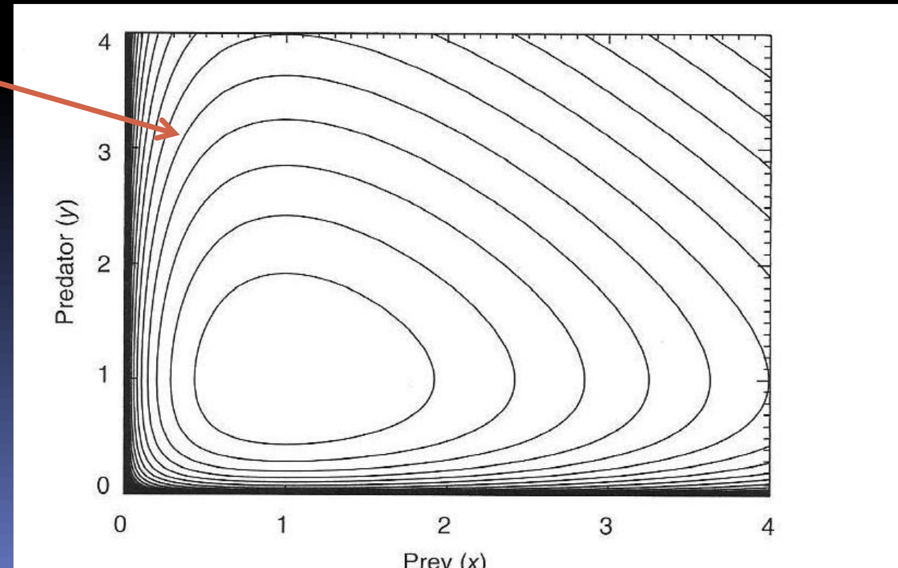
Modelo presa-depredador (Lotka-Volterra)

$$\dot{x} = x \cdot f(x,y) \qquad f = b - py$$

$$\dot{y} = x \cdot g(x,y) \qquad g = rx - d$$

$$C = b \ln y - py - rx + d \ln x$$



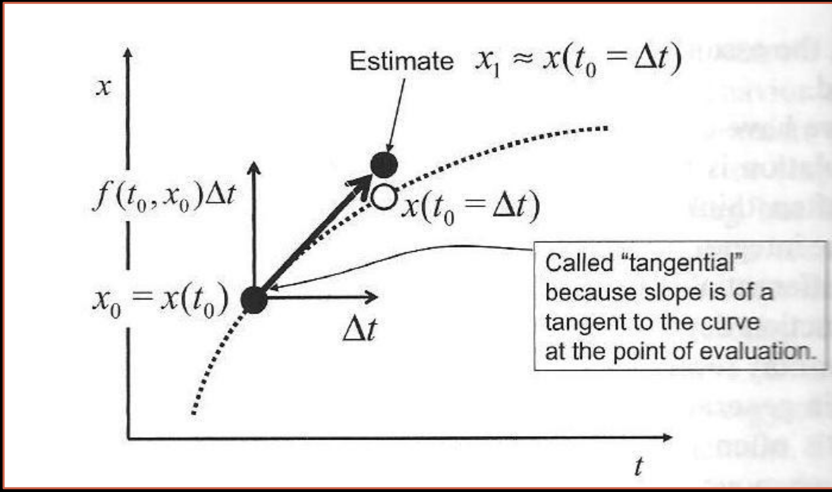


x=2, (presa, sólida); *y=1*, (depred., puntos)

Sistemas continuos: simulación

Soluciones numéricas.

A. Método de Euler



- $y' = f(t,y)$ en $[a,b]$ con $y(t_o) = y_o$
- dividimos $[a,b]$ en M subintervalos iguales $t_k = a + kh$

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}$$

$$y(t+\Delta t) \approx y(t) + \left.\frac{dy}{dt}\right|_{y,t} * \Delta t \approx y(t) + f(y,t)\Delta t$$

- $t_{k+1} - t_k = h = \Delta t$ $\qquad y_{k+1} = y_k + f(y_k, t_k)\,\Delta t \qquad$ *para* $k = 0, 1, \ldots, M-1$

Sistemas continuos: simulación

B. Método de Runge-Kutta

- *$y'=f(t,y)$* en *$[a,b]$* con *$y(t_o)=y_o$*

$$y(t)=y(t_0)+\frac{y'(t_0)}{1!}*(t-t_0)+\frac{y''(t_0)}{2!}*(t-t_0)^2+\ldots+\frac{y^{(n)}(t_0)}{n!}*(t-t_0)^n$$

Si tomamos $\Delta t=t-t_o$

$$y(t_0+\Delta t)=y(t_0)+\frac{y'(t_0)}{1!}*(\Delta t)+\frac{y''(t_0)}{2!}*(\Delta t)^2+\ldots+\frac{y^{(n)}(t_0)}{n!}*(\Delta t)^n$$

Sistemas continuos: simulación

B. Método de Runge-Kutta de 2º orden

Si hacemos el desarrollo hasta el término de 2º orden y calculamos $y''(t_0)$

$$y(t_0+\Delta t) \approx y(t_0) + (f(t_0, y_0) + f(t_0+\Delta t, y_0+\Delta t * f(t_0, y_0))) * \frac{\Delta t}{2}$$

que se suele presentar así:

$$y(t_0+\Delta t) = y(t_0) + \frac{1}{2}(u_1+u_2) \quad donde$$

$$u_1 = \Delta t * f(t_0, y_0) \quad y$$

$$u_2 = \Delta t * f(t_0+\Delta t, y_0+u_1)$$

Sistemas continuos: simulación

B2. Método de Runge-Kutta de 4º orden

$$y(t_0+\Delta t) = y(t_0) + \frac{1}{6}(v_1 + 2v_2 + 2v_3 + v_4) \quad donde$$

$$v_1 = \Delta t * f(t_0, y_0)$$

$$v_2 = \Delta t * f(t_0 + \frac{\Delta t}{2}, y_0 + \frac{v_1}{2})$$

$$v_3 = \Delta t * f(t_0 + \frac{\Delta t}{2}, y_0 + \frac{v_2}{2})$$

$$v_4 = \Delta t * f(t_0 + \Delta t, y_0 + v_3)$$

- *RK de 4º orden es el método más utilizado hoy en día para resolver EDO's*