1 Estructuras diferenciables

Llamamos **espacios numéricos** a los $\mathbb{R}^n$ con la estructura estándar de espacio vectorial. Como caso extremo, definimos $\mathbb{R}^0 = \{0\}$. Un **vector numérico** es cualquier elemento de uno de esos espacios numéricos. Un **conjunto numérico** es un subconjunto de algún $\mathbb{R}^n$. Un **abierto numérico** es cualquier abierto de la topología estándar de un $\mathbb{R}^n$.
Una **función numérica** es la que va de un abierto de $\mathbb{R}^k$ a un abierto de $\mathbb{R}^h$. A estos objetos los llamaremos a veces "fórmulas en k variables", hablando de una **fórmula escalar** si $h = 1$ o de una **fórmula vectorial** si $h > 1$.
El adjetivo **suave** será, en todo caso, sinónimo de $\mathcal{C}^\infty$. Un **difeomorfismo numérico** es una biyección entre dos abiertos de $\mathbb{R}^n$ tal que tanto ella como su inversa son suaves.

En este capítulo explicamos cómo se puede poner una *estructura diferenciable* en un conjunto no vacío M. El procedimiento consiste en establecer *coordenadas* (que en Cálculo y en Geometría de Curvas y Superficies han recibido el nombre de *coordenadas curvilíneas*). Estas coordenadas permiten hacer *representaciones numéricas:*

- un punto $p \in M$ se representa por un vector numérico $\mathbf{v} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, siendo los números $a_1, \dots, a_n$ las coordenadas (curvilíneas) del punto,
- un conjunto $A \subset M$, que esté contenido en el dominio de unas coordenadas, se representa por el conjunto de los vectores de coordenadas de sus puntos,
- una función escalar o vectorial f, definida en un conjunto $A \subseteq M$ que es parte del dominio de unas coordenadas, se representa por una "fórmula" en dichas coordenadas.

Las propiedades de un conjunto o de una función serán, entonces, las mismas que tienen sus representaciones numéricas.

> Al final, esto permitirá hacer Análisis en el conjunto M igual que se hace en los $\mathbb{R}^n$. También permitirá hacer Geometría en M.

1.1 El concepto de atlas

Fijamos un conjunto no vacío M y un entero $n \geq 0$.

Definición 1. *Una* **carta n-dimensional** *en M es un par ordenado (U, φ) formado por un subconjunto no vacío $U \subseteq M$ y una función $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ biyectiva de U a $\varphi(U)$ y tal que $\varphi(U)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$.*
Definimos n funciones escalares $u_1, \dots, u_n : U \to \mathbb{R}$ por la identidad $(u_1, \dots, u_n) \equiv \varphi$ y las llamamos **funciones coordenadas** *de la carta. Dado un punto $p \in U$, los números $u_1(p), \dots, u_n(p)$ son las* **coordenadas de p** *en esa carta.*

La operación que reconstruye un punto $p \in U$ a partir de sus coordenadas es la aplicación inversa $\varphi^{-1}(u_1, \dots, u_n)$.

El nombre de *carta* se inspira en las cartas de navegación marítima. Sea $n = 2$, por un momento pensemos en M como un "mundo", en $U \subseteq M$ como en una región de dicho mundo y en $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^2$ como en "un trozo de papel plano" en el que hay dibujado un "mapa" de la región U. Entonces φ sería la biyección que asocia cada posición en la región U con el correspondiente punto en el mapa. Esto nos daría una "carta" para navegar por la región U.
Siguiendo con este símil, un *atlas de navegación* sería un conjunto de mapas (cartas) que superpuestos representan una región extensa, por la que podemos navegar cambiando de carta según vamos saliendo de la parte cubierta por una carta y entrando en la parte cubierta por otra.

Con frecuencia será inevitable usar más de una carta en un mismo conjunto M. Si $(U, \varphi), (V, \psi)$ son dos cartas n-dimensionales en M, entonces cada punto $p \in U \cap V$ puede reconstruirse a partir de uno cualquiera de los siguientes vectores numéricos:

$$\text{el vector } \varphi(p) = \big(u_1(p), \ldots, u_n(p)\big) \text{ o el vector } \psi(p) = \big(v_1(p), \ldots, v_n(p)\big).$$

Por razones que enseguida se verán, exigimos que pueda pasarse de un vector al otro por operaciones numéricas suaves. Es decir, exigimos que existan dos "formulas vectoriales" en n variables independientes $g(\,\cdot\,, \ldots, \,\cdot\,)$ y $h(\,\cdot\,, \ldots, \,\cdot\,)$ que sean $\mathcal{C}^\infty$ y tales que para *todo* $p \in U \cap V$ sea:

$$\big(v_1(p), \ldots, v_n(p) \big) = g\big(u_1(p), \ldots, u_n(p) \big)$$

$$\text{y} \quad \big(u_1(p), \ldots, u_n(p) \big) = h\big(v_1(p), \ldots, v_n(p) \big) .$$

Pero esa condición equivale a las siguientes identidades:

$$\big(\psi|_{U\cap V}\big) \equiv g \circ \big(\varphi|_{U\cap V}\big) \quad , \quad \big(\varphi|_{U\cap V}\big) \equiv h \circ \big(\psi|_{U\cap V}\big) ,$$

Definición 2. *Si dos cartas n-dimensionales $(U, \varphi), (V, \psi)$ tienen una intersección no vacía, llamamos* **cambios de coordenadas** *a las siguientes funciones:*

$$g = \big(\psi|_{U\cap V}\big) \circ \big(\varphi|_{U\cap V}\big)^{-1} \quad , \quad h = \big(\varphi|_{U\cap V}\big) \circ \big(\psi|_{U\cap V}\big)^{-1} ,$$

que son biyecciones inversas mutuas entre los conjuntos numéricos $\varphi(U \cap V)$ y $\psi(U \cap V)$.

Un cambio de coordenadas no mueve el punto $p \in U \cap V$, sólo cambia de unas coordenadas a otras (de ese mismo punto).

Lo que exigimos es que las "fórmulas" g y h, inversas mutuas, sean suaves.

Definición 3. *Fijamos un conjunto no vacío M y un entero $n \geq 0$. Dos cartas n-dimensionales $(U, \varphi), (V, \psi)$ en M son* **compatibles** *si o bien $U \cap V = \varnothing$ o bien se cumplen las tres condiciones siguientes:*

1. *$\varphi(U \cap V)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$.*
2. *$\psi(U \cap V)$ también es un abierto de $\mathbb{R}^n$.*
3. *Los cambios de coordenadas $\varphi(U \cap V) \rightleftarrows \psi(U \cap V)$ son difeomorfismos numéricos.*

Un **atlas n-dimensional** *en M es una familia de cartas n-dimensionales $\big\{(U_\alpha, \varphi^\alpha)\big\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ que cumple las dos condiciones siguientes:*

1. *Recubre todo M:* $M = \displaystyle\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha$.
2. *Para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ las cartas $(U_\alpha, \varphi^\alpha)$ y (U_β, φ^β) son compatibles.*

1.2 La topología

Dado un atlas n-dimensional $\big\{(U_\alpha, \varphi^\alpha)\big\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ en M, consideramos la siguiente familia de conjuntos:

$$\mathcal{T} = \big\{ A \subseteq M \, : \, \forall \alpha \in \mathcal{A} \quad \varphi^\alpha(A \cap U^\alpha) \text{ es un abierto de } \mathbb{R}^n \big\} .$$

Teorema 4. *La familia $\mathcal{T}$ es una topología en M. De hecho es la única para la que los U_α son todos abiertos y cada aplicación coordenada $\varphi^\alpha : U_\alpha \longrightarrow \varphi^\alpha(U_\alpha)$ es un homeomorfismo.*

Algunas propiedades de esta topología:

1. Cada punto $p \in M$ tiene entornos abiertos arbitrariamente pequeños que son homeomorfos a una bola abierta en $\mathbb{R}^n$.
2. $(M, \mathcal{T})$ es conexo por caminos si y sólo si es conexo.
3. $(M, \mathcal{T})$ es 2ºN si y sólo si M ya se recubre por una cantidad numerable de los U_α.

Puede suceder que $\mathcal{T}$ no sea Hausdorff. También puede pasar que no sea 2ºN, incluso siendo Hausdorff y conexa.

1.3 La estructura diferenciable

Sea M un conjunto no vacío en el que se ha dado un atlas k-dimensional $\{(U_\alpha, \varphi^\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$. Para cada índice $\ell = 0, 1, 2, 3, \ldots, \infty$, vamos a definir el concepto de *función de clase* $\mathcal{C}^\ell$ (cuando sea $\ell \geq 1$, diremos "diferenciable de clase $\mathcal{C}^\ell$") con dominio un abierto $A \subseteq M$. En este apartado lo hacemos para funciones **escalares,** es decir funciones $f : A \to \mathbb{R}$. Esta propiedad va a ser **local:** si se cumple en abiertos pequeños (contenidos en A) entonces se cumple en todo A.
Dado un punto $p \in A$, queremos ver si f es de clase $\mathcal{C}^\ell$ *en el entorno de* p. Para ello, tomamos un abierto $p \in W \subseteq A$ lo bastante pequeño para que esté contenido en alguna carta del atlas

$$(U_\alpha, \varphi^\alpha) \;=\; \big(U_\alpha\,,\,(u_1,\ldots,u_k)\big)\;,$$

y entonces la parte $f|_W$ de f la consideramos de clase $\mathcal{C}^\ell$ si se la puede obtener combinando las funciones coordenadas $u_1|_W, \ldots, u_k|_W$ mediante una "fórmula" en k variables independientes $g(\,t_1\,,\,\ldots\,,\,t_k\,)$ que sea de clase $\mathcal{C}^\ell$, es decir:

$$f|_W \;\equiv\; g\big(\,u_1|_W\,,\,\ldots\,,\,u_k|_W\,\big)\;, \tag{1}$$

donde $g : \varphi(W) \to \mathbb{R}$ es una función de clase $\mathcal{C}^\ell$ definida en el abierto numérico $\varphi(W)$ de $\mathbb{R}^k$.
Como primeros ejemplos, son suaves en W las siguientes funciones:

$$(u_1 + 3\,u_2)|_W \;\;,\;\; \big(\,u_7\,u_3^5 + e^{u_2}\,\big)|_W \;\;,\;\; \left.\frac{u_2 - u_1}{1 + u_3^4}\right|_W \;\;,\;\; \cos(u_3 - 4\,u_2)|_W\;,$$

y de hecho será suave el resultado de combinar $u_1|_W, \ldots, u_k|_W$ mediante cualquier función numérica suave en $\varphi(W)$, aunque no se la pueda dar por una fórmula elemental.
Como otro ejemplo $\big(|u_1|^{5/2}\big)|_W$ es $\mathcal{C}^2$, pero no es $\mathcal{C}^3$ en ningún entorno de p si se tiene $u_1(p) = 0$.

La identidad (1) equivale a $f|_W \equiv g \circ (\varphi^\alpha|_W)$, lo que nos proporciona la expresión:

$$g \;\equiv\; \big(f|_W\big) \circ \big(\varphi^\alpha|_W\big)^{-1} : \varphi^\alpha(W) \longrightarrow \mathbb{R}\,. \tag{2}$$

Llamamos a g, dada por (2), la **representación numérica de $f|_W$ en las coordenadas φ^α**, porque es una función numérica y porque podemos reconstruir $f|_W$ a partir de ella mediante la fórmula (1).

Definición 5. *Sean $A \subseteq M$ un abierto y $f : A \to \mathbb{R}$ una función escalar definida en A. Dado $p \in A$, decimos que f es* **de clase $\mathcal{C}^\ell$ en el entorno de p respecto del atlas** *si hay un entorno abierto $W \subseteq A$ de p tal que la parte $f|_W$ admite una representación numérica,* (1) *y* (2)*, con g función numérica de clase $\mathcal{C}^\ell$.*
Decimos que f es **de clase $\mathcal{C}^\ell$ respecto del atlas** *si lo es en el entorno de cada punto $p \in A$.*

Ahora ya podemos explicar por qué hemos exigido que los cambios de coordenadas sean suaves: gracias a esa condición, para cada índice ℓ y cada dos cartas $(U_\alpha, \varphi^\alpha), (U_\beta, \varphi^\beta)$ que contengan a W se tiene

$$\big(f|_W\big) \circ \big(\varphi^\alpha|_W\big)^{-1} \;\in\; \mathcal{C}^\ell\big(\varphi^\alpha(W)\big) \quad\Longleftrightarrow\quad \big(f|_W\big) \circ \big(\varphi^\beta|_W\big)^{-1} \;\in\; \mathcal{C}^\ell\big(\varphi^\beta(W)\big)\;,$$

es decir que las cartas *no se contradicen unas a otras* a la hora de decir si f es $\mathcal{C}^\ell$ o no en el abierto pequeño $W \subseteq A$. Más importante aún:

Para saber si f es $\mathcal{C}^\ell$, basta comprobarlo en algunas cartas del atlas que recubran A.

Definición 6. *La* **estructura diferenciable definida en M por el atlas** *es el conjunto:*

$$\mathcal{S} \;=\; \big\{\,(A, f) \;:\; A \subseteq M \text{ es un abierto }\;,\; f : A \to \mathbb{R} \text{ es suave respecto del atlas}\,\big\}\,.$$

La estructura diferenciable consiste en saber qué conjuntos son abiertos y qué funciones escalares definidas en abiertos son suaves.

Importante: el resto de f, es decir la parte $f|_{M\setminus W}$, no se puede reconstruir a partir de g. Para estudiar f en el entorno de puntos $q \in M \setminus W$ necesitaremos otras representaciones numéricas distintas de g, posiblemente construidas con otras cartas.

Definición 7. *En cualquier abierto numérico no vacío $A \subseteq \mathbb{R}^n$, la* **estructura diferenciable estándar en** A *es la definida por el atlas de una sola carta $\{(A, id)\}$.*

Proposición 8. *Sean $\mathcal{U} = \big\{(U_\alpha, \varphi^\alpha)\big\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ un atlas k-dimensional en M, que define la estructura diferenciable $\mathcal{S}$. Sea (V, ψ) otra carta k-dimensional en M. Las dos condiciones siguientes son equivalentes:*

1. *(V, ψ) es compatible con cada $(U_\alpha, \varphi^\alpha)$. Es decir que $\{(V, \psi)\} \cup \mathcal{U}$ también es un atlas en M y define también $\mathcal{S}$.*
2. *Se cumplen:*
   - *(a) V es un abierto de M.*
   - *(b) Se tiene $\psi \equiv (v_1, \dots, v_k)$ con las $v_j : V \to \mathbb{R}$ funciones suaves de la estructura $\mathcal{S}$.*
   - *(c) Toda $V \to \mathbb{R}$ que sea una función suave de $\mathcal{S}$ se puede poner como una combinación $g(v_1, \dots, v_k)$ para alguna función numérica suave g de k variables.*

Definición 9. *A las cartas k-dimensionales que cumplen las dos condiciones equivalentes de la proposición anterior las llamamos* **cartas de la estructura** $\mathcal{S}$*, porque la segunda condición nos dice cómo determinarlas directamente a partir de $\mathcal{S}$.*
Estas cartas forman el mayor atlas (llamado **atlas maximal***) que induce $\mathcal{S}$.*

Veamos dos ejemplos cuando $\mathcal{S}$ es la estructura diferenciable estándar en $\mathbb{R}^2$. La carta $\big(\mathbb{R}^2, (\sqrt[3]{x}, y)\big)$ no es de esa estructura porque la primera función coordenada no es una función suave de $\mathcal{S}$. Tampoco la carta $\big(\mathbb{R}^2, (x^3, y)\big)$ es de esa estructura, porque x es una función suave de $\mathcal{S}$ pero se tiene $x \equiv g\big(x^3, y\big)$ con $g(t_1, t_2) = \sqrt[3]{t_1}$, fórmula no suave en las variables t_1, t_2.

Corolario 10. *Una vez que sabemos qué funciones son suaves en abiertos de M, también sabemos, para cada índice ℓ, qué funciones son $\mathcal{C}^\ell$: las que tienen representaciones numéricas $\mathcal{C}^\ell$ en unas cuantas cartas de $\mathcal{S}$ que recubran el dominio de la función.*

Terminamos este apartado con un ejemplo que muestra que *la topología no es suficiente para determinar la estructura suave.* Para cada $a \geq 1$ consideramos la función

$$\varphi_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad \varphi_a(x) \;=\; \left\{ \begin{array}{ccc} x & \text{si} & x \leq 0 \\ \\ ax & \text{si} & x \geq 0 \end{array} \right.$$

y definimos $\mathcal{S}_a$ como la estructura diferenciable inducida en $\mathbb{R}$ por el atlas de una sola carta $\{(\mathbb{R}, \varphi_a)\}$. Puesto que cada φ_a es un homeomorfismo, todas las estructuras $\mathcal{S}_a$ inducen la topología estándar en $\mathbb{R}$; pero si $a \neq b$ entonces $\mathcal{S}_a \neq \mathcal{S}_b$, luego tenemos una cantidad infinita no numerable de estructuras diferenciables en la recta que son distintas dos a dos aunque todas definen la misma topología.

1.4 El concepto de variedad

En este apartado definimos los objetos que van a protagonizar todo el curso.

Definición 11. *Un* **espacio locamente euclídeo n-dimensional** *es un par $(M, \mathcal{S})$ formado por un conjunto no vacío M y una estructura diferenciable $\mathcal{S}$ en M que puede darse por un atlas n-dimensional.*
Una **variedad diferenciable n-dimensional** *es un espacio localmente euclídeo n-dimensional cuya topología es Hausdorff y $2^o N$.*

Con frecuencia omitiremos el adjetivo “diferenciable”, escribiendo solamente “variedad”. A las variedades de dimensión 1 las llamamos también **curvas.** A las variedades de dimensión 2 las llamamos también **superficies.**

Aunque al principio sea difícil creer que un atlas puede definir una topología que no sea Hausdorff, tal cosa sucede. Un ejemplo es la *recta con dos orígenes,* que puede definirse de la manera siguiente. Consideramos la proyección $\mathrm{pr} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $\mathrm{pr}(x,y) = x$, el conjunto

$$M \;=\; \big(\mathbb{R} \times \{0\}\big) \cup \{(0,1)\} \;\subset\; \mathbb{R}^2 \;,$$

y los subconjuntos $U = \mathbb{R} \times \{0\}$ y $V = M \setminus \{(0,0)\}$; entonces $\{(U, \mathrm{pr}|_U), (V, \mathrm{pr}|_V)\}$ es un atlas 1-dimensional en M que induce una topología en la que los puntos $(0,0)$ y $(0,1)$ no son separables Hausdorff. La estructura diferenciable inducida por ese atlas convierte a M en un espacio localmente euclídeo 1-dimensional que no es una variedad.
La “superficie” de Prüfer es un ejemplo de un espacio localmente euclídeo 2-dimensional que es conexo y Hausdorff pero no es 2^{o}N; por lo tanto no es una variedad.

1.5 Aplicaciones diferenciables

Sean M, N dos variedades, de dimensiones respectivas k, n.
Dada una aplicación $f : M \to N$, las estructuras diferenciables en M y en N permiten definir, para cada índice ℓ, el concepto de que f sea de clase $\mathcal{C}^\ell$. De nuevo es una propiedad **local:** si se cumple en el entorno de cada punto, entonces se cumple en todo el dominio M. Para que sea $\mathcal{C}^\ell$ vamos a exigir, *por definición,* que f sea continua.

Dada $f : M \to N$ continua, y dado un punto $p_0 \in M$, elegimos una carta (U, φ) de M que contenga a p_0 y una carta (V, ψ) de N que contenga al punto imagen $f(p_0)$. Existen entornos abiertos $p_0 \in W \subseteq U$ tales que $f(W) \subseteq V$. Fijamos un tal W y buscamos una “fórmula vectorial” $(g_1, \ldots, g_n) \equiv g(t_1, \ldots, t_k) : \varphi(W) \to \mathbb{R}^n$ que haga el siguiente trabajo:

para cada $p \in W$, dar las coordenadas de $f(p)$ a partir de las coordenadas de p.

Esto quiere decir que si damos nombres a las funciones coordenadas

$$\varphi \;\equiv\; (u_1, \ldots, u_k) \quad , \quad \psi \;\equiv\; (v_1, \ldots, v_n) \;,$$

entonces g es una función vectorial numérica de k variables independientes tal que para cada $p \in W$ se tiene:

$$\Big(v_1\big(f(p)\big) \;,\; \ldots \;,\; v_n\big(f(p)\big) \Big) \;=\; g\left(u_1(q), \ldots, u_k(q)\right) \;,$$

o sea que se tiene la siguiente identidad entre funciones vectoriales en W:

$$(v_1, \ldots, v_n) \circ (f|_W) \;\equiv\; g\left(u_1|_W \;,\; \ldots \;,\; u_k|_W \right) . \tag{3}$$

Entonces *definimos* que el trozo $f|_W$ de f es $\mathcal{C}^\ell$ si las funciones $v_j \circ (f|_W)$, que son las “componentes en coordenadas de $f|_W$”, se pueden obtener combinando las funciones coordenadas $u_1|_W \,,\, \ldots \,,\, u_k|_W$ mediante unas “fórmulas” $g_j(t_1, \ldots, t_k)$ que sean de clase $\mathcal{C}^\ell$ en las variables independientes $t_1, \ldots, t_k$.
La identidad (3) es lo mismo que $\psi \circ (f|_W) \equiv g \circ (\varphi|_W)$, lo que proporciona la expresión:

$$g \;=\; \psi \circ (f|_W) \circ (\varphi|_W)^{-1} : \varphi(W) \longrightarrow \mathbb{R}^n \,. \tag{4}$$

Esta g, dada por (4), es la **representación numérica de $f|_W$ en las coordenadas φ y ψ,** porque es una función vectorial numérica y porque se reconstruye $f|_W$ a partir de ella así:

$$f|_W \;\equiv\; \psi^{-1} \circ g \circ (\varphi|_W) \quad \text{o bien} \quad f\big(\varphi^{-1}(u)\big) \;\equiv \psi^{-1}\big(g(u)\big) \,. \tag{5}$$

Por ejemplo, la aplicación $f : W \to V$ definida por la siguiente fórmula

$$f\big(\varphi^{-1}(u_1, u_2, u_3)\big) \;\equiv\; \psi^{-1}\big(e^{u_1} - 2u_3 \,,\, u_1 u_2 \,\big) \,,$$

que equivale a $\begin{pmatrix} \text{punto en } W \text{ de coordenadas} \\ (u_1, u_2, u_3) \end{pmatrix} \overset{f}{\longmapsto} \begin{pmatrix} \text{punto en } V \text{ de coordenadas} \\ v_1 = e^{u_1} - 2u_3 \quad \text{y} \quad v_2 = u_1 u_2 \end{pmatrix}$, tiene la representación numérica $g(u_1, u_2, u_3) \equiv \big(e^{u_1} - 2u_3 \,,\, u_1 u_2 \big)$, que nos dice cómo calcular las ψ-coordenadas de $f(p)$ a partir de las φ-coordenadas de p.

Definición 12. *Dado $p \in M$, decimos que $f : M \to N$ es* **de clase $\mathcal{C}^\ell$ en el entorno de** p_0 *si es continua en p_0 y hay un entorno abierto W de p_0 en M tal que la parte $f|_W$ admite una representación numérica* (4) *y* (5) *donde g es una función vectorial numérica de clase $\mathcal{C}^\ell$. Decimos que f es* **de clase $\mathcal{C}^\ell$** *si lo es en el entorno de cada punto $p_0 \in M$.*

Gracias a la compatibilidad entre cartas de un atlas, la diferenciabilidad $\mathcal{C}^\ell$ de f en un punto dado p_0 no depende de qué cartas se utilicen, conteniendo a p_0 y $f(p_0)$, mientras sean cartas de las estructuras diferenciables respectivas de M y de N. Es, pues, una propiedad que sólo depende de esa pareja de estructuras.
Aunque tal vez no lo lleguemos a usar, el siguiente resultado explica cómo se podría decidir la diferenciabilidad a partir solamente de las estructuras diferenciables en M y N.

Proposición 13. *Dada $f : M \to N$, son equivalentes:*

1. *f es diferenciable de clase $\mathcal{C}^\ell$ respecto de las estructuras diferenciables de M y N.*
2. *Para toda pareja (B, h) de la estructura de N (es decir, B es abierto de N y $h : B \to \mathbb{R}$ una función suave de la estructura de N) la preimagen $f^{-1}(B)$ es un abierto de M y la función $h \circ f : f^{-1}(B) \to \mathbb{R}$ es $\mathcal{C}^\ell$ respecto de la estructura de M.*

Importante: el resto de f, es decir $f|_{M \setminus W}$, no se puede reconstruir a partir de g. Para estudiar la diferenciabilidad de f en el entorno de puntos $q \in M \setminus W$ necesitamos otras representaciones numéricas distintas de g, posiblemente construidas con otras coordenadas.

La diferenciabilidad se conserva por composición. Si M, N, P son variedades y $M \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} P$ son aplicaciones $\mathcal{C}^\ell$, entonces la compuesta $\beta \circ \alpha : M \to P$ también es $\mathcal{C}^\ell$.
Si en $\mathbb{R}^n$ ponemos la estructura estándar, entonces $(f_1, \ldots, f_n) \equiv f : M \to \mathbb{R}^n$ es $\mathcal{C}^\ell$ si y sólo si cada componente $f_j : M \to \mathbb{R}$ es una función escalar $\mathcal{C}^\ell$.

Definición 14. *Un* **difeomorfismo** *es una aplicación entre variedades $\sigma : M \to N$ que es biyectiva, suave y con inversa suave. Si tal aplicación existe decimos que M y N son* **difeomorfas.**
Un **difeomorfismo local** *es una aplicación $F : M \to N$ tal que cada punto $p_0 \in M$ tiene un entorno abierto $U \subseteq M$ con la imagen $F(U)$ un abierto de N y con la aplicación $U \to F(U)$ dada por $p \mapsto F(p)$ un difeomorfismo.*

Todo difeomorfismo es un homeomorfismo. El recíproco no es cierto; por ejemplo la aplicación $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $x \mapsto x^3$ es un *homeomorfismo suave,* pero no un difeomorfismo porque su inversa $y \mapsto \sqrt[3]{y}$ no es suave.
Dada una variedad M de dimensión k, las cartas de la estructura de M son los difeomorfismos entre un abierto $U \subseteq M$ y un abierto de $\mathbb{R}^k$. Los dominios de cartas de esa estructura son los abiertos de M que son difeomorfos a algún abierto de $\mathbb{R}^k$.
Un difeomorfismo local no está obligado a ser ni inyectivo ni suprayectivo.

1.6 Construcciones sencillas de variedades

Al final del apartado 1.3 hemos visto, con un ejemplo, que la topología no determina la estructura diferenciable. Esto plantea la pregunta de si hay estructuras distinguidas, determinadas a partir de otros datos. En este apartado y los dos siguientes vamos a dar construcciones de ese tipo.

Abiertos. Sea M variedad con la estructura diferenciable dada por un atlas $\{(U_\alpha, \varphi^\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de dimensión n y $A \subseteq M$ un abierto. Las intersecciones no vacías $A \cap U_\alpha$, junto con las funciones $\varphi^\alpha|_{A \cap U_\alpha}$, forman un atlas en A que es de la misma dimensión n y que induce en A

la topología relativa. La estructura de variedad que así se define en A sólo depende de la estructura diferenciable de M, da igual el atlas con que hagamos la construcción mientras esté formado por cartas de la estructura en M.

Espacios vectoriales. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial real de dimensión n. Cada biyección lineal $L : \mathbb{V} \to \mathbb{R}^n$ produce un atlas de una sola carta $\{(\mathbb{V}, L)\}$ que da a $\mathbb{V}$ una estructura con la cual $\mathbb{V}$ es difeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Esta estructura está determinada de manera única a partir de la estructura de espacio vectorial, porque el cambio de coordenadas entre dos de esas cartas es una función lineal invertible $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y por lo tanto las cartas son compatibles. Combinando esta construcción con la anterior, cada abierto $A \subseteq \mathbb{V}$ recibe una estructura de variedad determinada de manera única por la estructura de espacio vectorial.

Productos. Si M, N son variedades de dimensiones respectivas k, n, entonces se define en el producto cartesiano $M \times N$ una estructura diferenciable de dimensión $k+n$ llamada **estructura producto.** Dicha estructura está determinada con unicidad por las respectivas estructuras diferenciables de M y N; la podemos definir por la condición de que siempre que (U, φ) es una carta de la estructura de M y (V, ψ) una de la estructura de N entonces $(U \times V, \varphi \times \psi)$ es una carta de la estructura producto. La topología definida por esta estructura es la topología producto, luego es Hausdorff y 2ºN.

1.7 Subvariedades

Sean M una variedad de dimensión k y h un entero no negativo con $h \leq k$.

Definición 15. *Un subconjunto no vacío $N \subseteq M$ es una* **subvariedad de dimensión** h, *también llamada* h**-subvariedad,** *si para cada punto $p \in N$ existe una carta (U, φ), de la estructura de M, con $p \in U$ y tal que el trozo $N \cap U$ de N es llevado por φ a un abierto del subespacio vectorial* $\mathbb{R}^h \times \{\mathbf{0}\} = \{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k : x_{h+1} = \cdots = x_k = 0\}$.

La aplicación φ en una tal carta es un difeomorfismo, del abierto U a un abierto de $\mathbb{R}^k$, que "plancha" el trozo $N \cap U$ de N, en el sentido de que lo envía a un trozo de un h-plano en $\mathbb{R}^k$. Expresamos esto diciendo que φ es un "difeomorfismo planchador" y que (U, φ) es una "carta planchadora".
Sea $\mathrm{pr} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^h$ la proyección a las h primeras coordenadas. Si $\{(U_\alpha, \varphi^\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ es un recubrimiento de N por cartas planchadoras, entonces las $\big(N \cap U_\alpha \,,\, \mathrm{pr} \circ \varphi^\alpha|_{N \cap U_\alpha} \big)$ son cartas h-dimensionales en N, llamadas **cartas de subvariedad.** Tales cartas son compatibles dos a dos, poque heredan la compatibilidad de las cartas planchadoras que las han originado, y recubren N, es decir que forman un atlas h-dimensional en N. La topología que este atlas define en N es la relativa, luego es Hausdorff y 2ºN, y así queda N constituida en variedad de dimensión h.
La estructura diferenciable así definida en N se llama **estructura de subvariedad** y sólo depende de la estructura diferenciable de la variedad ambiente M, pues ya hemos dicho que dos cartas planchadoras siempre inducen dos cartas compatibles en el conjunto N.

Definición 16. *Dado un conjunto cualquiera X y un subconjunto $Y \subseteq X$, la* **inclusión** *es la aplicación que se denota por $Y \hookrightarrow X$ y que lleva cada $y \in Y$ a sí mismo.*

Sean M una variedad y $N \subseteq M$ una subvariedad. Veamos que la inclusión $i : N \hookrightarrow M$ es suave. Las representaciones numéricas de trocitos de la inclusión, utilizando en llegada una carta planchadora y en salida la correspondiente carta de subvariedad, son restricciones a abiertos de $\mathbb{R}^h$ de la inclusión $\mathbb{R}^h \ni \mathbf{x} \longmapsto (\mathbf{x}, \mathbf{0}) \in \mathbb{R}^k$, luego son suaves.

Teorema 17. *Dadas otra variedad M_1 y una aplicación $f : M_1 \to N$, tenemos para cada índice ℓ:*

$$f \text{ es } \mathcal{C}^\ell \iff i \circ f \text{ es } \mathcal{C}^\ell \,.$$

Demostración. Sea k_1 la dimensión de M_1. Puesto que el ser $\mathcal{C}^\ell$ es una propiedad local, basta demostrar lo afirmado usando coordenadas locales planchadoras. Por lo tanto, basta probar que si $U_1 \subseteq \mathbb{R}^{k_1}$ es un abierto y $g : U_1 \to \mathbb{R}^k$ es una función $\mathcal{C}^\ell$ tal que $g(U_1) \subseteq \mathbb{R}^h \times \{\mathbf{0}\}$, entonces $g \equiv (h, \mathbf{0})$ para alguna función $h : U_1 \to \mathbb{R}^h$ de clase $\mathcal{C}^\ell$. Pero esto último es obvio. □

Ejemplo. La $(n-1)$-esfera $S^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$ es una $(n-1)$-subvariedad de $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto una aplicación que llega a la esfera $f : M_1 \to S^{n-1}$ es $\mathcal{C}^\ell$ si y sólo si $i \circ f$ es $\mathcal{C}^\ell$, Es decir que f es de clase $\mathcal{C}^\ell$ como aplicación a S^{n-1} si y sólo si es de clase $\mathcal{C}^\ell$ vista como función $M_1 \to \mathbb{R}^n$.
Como ejemplo más concreto, si $f, g, h : M_1 \to \mathbb{R}$ son funciones escalares suaves, y nunca nulas a la vez, entonces sabemos que $(f, g, h)/\sqrt{f^2 + g^2 + h^2}$ define una aplicación suave $M_1 \to S^2$, sin necesidad de usar cartas en la esfera.

1.8 Submersiones y cocientes

Sean de nuevo $h \leq k$ y $\mathrm{pr} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^h$ la proyección a las h primeras coodenadas,

Definición 18. *Sean M, Q dos variedades, de dimensiones respectivas k, h. Una aplicación $\alpha : M \to Q$ es una* **submersión** *si es continua y en el entorno de cada punto $p \in M$ admite una representación numérica, en ciertas coordenadas, que es restricción a un abierto de $\mathbb{R}^k$ de $pr : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^h$.*

Puesto que pr es suave, toda submersión es suave. Puesto que pr es abierta, toda submersión es abierta: dado cualquier abierto $A \subseteq M$, la imagen $\alpha(A)$ es un abierto de Q.

Teorema 19. *Sean $\alpha : M \to Q$ una submersión suprayectiva y M_2 otra variedad. Una aplicación $f : Q \to M_2$ es $\mathcal{C}^\ell$ si y sólo si $f \circ \alpha : M \to M_2$ es $\mathcal{C}^\ell$.*

Demostración. Si f es $\mathcal{C}^\ell$, entonces $f \circ \alpha$ también lo es porque la submersión es suave.
Supongamos ahora que $f \circ \alpha$ es de clase $\mathcal{C}^\ell$. Veamos primero que f es continua; hay que demostrar que si $A \subseteq M_2$ es un abierto entonces $f^{-1}(A)$ es un abierto de Q. Por ser α suprayectiva, tenemos $B = \alpha\big(\alpha^{-1}(B)\big)$ para todo subconjunto $B \subseteq Q$; en particular:

$$f^{-1}(A) \;=\; \alpha\Big(\alpha^{-1}\big(f^{-1}(A)\big)\Big) \;=\; \alpha\big(\,(f \circ \alpha)^{-1}(A)\,\big)\,.$$

Como suponemos $f \circ \alpha$ de clase $\mathcal{C}^\ell$, el conjunto $(f \circ \alpha)^{-1}(A)$ es un abierto de M y es llevado por α a un abierto de Q, porque toda submersión es abierta. Esto prueba la continuidad de f.
Fijamos un punto $q \in Q$ y elegimos $p \in M$ tal que $q = \alpha(p)$, que existe por ser α suprayectiva. Consideramos cartas $(U, \varphi), (V, \psi)$, de M y Q respectivamente, tales que $p \in U$, $q \in V$, que $\alpha(U) \subseteq V$ y que la representación numérica del trozo $\alpha|_U$ es $\mathrm{pr}|_{\varphi(U)}$. Como α es abierta, resulta que $\alpha(U)$ es un abierto contenido en V y podemos tomar la carta más pequeña $\big(\,\alpha(U)\,,\, \psi|_{\alpha(U)}\,\big)$. Por lo tanto, suponemos sin pérdida de generalidad que $\alpha(U) = V$.
Sea (V_2, χ) una carta de M_2 conteniendo al punto $f(q)$. Al ser f continua, encogiendo lo suficiente las cartas $(U, \varphi), (V, \psi)$ podemos suponer que $f(V) \subseteq V_2$ y existe la representación numérica $g = \chi \circ f \circ \psi^{-1}$ del trozo $f|_V$ de f. Entonces la representación numérica de $(f \circ \alpha)|_U$ es $g \circ \mathrm{pr}$ y es, por hipótesis, de clase $\mathcal{C}^\ell$. Pero es evidente que si

$$(g \circ \mathrm{pr})(x_1, \ldots, x_h, x_{h+1}, \ldots, x_k) \;\equiv\; g(x_1, \ldots, x_h) \quad , \quad (x_1, \ldots, x_h, x_{h+1}, \ldots, x_k) \in \varphi(U)\;,$$

es una función numérica de clase $\mathcal{C}^\ell$ entonces

$$g(x_1, \ldots, x_h) \quad , \quad (x_1, \ldots, x_h) \in \psi(V) \;=\; \mathrm{pr}\,\big(\,\varphi(U)\,\big)\;,$$

también es una función numérica de clase $\mathcal{C}^\ell$. Como V contiene al punto q, esto prueba que f es de clase $\mathcal{C}^\ell$ en el entorno de q.
Al ser q un punto arbitrario de Q, queda demostrado que f es $\mathcal{C}^\ell$ en Q. □

Corolario 20. *Sea X un conjunto, a priori sin ninguna estructura, y sea $\alpha : M \to X$ una aplicación suprayectiva. De existir una estructura diferenciable en X que convierta a α en una submersión, esa estructura es única.*

Demostración. Sean $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ estructuras diferenciables en X tales que $\alpha_1 : M \to (X, \mathcal{S}_1)$, dada por $p \mapsto \alpha(p)$, y $\alpha_2 : M \to (X, \mathcal{S}_2)$, dada por la misma fórmula, son ambas submersiones. Escribimos id_{12} para denotar la aplicación $(X, \mathcal{S}_1) \to (X, \mathcal{S}_2)$ dada por $p \mapsto p$ y análogamente id_{21}.
Puesto que $\mathrm{id}_{12} \circ \alpha_1 = \alpha_2$ es suave, y α_1 es una submersión, el teorema 19 nos dice que id_{12} es suave. Del mismo modo se ve que id_{21} es suave. Esto significa que id_X es un difeomorfismo de $(X, \mathcal{S}_1)$, a $(X, \mathcal{S}_2)$, lo que a su vez equivale a $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2$. □

Si tenemos una doble suerte: que existe la estructura diferenciable $\mathcal{S}$ tal que $\alpha : M \to (X, \mathcal{S})$ es una submersión y que la topología inducida por $\mathcal{S}$ en X es Hausdorff, entonces $Q = (X, \mathcal{S})$ es una variedad, porque al ser M un espacio 2ºN y $\alpha : M \to Q$ abierta y suprayectiva, se sigue que Q es 2ºN. En tal caso llamamos a Q la **variedad cociente.**

Ejemplo. El **espacio proyectivo real** de dimensión $n-1$ es el conjunto $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1}$ cuyos elementos son los subespacios vectoriales de dimensión 1 en $\mathbb{R}^n$, con la única estructura diferenciable para la que la aplicación $\alpha : \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1}$ dada por $\mathbf{v} \mapsto \langle \mathbf{v} \rangle$ es una submersión.

Definición 21. *Dados conjuntos no vacíos X, Y y una aplicación $f : X \to Y$, las* **fibras de** f *son las preimágenes no vacías $f^{-1}(\{y\})$ con $y \in f(X) \subseteq Y$.*

Proposición 22. *Sean M, Q variedades de dimensiones respectivas k, h y sea $\alpha : M \to Q$ una submersión. Las fibras de α son subvariedades de M todas con la misma dimensión $k-h$.*

Demostración. Podemos recubrir M por cartas (U, φ) a las que corresponden cartas de Q de manera que la representación numérica de cada trozo $\alpha|_U$ sea la restricción al abierto $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^k$ de la proyección pr a las h primeras coordenadas. Entonces cada aplicación coordenada φ es un difeomorfismo que plancha *a la vez* todas las fibras de $\alpha|_U$, pues lleva cada una de ellas a una fibra de $\mathrm{pr}|_{\varphi(U)}$ y ésta a su vez es la intersección del abierto numérico $\varphi(U)$ con una preimagen $\mathrm{pr}^{-1}(\{\mathbf{x_0}\})$, $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^h$, preimagen que es un subespacio afín de dimensión $k-h$. □

Si $d = k - h$ es la dimensión común a todas las fibras de α, entonces la dimensión de Q es $h = k - (k-h) = k - d$, esto es:

$$\dim(\text{cociente}) \;=\; \dim M - \dim(\text{cualquier fibra}) \, .$$

Por ejemplo, las fibras de $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1}$ son rectas con el origen suprimido, luego tienen dimensión $d = 1$ y por lo tanto $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1}$ tiene dimensión $n - d = n - 1$.

Definición 23. *Sean M una variedad de dimensión k y $N \subseteq M$ una subvariedad de dimensión d. Llamamos* **codimensión de N en M**, *al número $\operatorname{codim}(N \hookrightarrow M) = k - d$. Llamamos* **hipersuperficies** *a las subvariedades de codimensión 1, es decir las que tienen $\dim = k - 1$ y están dentro de una variedad de dimensión k.*

Nótese que la codimensión no sólo depende de N, sino también de la variedad que la contiene; de hecho consideramos a la codimensión como una propiedad de la incusión $i : N \hookrightarrow N$. Las hipersuperficies de una curva son los conjuntos de puntos aislados. Las hipersuperficies de una superficie son curvas. Las subvariedades de codimensión 0 de M son los abiertos de M.

Lo que afirma la proposición 22 es que si $\alpha : M \to Q$ es una submersión entonces para cada $q \in \alpha(M)$ la correspondiente fibra tiene $\operatorname{codim}\big(\alpha^{-1}(\{q\}) \hookrightarrow M\big) = \dim Q$.
Una submersión con $k = h$ es un difeomorfismo local, concepto que hemos definido al final del apartado 1.5. Las fibras de un difeomorfismo local están hechas de puntos aislados y tienen dimensión 0.

La estructura diferenciable en S^{n-1} como subvariedad de $\mathbb{R}^n$ es, también, la única estructura diferenciable en S^{n-1} para la cual la aplicación $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \to S^{n-1}$ dada por $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ es una submersión. De este modo, la **$(\mathbf{n}-\mathbf{1})$-esfera estándar** es una variedad que puede definirse como subvariedad o como cociente, a elegir.

Sean $\dim M = k$ y $\alpha : M \to X$ una aplicación suprayectiva a un conjunto X, con las fibras subvariedades de dimensión $k-h$. Suponiendo que α es una submersión para una estructura diferenciable en X, veamos cómo se pueden construir las cartas de esa estructura. Dado un punto cualquiera $p \in M$, tienen que existir cartas (U,φ) de M y (V,ψ) de la estructura en X tales que:

$$p \in U \quad , \quad \alpha(p) \in V \quad , \quad \alpha(U) \;=\; V \quad , \quad \psi \circ (\alpha|_U) \circ \varphi^{-1} \;\equiv\; \mathrm{pr}|_{\varphi(U)} \;,$$

donde $\mathrm{pr} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^h$ es la proyección a las h primeras coordenadas. Que se puede suponer $\alpha(U) = V$ ya lo hemos explicado en la demostración del teorema 19 y significa que α es suprayectiva de U a V.
La identidad: $\psi \circ \alpha \circ \varphi^{-1} \equiv \mathrm{pr}$ en $\varphi(U)$ equivale a la identidad: $\psi \circ \alpha \equiv \mathrm{pr} \circ \varphi$ en U, que escribiendo $\varphi \equiv (u_1, \ldots, u_h, u_{h+1}, \ldots, u_k)$ y $\psi \equiv (v_1, \ldots, v_h)$ queda así:

$$\big(v_1 \circ \alpha \,,\, \ldots \,,\, v_h \circ \alpha \big) \;\equiv\; \mathrm{pr} \circ (u_1, \ldots, u_h, u_{h+1}, \ldots, u_k) \;\equiv\; (u_1, \ldots, u_h) \;,$$

o bien así: $\varphi \equiv \big(v_1 \circ \alpha \,,\, \ldots \,,\, v_h \circ \alpha \,,\, u_{h+1} \,,\, \ldots \,,\, u_k \big)$, es decir:

> Las coordenadas $v_1, \ldots, v_h$ en $V = \alpha(U)$ deben ser tales que las compuestas $v_1 \circ \alpha, \ldots, v_h \circ \alpha$ sean las h primeras funciones de una aplicación coordenada de M definida en U.

La siguiente observación es pura teoría de conjuntos: si α es suprayectiva de U a V, entonces $h \longleftrightarrow h \circ \alpha$ define una biyección entre las funciones $h : V \to \mathbb{R}$ y las funciones escalares en U que son *constantes en cada fibra de* $\alpha|_U$.
En conclusión:

> Caso de que exista en X una estructura diferenciable haciendo de α una submersión, el conjunto X tiene que recubrirse por dominios $\alpha(U)$ procedentes de cartas (U,φ) de M en las cuales las h primeras funciones coordenadas sean constantes en cada fibra de $\alpha|_U$.

Esas h primeras funciones en U descienden de inmediato a $\alpha(U)$, produciendo una carta h-dimensional en X. Estas cartas son automáticamente compatibles entre sí y forman un atlas h-dimensional en X. Como M se recubre por una cantidad numerable de los dominios U, tenemos en X un atlas numerable y así X será 2º N. Lo único que no está garantizado es que sea Hausdorff.
Un ejemplo donde esta estrategia tiene éxito es el espacio proyectivo $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{R}}$, visto como cociente de $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. Si $(x_1, \ldots, x_n)$ son las coordenadas estándar en $\mathbb{R}^n$, entonces cada fracción x_i/x_j está definida en un abierto de $\mathbb{R}^n$ y es constante a lo largo de las rectas vectoriales sin el origen (las fibras de la proyección $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{R}}$). Agrupando estas fracciones convenientemente (juntando las que comparten denominador) se consigue dar un atlas en el proyectivo que convierte a la proyección en una submersión. Para demostrar que $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{R}}$ es Hausdorff, y por lo tanto una variedad, utilizamos la siguiente observación:

> Si X es un espacio topológico y $u : X \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que $u(p) \neq u(q)$, entonces los puntos $p, q \in X$ son separables Hausdorff.

Sea $L_0 \in \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{R}}$, y sea $\mathbf{u}_0$ uno cualquiera de los dos vectores unitarios que generan L_0. Para cualquier elemento $L \in \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{R}}$, definimos $u(L) = |\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}|$, siendo $\mathbf{u}$ uno cualquiera de los dos vectores unitarios que generan L. Es claro que $u(L_0) = 1$ y $u(L) < 1$ para toda $L \neq L_0$, luego quedará visto que $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{R}}$ es Hausdorff si probamos que u es continua. Ahora bien

$$\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \;\ni\; \mathbf{v} \;\longmapsto\; (u \circ \alpha)(\mathbf{v}) \;=\; |\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \;,$$

es una función continua $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$. El argumento utilizado al principio de la demostración del teorema 19 se puede aplicar aquí para deducir que u es continua.

2 Derivadas en variedades

En todo este capítulo la plabra “camino” querrá decir “camino diferenciable”, es decir al menos de clase $\mathcal{C}^1$.
Vamos a construir dos objetos de fundamental importancia: las velocidades de caminos en variedades y las diferenciales de las aplicaciones diferenciables entre variedades. Dichas construcciones generalizan, respectivamente, las construcciones con los mismos nombres que habitualmente se definen para caminos en $\mathbb{R}^n$ y para funciones (escalares o vectoriales) diferenciables con dominio un abierto numérico.

2.1 Contacto de primer orden

Fijamos una variedad M con dimensión n y consideramos los pares ordenados (α, s_0) donde $\alpha(s)$: intervalo $\to M$ es un camino diferenciable y $s_0 \in$ intervalo es un valor del parámetro de α.

Definición 24. *Dados un punto $p \in M$ y una carta (U, φ) de M con $p \in U$, decimos que dos pares (α, s_0) y (β, t_0) tienen* **contacto de orden 1 en** *p si cumplen las dos condiciones siguientes:*

1. *$\alpha(s_0) = p = \beta(t_0)$,*
2. *Los caminos numéricos $\varphi \circ \alpha(s)$ y $\varphi \circ \beta(t)$ tienen la misma derivada primera en los respectivos valores paramétricos: $(\varphi \circ \alpha)'(s_0) = (\varphi \circ \beta)'(t_0)$.*

Proposición 25. *Si dos pares cumplen las condiciones arriba indicadas para una carta conteniendo a p, entonces las cumplen para* cualquier otra *carta de M conteniendo a p.*

Demostración. Sea (V, ψ) otra carta de M con $p \in V$. Consideramos los vectores numéricos

$$\mathbf{a} \;=\; \varphi(p) \quad , \quad \mathbf{a}' \;=\; \psi(p) \;,$$

ambos elementos de $\mathbb{R}^n$. El cambio de coordenadas $\sigma \equiv \psi \circ \varphi^{-1}$ es un difeomorfismo numérico: va del entorno $\varphi(U)$ de $\mathbf{a}$ al entorno $\psi(V)$ de $\mathbf{a}'$. Puesto que $\varphi \circ \alpha(s_0) = \mathbf{a} = \varphi \circ \beta(t_0)$, aplicando la regla de la cadena a estos caminos numéricos y a σ obtenemos:

$$\begin{aligned} & (\varphi \circ \alpha)'(s_0) \;=\; (\varphi \circ \beta)'(t_0) \quad \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \quad & (\sigma \circ \varphi \circ \alpha)'(s_0) \;=\; (D\sigma)_{\mathbf{a}}(\varphi \circ \alpha)'(s_0) \;=\; (D\sigma)_{\mathbf{a}}(\varphi \circ \beta)'(t_0) \;=\; (\sigma \circ \varphi \circ \beta)'(t_0) \;. \end{aligned}$$

Pero $\sigma \circ \varphi \circ \alpha \equiv \psi \circ \alpha$ y $\sigma \circ \varphi \circ \beta \equiv \psi \circ \beta$, luego se tiene $(\psi \circ \alpha)'(s_0) = (\psi \circ \beta)'(t_0)$. □

Escribiendo $(\alpha, s_0) \sim_p (\beta, t_0)$ para indicar que estos pares cumplen lo dicho en la definición 24, queda definida una relación de equivalencia $\sim_p$ entre pares (camino , valor paramétrico). La proposición 25 nos dice que esta relación sólo depende de la estructura diferenciable de M, no de las coordenadas que se elijan en torno a p.

Proposición 26. *Sea $f : M_1 \to M_2$ una aplicación diferenciable, es decir al menos $\mathcal{C}^1$. Para $p \in M_1$ y caminos α, β en M_1, tenemos:*

$$(\alpha, s_0) \sim_p (\beta, t_0) \implies (f \circ \alpha, s_0) \sim_{f(p)} (f \circ \beta, t_0)\,.$$

La demostración es muy similar a la de la proposición 25 y se deja como ejercicio.

2.2 Velocidades de caminos

Fijada una variedad M, para cada camino $\alpha(s)$: intervalo $\to M$ y cada valor paramétrico s_0 en el intervalo vamos a construir un objeto llamado **velocidad de α en $s = s_0$**, que denotaremos por $\alpha'(s_0)$. Son posibles varias construcciones, pero a todas se les pide lo mismo:

1. Que el objeto $\alpha'(s_0)$ se construya sin que para ello haga falta elegir coordenadas.
2. Que para cada dos caminos α, β en M y cada punto $p \in M$ se tenga la equivalencia:

$$(\alpha, s_0) \sim_p (\beta, t_0) \iff \alpha(s_0) = p = \beta(t_0) \quad \text{y} \quad \alpha'(s_0) = \beta'(t_0) \,.$$

Dadas dos construcciones de la velocidad, hay una sencilla biyección entre ellas:

> Si v es una velocidad en p de la primera construcción, elegimos cualquier par (α, s_0) tal que $v = \alpha'(s_0)_{\text{construcción 1}}$ y le hacemos corresponder la velocidad $w = \alpha'(s_0)_{\text{construcción 2}}$.

Esta biyección no ofrece dudas, porque w sólo depende de v y no del par (α, s_0) que se elija para v. Es, por ello, un "diccionario de traducción" muy claro entre las dos construcciones.

Aquí haremos dos construcciones de la velocidad: el **modelo estándar** y el **modelo afín.**

Modelo estándar para velocidades en variedades. Este modelo tiene la ventaja de que es válido en absolutamente todas las variedades, al precio de ser un poco sofisticado.
Fijados una variedad M y un punto $p \in M$, empezamos por considerar el siguiente "espacio de funciones":

$$E_p = \{ \, h \quad \text{función escalar suave en algún entorno de } \; p \; \text{ en } \; M \, \} \,,$$

en principio sin ninguna estructura, visto nada más como un conjunto.

Definición 27. *Para un par (α, s_0), formado por un camino α en M y un valor paramétrico s_0 tal que $\alpha(s_0) = p$, la* **velocidad estándar** *de $\alpha(s)$ en $s = s_0$ es el* funcional $\alpha'(s_0) : E_p \to \mathbb{R}$ *dado por la siguiente fórmula:*

$$E_p \ni h \longmapsto \alpha'(s_0)h = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=s_0} h\big(\alpha(s)\big) \,. \tag{6}$$

Este objeto cumple las condiciones indicadas al principio del presente apartado. Lo hemos construido utilizando solamente la estructura diferenciable, porque la fórmula (6) no hace uso de ninguna carta, sólo requiere saber qué funciones escalares son suaves en el entorno de p. Para comprobar que cumple la segunda condición, elegimos una carta $(U, \varphi), \varphi \equiv (u_1, \dots, u_n)$, con $p \in U$. Dado $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) = \varphi(p)$, vector numérico de las coordenadas de p en la carta, consideramos para cada $i = 1, \dots, n$ el camino

$$\alpha_i(s) : (\, a_i - \varepsilon \,,\, a_i + \varepsilon \,) \longrightarrow U \subseteq M \quad , \quad \alpha_i(s) = \varphi^{-1}(a_1, \dots, a_{i-1}, s, a_{i+1}, \dots, a_n) \,,$$

que cumple $\alpha_i(a_i) = p$. La velocidad estándar $\alpha_i'(a_i)$ es el siguiente funcional:

$$E_p \ni h \longmapsto \alpha_i'(a_i)h = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=a_i} h \circ \alpha_i(s) = \left.\frac{\partial h \circ \varphi^{-1}}{\partial u_i}\right|_{(u_1,\dots,u_n)=\mathbf{a}} \,,$$

funcional para el que utilizaremos la notación simplificada $\left.\dfrac{\partial}{\partial u_i}\right|_p$.
El camino general $\alpha(s)$ con $\alpha(s_0) = p$ tiene una representación numérica

$$(\, s_0 - \varepsilon \,,\, s_0 + \varepsilon \,) \ni s \longmapsto \varphi \circ \alpha(s) = \big(\, u_1 \circ \alpha(s) \,,\, \dots \,,\, u_n \circ \alpha(s) \,\big) \,,$$

mientras que la función general $h \in E_p$ tiene la representación numérica $h \circ \varphi^{-1} : W \to \mathbb{R}$ donde $W \subseteq \varphi(U)$ es un entorno de $\mathbf{a}$. Juntas las dos, esas funciones numéricas nos permiten hacer el siguiente cálculo, en el que se utiliza la regla de la cadena para funciones numéricas:

$$\begin{aligned} \alpha'(s_0)h \ &= \ \frac{d}{ds}\bigg|_{s=s_0} (h\circ\alpha)(s) \ = \ \frac{d}{ds}\bigg|_{s=s_0} (h\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ\alpha)(s) \ = \\ &= \ \frac{d}{ds}\bigg|_{s=s_0} (h\circ\varphi^{-1})\big(\, u_1\circ\alpha(s)\,,\,\dots\,,\, u_n\circ\alpha(s)\,\big) \ = \ \sum_{i=1}^{n} (u_i\circ\alpha)'(s_0)\ \frac{\partial h\circ\varphi^{-1}}{\partial u_i}\bigg|_{(u_1,\dots,u_n)=\mathbf{a}} . \end{aligned}$$

Con la notación que hemos establecido, podemos escribir el resultado así:

$$\alpha'(s_0)h \ = \ (u_1\circ\alpha)'(s_0)\ \frac{\partial}{\partial u_1}\bigg|_p h + \cdots + (u_n\circ\alpha)'(s_0)\ \frac{\partial}{\partial u_n}\bigg|_p h\ ,$$

y, como esto es cierto para toda $h \in E_p$, llegamos a la siguiente identidad entre funcionales:

$$\boxed{\alpha(s_0) \ = \ p \ \Longrightarrow \ \alpha'(s_0) \ = \ (u_1\circ\alpha)'(s_0)\ \frac{\partial}{\partial u_1}\bigg|_p + \cdots + (u_n\circ\alpha)'(s_0)\ \frac{\partial}{\partial u_n}\bigg|_p} \tag{7}$$

La suma de dos funcionales $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 : E_p \to \mathbb{R}$ y el producto de uno de ellos por constante $c \in \mathbb{R}$ se definen de la manera obvia:

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_1+\mathcal{F}_2)h \ &= \ \mathcal{F}_1 h + \mathcal{F}_2 h\ , \\ (c\mathcal{F}_1)h \ &= \ c\,(\mathcal{F}_1 h)\ . \end{aligned} \tag{8}$$

Con esta estructura de espacio vectorial para los funcionales, veamos que $\dfrac{\partial}{\partial u_1}\bigg|_p, \dots, \dfrac{\partial}{\partial u_n}\bigg|_p$ son linealmente idependientes, es decir que si $c_1\ \dfrac{\partial}{\partial u_1}\bigg|_p + \cdots + c_n\ \dfrac{\partial}{\partial u_n}\bigg|_p$ es el funcional nulo entonces $c_1 = \cdots = c_n = 0$. Lo aplicamos a las funciones particulares $u_1, \dots, u_n \in E_p$ y obtenemos:

$$0 \ = \ \left(c_1\ \frac{\partial}{\partial u_1}\bigg|_p + \cdots + c_n\ \frac{\partial}{\partial u_n}\bigg|_p \right) u_i \ = \ c_1\cdot 0 + \cdots c_{i-1}\cdot 0 + c_1\cdot 1 + c_{i+1}\cdot 0 + \cdots + c_n\cdot 0 \ = \ c_i\ .$$

Finalmente sean α, β dos caminos en M con $\alpha(s_0) = p = \beta(t_0)$. Tenemos:

$$\begin{aligned} \alpha'(s_0) \ &= \ c_1\ \frac{\partial}{\partial u_1}\bigg|_p + \cdots + c_n\ \frac{\partial}{\partial u_n}\bigg|_p \quad \text{con} \quad (c_1,\dots,c_n) \ = \ (\varphi\circ\alpha)'(s_0)\ , \\ \beta'(t_0) \ &= \ \widetilde{c}_1\ \frac{\partial}{\partial u_1}\bigg|_p + \cdots + \widetilde{c}_n\ \frac{\partial}{\partial u_n}\bigg|_p \quad \text{con} \quad (\widetilde{c}_1,\dots,\widetilde{c}_n) \ = \ (\varphi\circ\beta)'(t_0)\ , \end{aligned}$$

lo cual, junto con la independencia lineal de $\dfrac{\partial}{\partial u_1}\bigg|_p, \dots, \dfrac{\partial}{\partial u_n}\bigg|_p$, nos permite concluir:

$$\alpha'(s_0) \ = \ \beta'(t_0) \ \Longleftrightarrow \ (\varphi\circ\alpha)'(s_0) \ = \ (\varphi\circ\beta)'(t_0)\ ,$$

es decir que esta construcción de las velocidades de caminos también cumple la segunda de las condiciones que se indicaron al principio de este apartado. En definitiva, es una construcción válida de las velocidades de caminos en variedades.

Modelo afín para velocidades. El modelo que vamos a explicar ahora es más sencillo que el estándar, pero desafortunadamente sólo sirve para unas variedades muy particulares.
Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín real de dimensión n. Tiene una única topología tal que cualquier biyección afín $\mathbb{A} \to \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo. Establecida esta topología, cualquier abierto $M \subseteq \mathbb{A}$ tiene una única estructura diferenciable que resulta de tomar cualquier biyección afín $F : \mathbb{A} \to \mathbb{R}^n$ y considerar el atlas de una sola carta $\{(M, F|_M)\}$.

Dada una tal variedad M, abierto de un espacio afín, y dado un camino $\alpha(s)$ en M, para cada valor paramétrico s_0 definimos la velocidad así:

$$\alpha'(s_0) \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \overrightarrow{\alpha(s_0)\;\alpha(s_0+h)} \;\;\in\;\; \overrightarrow{\mathbb{A}}\;. \tag{9}$$

Estas velocidades resultan ser vectores de $\overrightarrow{\mathbb{A}}$, el espacio vectorial de las traslaciones en $\mathbb{A}$. Si además $\mathbb{A} = \mathbb{R}^n$, entonces estas velocidades son vectores de $\mathbb{R}^n$.
Nótese que en esta construcción de las velocidades de caminos se hace uso intensivo de la estructura afín:
primero, para definir el vector $\overrightarrow{\alpha(s_0)\;\alpha(s_0+h)}$,
segundo, para multiplicar dicho vector por el escalar $1/h$,
tercero, el espacio vectorial $\overrightarrow{\mathbb{A}}$ tiene una topología que da sentido al límite.

Nótese también que éste es el modelo que se utiliza en Física, en Cálculo y en Geometría de Curvas y Superficies. Es bien sabido que cumple las dos condiciones establecidas al principio de este apartado.

Queda por ver cómo es la traducción entre esos dos modelos. Dados un abierto $M \subseteq \mathbb{A}$, un punto $p \in M$ y un vector $v \in \overrightarrow{\mathbb{A}}$, elijamos un camino $\alpha(s)$ en M con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0)_{\text{afín}} = v$. La opción más fácil es el camino $\alpha(s) \equiv p + sv$, que en el modelo estándar tiene por velocidad el siguiente funcional:

$$E_p \ni h \;\longmapsto\; \alpha'(0)h \;=\; \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} h(p+sv) \;=\; D_v h(p)\;.$$

Es decir que el vector $v \in \overrightarrow{\mathbb{A}}$ se traduce en un funcional v_p que actúa sobre cada $h \in E_p$ de la manera siguiente:

$$v_p\, h \;=\; D_v h(p)\;.$$

Por ejemplo, si $\mathbb{A} = \mathbb{R}^2_{xy}$ entonces la fórmula $(a,b)_p\, h$ representa el número $ah_x(p) + bh_y(p)$.

2.3 Espacio tangente

Definición 28. *Fijados una variedad M y un punto $p \in M$, consideramos los pares (α, s_0) con α camino en M y $\alpha(s_0) = p$. El* **espacio de velocidades de M en** *p, también llamado* **espacio tangente a M en** *p, es el conjunto de las velocidades $\alpha'(s_0)$ determinadas por todos esos pares. Escribimos T_pM para denotar este espacio. Sus elementos se llaman* **velocidades de M en** *p o* **vectores tangentes a M en** *p.*

Proposición 29. *Si (u,φ), $\varphi \equiv (u_1,\dots,u_n)$, es cualquier carta de M conteniendo a p, entonces $T_pM = \left\langle \left.\frac{\partial}{\partial u_1}\right|_p, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial u_n}\right|_p \right\rangle$. Por lo tanto el espacio tangente es, con las operaciones definidas por las fórmulas* (8)*, un espacio vectorial de dimensión n, la misma que la dimensión geométrica de la variedad.*

Demostración. Sea $\mathbf{a} = (a_1,\dots,a_n) = \varphi(p)$. Dada cualquier combinación lineal

$$X_p \;=\; c_1 \left.\frac{\partial}{\partial u_1}\right|_p + \cdots + c_n \left.\frac{\partial}{\partial u_n}\right|_p\;, \tag{10}$$

consideremos el camino $\alpha(s) \equiv \varphi^{-1}(\,a_1 + c_1 s\,,\,\dots\,,\,a_n + c_n s\,)$. Este camino satisface $\alpha(0) = p$ y la fórmula (7) nos dice que además cumple $\alpha'(0) = X_p$, luego $X_p \in T_pM$.
Que toda velocidad en p es una combinación lineal del tipo (10) se deduce también de (7), luego T_pM es el conjunto de todas las combinaciones lineales del tipo (10). □

Ahora sabemos que la fórmula (7) equivale a esta otra:

$$\boxed{X_p \in T_pM \implies X_p = (X_p u_1) \left.\frac{\partial}{\partial u_1}\right|_p + \cdots + (X_p u_n) \left.\frac{\partial}{\partial u_n}\right|_p} \tag{11}$$

que nos proporciona la escritura de cualquier vector tangente en p como combinación lineal de las parciales respecto de unas coordenadas.
Por ejemplo, supongamos que $\dim M = 2$ y que rodeando al punto p hay dos cartas $\big(U,(u_1,u_2)\big)$ y $\big(V,(v_1,v_2)\big)$ relacionadas de la manera siguiente:

$$v_1 \equiv u_1 + 3u_2 \quad , \quad v_2 \equiv 1/u_1 \, .$$

Si $p \in U \cap V$, aplicamos la igualdad $X_p = (X_p v_1)\cdot(\partial/\partial v_1)_p + (X_p v_2)\cdot(\partial/\partial v_2)_p$ a $X_p = (\partial/\partial u_1)_p$ y a $X_p = (\partial/\partial u_2)_p$ para obtener:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial u_1}\right|_p &= \left(\frac{\partial v_1}{\partial u_1}\right)_p \cdot \left.\frac{\partial}{\partial v_1}\right|_p + \left(\frac{\partial v_2}{\partial u_1}\right)_p \cdot \left.\frac{\partial}{\partial v_2}\right|_p = \left.\frac{\partial}{\partial v_1}\right|_p - \frac{1}{u_1(p)^2} \cdot \left.\frac{\partial}{\partial v_2}\right|_p \, , \\
\left.\frac{\partial}{\partial u_2}\right|_p &= \left(\frac{\partial v_1}{\partial u_2}\right)_p \cdot \left.\frac{\partial}{\partial v_1}\right|_p + \left(\frac{\partial v_2}{\partial u_2}\right)_p \cdot \left.\frac{\partial}{\partial v_2}\right|_p = 3 \left.\frac{\partial}{\partial v_1}\right|_p \, ,
\end{aligned}$$

fórmulas que dan el cambio de la base $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial u_1}\right|_p , \left.\frac{\partial}{\partial u_2}\right|_p \right\}$ a la base $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial v_1}\right|_p , \left.\frac{\partial}{\partial v_2}\right|_p \right\}$.

2.4 Diferenciales de una aplicación

Definición 30. *Sean $f : M_1 \to M_2$ una aplicación diferenciable entre variedades y $p \in M_1$ un punto. La* **diferencial de f en** *p es la aplicación $(df)_p : T_pM_1 \to T_{f(p)}M_2$ que tiene el siguiente efecto sobre la velocidad $\alpha'(s_0)$ de cualquier camino $\alpha(s)$ en M con $\alpha(s_0) = p$:*

$$\alpha'(s_0) \overset{(df)_p}{\longmapsto} (f \circ \alpha)'(s_0) \, .$$

Que esta aplicación está bien definida es consecuencia de la proposición 26 del apartado 2.1:

si $\alpha(s_0) = p = \beta(t_0)$ y $\alpha'(s_0) = \beta'(t_0)$, entonces $(f\circ\alpha)'(s_0) = (f \circ \beta)'(t_0)$.

Sea $h \in E_{f(p)}$, o sea una función escalar suave definida en un entorno de $f(p)$ en M_2. El efecto sobre ella del funcional $(f \circ \alpha)'(s_0)$ es el siguiente:

$$(f\circ\alpha)'(s_0)h = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=s_0} h\big((f\circ\alpha)(s)\big) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=s_0} (h \circ f)\big(\alpha(s)\big) = \alpha'(s_0)\,(h\circ f) \, .$$

Esto permite prescindir del camino α y dar la siguiente descripción de la diferencial:

para todo $X_p \in T_pM_1$ y toda $h \in E_{f(p)}$, se tiene $\big((df)_p X_p\big)\, h = X_p\,(h \circ f)$,

a partir de la cual es trivial demostrar que $(df)_p : T_pM_1 \to T_{f(p)}M_2$ es lineal para las estructuras de espacio vectorial en T_pM_1 y $T_{f(p)}M_2$ dadas por las fórmulas (8).

Proposición 31. *Elegimos cartas (U,φ), $\varphi \equiv (u_1,\ldots,u_k)$ de M_1 y (V,ψ), $\psi \equiv (v_1,\ldots,v_n)$ de M_2, satisfaciendo:*

$$p \in U \quad , \quad f(p) \in V \quad , \quad f(U) \subseteq V \, ,$$

y consideramos la representación numérica $g \equiv \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ del trozo $f|_U$. Entonces la matriz de $(df)_p$ respecto de las siguientes bases

$$\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial u_1}\right|_p , \ldots , \left.\frac{\partial}{\partial u_k}\right|_p \right\} \text{ de } T_pM_1 \quad \text{y} \quad \left\{ \left.\frac{\partial}{\partial v_1}\right|_{f(p)} , \ldots , \left.\frac{\partial}{\partial v_n}\right|_{f(p)} \right\} \text{ de } T_{f(p)}M_2 \, ,$$

es la jacobiana $(Dg)_{\mathbf{a}}$, siendo $\mathbf{a} = \varphi(p)$ el vector numérico de las coordenadas del punto p.

Demostración. Pongamos $g_j \equiv v_j \circ f \circ \varphi^{-1}$, con lo cual $g \equiv (g_1, \dots, g_n)$. Recordemos los caminos $\alpha_i(s) \equiv \varphi^{-1}(a_1, \dots, a_{i-1}, s, a_{i+1}, \dots, a_k)$, que satisfacen $\alpha_i(a_i) = p$ y $\alpha_i'(a_i) = \left.\dfrac{\partial}{\partial u_i}\right|_p$. La imagen $(df)_p \left.\dfrac{\partial}{\partial u_i}\right|_p$ es la velocidad en $s = a_i$ del camino imagen $f \circ \alpha_i(s)$:

$$(df)_p \left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_p = (f \circ \alpha_i)'(a_i) = \big((f \circ \alpha_i)'(a_i) v_1\big) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial v_1}\right|_{f(p)} + \cdots + \big((f \circ \alpha_i)'(a_i) v_n\big) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial v_n}\right|_{f(p)} ,$$

ahora bien: $(f \circ \alpha_i)'(a_i) v_j = \left.\dfrac{d}{ds}\right|_{s=a_i} v_j \circ f \circ \alpha_i(s) = \left.\dfrac{\partial g_j}{\partial u_i}\right|_{\mathbf{a}}$, por lo tanto:

$$(df)_p \left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_p = \left.\frac{\partial g_1}{\partial u_i}\right|_{\mathbf{a}} \cdot \left.\frac{\partial}{\partial v_1}\right|_{f(p)} + \cdots + \left.\frac{\partial g_n}{\partial u_i}\right|_{\mathbf{a}} \cdot \left.\frac{\partial}{\partial v_n}\right|_{f(p)} ,$$

es decir que las coordenadas de $(df)_p \left.\dfrac{\partial}{\partial u_i}\right|_p$ en la base $\left\{ \left.\dfrac{\partial}{\partial v_1}\right|_{f(p)}, \dots, \left.\dfrac{\partial}{\partial v_n}\right|_{f(p)} \right\}$ forman el vector columna $\left.\dfrac{\partial g}{\partial u_i}\right|_{\mathbf{a}} = g_{u_i}(\mathbf{a})$. Entonces la matriz de $(df)_p$ en las bases indicadas es

$$\big[\, g_{u_1}(\mathbf{a}) \mid g_{u_2}(\mathbf{a}) \mid \cdots \mid g_{u_n}(\mathbf{a}) \,\big] = (Dg)_{\mathbf{a}} .$$

□

Corolario 32. (Teorema de la función inversa en variedades). *Sea* $\dim M_1 = \dim M_2 = n$. *Si en un punto* $p \in M_1$ *la aplicación lineal* $(df)_p$ *es invertible, entonces existen entornos abiertos*

$$U_0 \text{ de } p \text{ en } M_1 \quad , \quad V_0 \text{ de } f(p) \text{ en } M_2 ,$$

tales que $f(U_0) = V_0$ *y* $f : U_0 \to V_0$ *es un difeomorfismo.*

Demostración. La jacobiana de la representación numérica $(Dg)_{\mathbf{a}}$ es una matriz $n \times n$ invertible. Por el teorema de la función inversa, existen entornos W de $\mathbf{a}$ y W' de $\mathbf{b} = g(\mathbf{a}) = \psi\big(f(p)\big)$ tales que $g(W) = W'$ y $g : W \to W'$ es un difeomorfismo. Entonces tomamos $U_0 = \varphi^{-1}(W)$ y $V_0 = \psi^{-1}(W')$. Por una parte f es biyectiva de U_0 a V_0. Por otra parte $f|_{U_0} \equiv \psi^{-1} \circ (g|_W) \circ \varphi$ es compuesta de difeomorfismos, luego es un difeomorfismo. □

Proposición 33. (Regla de la cadena en variedades). *Dadas aplicaciones diferenciables* $M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3$ *y dado un punto* $p \in M_1$, *se tiene* $\big(d(f_2 \circ f_1)\big)_p = (df_2)_{f_1(p)} \circ (df_1)_p$.

Demostración. Empezamos con $X_p \in T_p M_1$. Elejimos un par (α, s_0), donde $\alpha(s)$ es un camino en M_1 con $\alpha(s_0) = p$ y $\alpha'(s_0) = X_p$. Calculamos:

$$\big((df_2)_{f(p)} \circ (df_1)_p\big) X_p = (df_2)_{f(p)}\big((f_1 \circ \alpha)'(s_0)\big) = (f_2 \circ f_1 \circ \alpha)'(s_0) = \big(d(f_2 \circ f_1)\big)_p \big(\alpha'(s_0)\big) ,$$

es decir $\big((df_2)_{f(p)} \circ (df_1)_p\big) X_p = \big(d(f_2 \circ f_1)\big)_p X_p$ para todo $X_p \in T_p M_1$, como se quería demostrar. □

En el apartado 1.5 hemos definido el concepto de difeomorfismo local. El corolario 32 nos dice que si una aplicación suave f, entre variedades de igual dimensión, tiene todas las diferenciales invertibles entonces es un difeomorfismo local. Recíprocamente, si f es un difeomorfismo local entonces la proposición 33 nos dice que las diferenciales de las inversas locales de f invierten a las diferenciales de f, ya que $(d\,\mathrm{id}_M)_p = \mathrm{id}_{T_p M}$. Resulta así que los difeomorfismos locales son, exactamente, las aplicaciones suaves con todas las diferenciales invertibles.

2.5 Diferenciales de funciones

En el caso particular de que M_2 sea un abierto de un espacio afín $\mathbb{A}$, utilizamos en llegada el modelo afín para velocidades y la diferencial es una aplicación lineal $(df)_p : T_pM_1 \to \overrightarrow{\mathbb{A}}$. En el caso aún más particular de que f sea una función escalar, es decir $M_2 = \mathbb{R}$, la diferencial es una **forma lineal** $(df)_p : T_pM_1 \to \mathbb{R}$ que tiene una descripción especialmente sencilla:

$$\text{para todo } X_p \in T_pM_1\,, \quad \text{es } (df)_pX_p \;=\; X_pf\,.$$

Esto se aplica en particular a las funciones coordenadas de una carta $\big(U\,,\,(u_1,\dots,u_k)\big)$ de M_1 conteniendo a p. Observamos que:

$$(du_i)_p\left(c_1\,\frac{\partial}{\partial u_1}\bigg|_p + \cdots + c_k\,\frac{\partial}{\partial u_k}\bigg|_p\right) \;=\; c_i\,,$$

es decir que

$$\boxed{\begin{array}{l}(du_1)_p,\dots,(du_k)_p \text{ son, simplemente, las } \textbf{funciones coordenadas lineales}\\ \text{en el espacio } T_pM_1 \text{ respecto de la base } \left\{\dfrac{\partial}{\partial u_1}\bigg|_p\,,\,\dots\,,\,\dfrac{\partial}{\partial u_k}\bigg|_p\right\}.\end{array}}$$

Definición 34. *Al espacio dual de T_pM_1 lo denotamos $T_p^*M_1$ y lo llamamos* **espacio de diferenciales de M_1 en p** *o* **espacio cotangente de M_1 en p.**

El que las $(du_i)_p$ sean las coordenadas lineales significa que $\{(du_1)_p,\dots,(du_k)_p\}$ es la base dual de la $\left\{\dfrac{\partial}{\partial u_1}\bigg|_p\,,\,\dots\,,\,\dfrac{\partial}{\partial u_k}\bigg|_p\right\}$. Entonces cada forma lineal $\ell \in T_p^*M_1$ se escribe de manera única como combinación lineal de esa base, con coeficientes los que se indican en la siguiente fórmula:

$$\ell \;\equiv\; \ell\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\bigg|_p\right)(du_1)_p + \cdots + \ell\left(\frac{\partial}{\partial u_k}\bigg|_p\right)(du_k)_p\,. \tag{12}$$

En particular, para toda función escalar diferenciable h, definida en un entorno de p en M_1:

$$\boxed{(dh)_p \;\equiv\; \frac{\partial h}{\partial u_1}\bigg|_p (du_1)_p + \cdots + \frac{\partial h}{\partial u_k}\bigg|_p (du_k)_p} \tag{13}$$

El nombre de "espacio de diferenciales" se justifica por el siguiente resultado.

Proposición 35. *Para toda forma lineal $\ell : T_pM_1 \to \mathbb{R}$ existen funciones escalares h, definidas en entornos de p en M_1, tales que $\ell \equiv (dh)_p$.*

Demostración. Dada ℓ consideramos los números $c_i = \ell\left(\dfrac{\partial}{\partial u_i}\bigg|_p\right)$ y formamos con ellos la función $h \equiv c_1u_1 + \cdots + c_ku_k$. Esta h cumple $\dfrac{\partial h}{\partial u_i}\bigg|_p = c_i$ para $i = 1,\dots,k$ y, por las fórmulas (12) y (13), deducimos que $\ell \equiv (dh)_p$. □

En el caso de que f sea una función vectorial, es decir que sea $M_2 = \mathbb{R}^n$ y $f \equiv (f_1,\dots,f_n)$ para ciertas funciones escalares diferenciables $f_1,\dots,f_n : M_1 \to \mathbb{R}$, la diferencial actúa de la siguiente manera:

$$(df)_pX_p \;=\; X_pf \;\stackrel{\text{def}}{=}\; (\,X_pf_1\,,\,\dots\,,\,X_pf_n\,)\,.$$

Proposición 36. *Sean M_1 una variedad de dimensión k y $p \in M_1$ un punto. Dadas k funciones escalares suaves $h_1,\dots,h_k$, definidas en un entorno de p en M_1, las condiciones siguienes son equivalentes:*

1. *Las diferenciales* $(dh_1)_p, \ldots, (dh_k)_p$ *son linealmente independientes.*

2. *Existe un entorno* W *de* p *en* M_1 *tal que* $\big(W\,,\,(h_1,\ldots h_k)|_W\big)$ *es una carta de la estructura diferenciable de* M_1*.*

Demostración. Sea (U,φ), $\varphi \equiv (u_1,\ldots,u_k)$ una carta de M_1 conteniendo a p. Consideramos la función vectorial $f \equiv (h_1,\ldots,h_k)$ y planteamos el cálculo de la matriz A de $(df)_p$ respecto de la base $\left\{ \frac{\partial}{\partial u_1}\Big|_p \,,\ldots,\, \frac{\partial}{\partial u_k}\Big|_p \right\}$ en salida y la base estándar $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_k\}$ en llegada.

La matriz A es $k\times k$, siendo sus columnas las derivadas $\frac{\partial f}{\partial u_1}\Big|_p,\ldots,\frac{\partial f}{\partial u_k}\Big|_p$. Por su parte, la j-ésima fila de A contiene los números $c_1,\ldots,c_k$ tales que $(dh_j)_p \equiv c_1(du_1)_p+\cdots+c_k(du_k)_p$. Entonces la independencia lineal de las formas lineales $(dh_1)_p,\ldots,(dh_k)_p$ equivale a la independencia lineal de las filas de A, es decir equivale a que A sea invertible, y esto equivale a que $(df)_p$ sea invertible. En tal caso el corolario 32 nos dice que f es un difeomorfismo cerca de p, que es lo que se afirma en la condición 2. Recíprocamente, si $(h_1,...,h_k)$ sirven como funciones coordenadas cerca de p entonces $\{(dh_1)_p,\ldots,(dh_k)_p\}$ es una base de $T_p^*M_1$, porque es dual de una base de T_pM_1, luego $(dh_1)_p,\ldots,(dh_k)_p$ son linealmente independientes. □

Hasta este momento hemos considerado a E_p (el conjunto de las funciones suaves definidas en algún entorno de p) solamente como un conjunto. El siguiente enunciado tiene en cuenta las operaciones obvias que hay en E_p: dados dos entornos W_1,W_2 de p en M y dos funciones suaves $h_j : W_j \to \mathbb{R}$, $j=1,2$, entonces h_1+h_2 y h_1h_2 son suaves en el entorno $W_1\cap W_2$. En particular $c\cdot h_1 \in E_p$ para toda constante real c.

Proposición 37. *Dado* $X_p\in T_pM$ *y dadas* $h_1,h_2\in E_p$*, se tienen las igualdades:*

$$X_p(h_1+h_2) \;=\; X_ph_1+X_ph_2 \quad , \quad X_p(h_1h_2) \;=\; (X_ph_1)\,h_2(p)+h_1(p)\,X_ph_2\,. \tag{14}$$

En particular $X_p(c\,h_1)=c\,X_ph_1$ *para toda constante* c*. Por consiguiente:*

$$\big(d(h_1+h_2)\big)_p \;=\; (dh_1)_p+(dh_2)_p \quad , \quad \big(d(h_1h_2)\big)_p \;=\; h_2(p)\,(dh_1)_p+h_1(p)\,(dh_2)_p\,, \tag{15}$$

y en particular $\big(d(c\,h_1)\big)_p \;=\; c\,(dh_1)_p$*.*

La demostración se deja como ejercicio.

2.6 Las diferenciales de una submersión

En este apartado damos un criterio, a base de derivadas, para saber si una aplicación es una submersión o no.

Teorema 38. *Una aplicación suave* $f: M_1\to M_2$ *es una submersión si y sólo si todas sus diferenciales son suprayectivas.*

Demostración. Sean $k=\dim M_1$ y $n=\dim M_2\le k$. En el apartado 1.8 hemos visto que f es una submersión si y sólo si cada punto $p\in M_1$ está en una carta de la forma

$$(U,\varphi) \;=\; \big(U\,,\,(\,v_1\circ f\,,\,\ldots\,,\,v_n\circ f\,,\,u_{n+1}\,,\,\ldots\,,\,u_k\,)\big)\,,$$

donde $v_1,\ldots,v_n$ son las funciones coordenadas de una carta (V,ψ) de M_2 con $f(p)\in V$.
La proposición 36 dice que las funciones $v_1\circ f,\ldots,v_n\circ f$ forman parte de unas coordenadas, en un entorno pequeño de p en M_1, si y sólo si la lista de diferenciales $\big(d(v_1\circ f)\big)_p,\ldots,\big(d(v_n\circ f)\big)_p$ se extiende a una base de $T_p^*M_1$ añadiendo $k-n$ diferenciales de funciones en p. Esto último equivale, por la proposición 35, a que la lista se extienda a una base de $T_p^*M_1$ añadiendo $k-n$ formas lineales, lo cual, por puro álgebra lineal, equivale a que las $\big(d(v_j\circ f)\big)_p$ sean linealmente independientes.

Si A es la matriz de $(df)_p$, usando cualquier base en T_pM_1 y la estándar en $\mathbb{R}^n$, entonces las filas de A representan las diferenciales $\big(d(v_j \circ f)\big)_p$. Luego estas diferenciales son linealmente independientes si y sólo si las filas de A lo son, es decir si y sólo si A representa a una función lineal suprayectiva, que no es otra que $(df)_p$. $\square$

El siguiente resultado nos da en variedades algo que ya teníamos en abiertos numéricos.

Proposición 39. *Sea $f : M \to Q$ suave y supongamos que $N = f^{-1}(\{q\}) \neq \varnothing$, es decir que $q \in f(M)$. Si para todo $p \in N$ la diferencial $(df)_p$ es suprayectiva, entonces N es una subvariedad de M cuya codimensión en M coincide con $\dim Q$.*

Demostración. Cada punto $p_0 \in N$ pertenece a un abierto U^{p_0} de M tal que $(df)_p$ es suprayectiva para todo $p \in U^{p_0}$. Entonces $U = \bigcup_{p_0 \in N} U^{p_0}$ es un abierto de M tal que todas las diferenciales de $f|_U$ son suprayectivas y el teorema 38 nos dice que $f|_U$ es una submersión. Como $N \subset U$, tenemos que $N = (f|_U)^{-1}(\{q\})$ es una fibra de esa submersión y sólo tenemos que aplicar la proposición 22 del apartado 1.8. $\square$

2.7 Inmersiones

Definición 40. *Una* **inmersión** *es una aplicación suave cuyas diferenciales son todas inyectivas.*

En el caso $\dim M_1 = \dim M_2$ los conceptos de submersión, inmersión y difeomorfismo local son equivalentes.

Ejemplo. La inclusión $i : N \hookrightarrow M$ de una subvariedad $N \subseteq M$. Si $\dim M = k$ y $\dim N = n \leq k$, en coordenadas locales adecuadas i se ve como la restricción a un abierto de $\mathbb{R}^n$ de la inclusión $(u_1, \ldots, u_n) \longmapsto (u_1, \ldots, u_n, 0, \ldots, 0)$ y las diferenciales de i se ven como esta misma inclusión.

Teorema 41. *Sea $f : M_1 \to M_2$ una inmersión, con $\dim M_1 = n$ y $\dim M_2 = k \geq n$. Dado cualquier punto $p \in M_1$ existen cartas (U, φ) de M_1 y (V, ψ) de M_2 tales que*

$$p \in U \quad , \quad f(p) \in V \quad , \quad f(U) \subseteq V \quad , \quad \psi \circ (f|_U) \circ \varphi^{-1} \;\equiv\; i|_{\varphi(U)} \, ,$$

donde $i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ es la inclusión $(u_1, \ldots, u_n) \longmapsto (u_1, \ldots, u_n, 0, \ldots, 0)$. Por consiguiente, el trozo $f(U)$ de la imagen $f(M_1)$ es una subvariedad de M_2 difeomorfa a U.

Demostración. Fijamos un punto $p \in M_1$ y empezamos con cartas cualesquiera (U_0, φ^0) y (V_0, ψ^0), conteniendo a p y a $f(p)$, respectivamente. La matriz A de $(df)_p$ en las bases de parciales es $k \times n$ y tiene rango n, porque $(df)_p$ es inyectiva. Por lo tanto entre las k filas de A hay n filas que son linealmente independientes. Esto significa que si $\psi^0 \equiv (v_1^0, \ldots, v_k^0)$ entonces hay n diferenciales linealmente independientes entre las $\big(d(v_1^0 \circ f)\big)_p, \ldots, \big(d(v_k^0 \circ f)\big)_p$. Si es necesario podemos cambiar la aplicación coordenada ψ^0, permutando las v_j^0, de modo que las diferenciales linealmente independientes sean las n primeras $\big(d(v_1^0 \circ f)\big)_p, \ldots, \big(d(v_n^0 \circ f)\big)_p$. El corolario 32 asegura que, tomando un entorno $p \in U \subseteq U_0$ suficientemente pequeño, tenemos una carta de M_1 definida de la siguiente manera:

$$(U, \varphi) \;=\; \big(U \, , \, (u_1, \ldots, u_n)\big) \;=\; \big(U \, , \, (\, v_1^0 \circ f \, , \, \ldots \, , \, v_n^0 \circ f \,)|_U\big) \, .$$

La representación numérica $g^0 \equiv \psi^0 \circ (f|_U) \circ \varphi^{-1}$ admite una expresión:

$$g^0(\widetilde{u}) \;\equiv\; \big(\, \widetilde{u} \, , \, h_{n+1}(\widetilde{u}) \, , \, \ldots \, , \, h_k(\widetilde{u})\big) \quad , \quad \widetilde{u} \in \varphi(U) \, , \tag{16}$$

donde hemos escrito $\widetilde{u}$ para denotar $(u_1, \ldots, u_n)$ y $h_{n+1}, \ldots, h_k : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ son ciertas funciones escalares suaves. Escribamos:

$$\overline{h} \;\equiv\; (h_{n+1}, \ldots, h_k) \quad , \quad \widetilde{v} \;=\; (v_1, \ldots, v_n) \quad , \quad \overline{v} \;=\; (v_{n+1}, \ldots, v_k) \, ,$$

consideremos el siguiente difeomorfismo, que es un **deslizamiento:**

$$\sigma \;:\; \varphi(U)\times\mathbb{R}^{k-n} \;\longrightarrow\; \varphi(U)\times\mathbb{R}^{k-n} \quad , \quad \sigma(\widetilde{v},\overline{v}) \;\equiv\; \big(\,\widetilde{v}\,,\,\overline{v}-\overline{h}(\widetilde{v})\,\big)\,,$$

y la nueva carta $(V,\psi)=(V,\sigma\circ\psi^0)$ en M_2, siendo $V=(\psi^0)^{-1}\big(\varphi(U)\times\mathbb{R}^{k-n}\big)\subseteq V_0$ que claramente satisface $f(p)\in V$. De (16) se deduce:

$$\psi\circ(f|_U)\circ\varphi^{-1}(\widetilde{u}) \;\equiv\; (\widetilde{u},\mathbf{0}) \;\equiv\; i(\widetilde{u}) \quad , \quad \widetilde{u}\in\varphi(U)\,.$$

□

Como basta una cantidad numerable de esas cartas especiales U para recubrir M_1, resulta que $f(M_1)$ es una unión, a lo más numerable, de subvariedades de M_2 cada una de la misma dimensión que M_1.

Proposición 42. *Supongamos que $f:M_1\to M_2$ es una inmersión y $N\subseteq M_2$ una subvariedad con $f(M_1)\subseteq N$. Entonces f define una inmersión de M_1 a N.*

Demostración. Sea $\alpha:M_1\to N$ la aplicación inducida por f, es decir $\alpha(p)=f(p)\in N$ para todo $p\in M_1$. Entonces $f\equiv i\circ\alpha$ siendo $i:N\hookrightarrow M_2$ la inclusión. El teorema 17 del apartado 1.7 dice que α es una aplicación suave. Dado $p\in M_1$, como $(df)_p=(di)_{\alpha(p)}\circ(d\alpha)_p$ es inyectiva, también $(d\alpha)_p$ tiene que ser inyectiva. □

Si $i:N\hookrightarrow M$ es la inclusión de una subvariedad, al ser $(di)_p:T_pN\to T_pM$ lineal e inyectiva es un isomorfismo lineal de T_pN a la imagen $(di)_p(T_pN)$, que es un subespacio vectorial de T_pM. Al ser éste un isomorfismo construido de manera natural (en particular, sin utilizar coordenadas) es muy habitual identificar esos dos espacios vectoriales isomorfos.

Definición 43. *Dada una subvariedad $N\subseteq M$ y dado un punto $p\in N$, decimos que un vector $X_p\in T_pM$ es* **tangente a la subvariedad** *N si pertenece a la imagen $(di)_p(T_pN)$. El conjunto de tales vectores es un subespacio vectorial de T_pM, isomorfo a T_pN mediante $(di)_p$.*

Ejemplo. Si N es una subvariedad de un espacio afín $\mathbb{A}$, entonces $(di)_p(T_pN)$ es un subespacio vectorial de $\overrightarrow{\mathbb{A}}$. Más en concreto, si N, es una subvariedad de $\mathbb{R}^n$ entonces $(di)_p(T_pN)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, es decir un espacio de vectores numéricos. Esto es lo que se define como "espacio tangente a M en p" en el Cálculo y en la Geometría de Curvas y Superficies. Por ejemplo, sea $S\subset\mathbb{R}^3$ una superficie, sea $(U,\varphi)=\big(U,(u,v)\big)$ una carta de S y sea $\Phi(u,v)\equiv\varphi^{-1}(u,v)$ la correspondiente parametrización del trozo $U\subseteq S$. Fijado un punto $p=\Phi(u_0,v_0)\in U$, el isomorfismo $(di)_p$ efectúa las siguientes "traducciones" entre funcionales y vectores numéricos:

$$c_1\left.\frac{\partial}{\partial u}\right|_p+c_2\left.\frac{\partial}{\partial v}\right|_p \;\longleftrightarrow\; c_1\,\Phi_u(u_0,v_0)+c_2\,\Phi_v(u_0,v_0)\,.$$

Sin embargo, es importante entender la diferencia entre unos y otros. Un ser inteligente bidimensional que viva dentro de S sólo sabe de las coordenadas $\varphi\equiv(u,v)$ y entiende los vectores tangentes como expresiones $c_1\left.\frac{\partial}{\partial u}\right|_p+c_2\left.\frac{\partial}{\partial v}\right|_p$. Un ser inteligente tridimensional, que mire a la superficie S *desde fuera de la misma* puede utilizar el modelo afín para las velocidades de caminos en S (porque también son caminos en $\mathbb{R}^3$) y entonces "ve" el plano tangente a S en p como el plano de vectores numéricos $(di)_p(T_pS)=\{\,c_1\Phi_u(u_0,v_0)+c_2\Phi_v(u_0,v_0)\,:\,c_1,c_2\in\mathbb{R}\,\}$.

Proposición 44. *Sea $f:M\to Q$ suave y $q\in f(M)$ tal que para todo $p\in N=f^{-1}(\{q\})$ la diferencial $(df)_p$ es suprayectiva, con lo cual N es una subvariedad de M. Entonces se tiene $(di)_p(T_pN)=\ker(df)_p$ para todo $p\in N$.*

Demostración. Como ya hemos visto en la demostración de la proposición 39, existe un abierto U de M tal que $N \subseteq U$ y $f|_U$ es una submersión. Dado $p \in N$, podemos elegir coordenadas u_i en un entorno $W \subseteq U$ de p y coordenadas v_j en torno a $f(p)$ de manera que la correspondiente representación numérica de $f|_W$ sea una proyección

$$(u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots, u_k) \longmapsto (u_1, \ldots, u_n) \, .$$

Es entonces fácil ver que:

$$(di)_p(T_pN) = \left\langle \left. \frac{\partial}{\partial u_{n+1}} \right|_p , \ldots , \left. \frac{\partial}{\partial u_k} \right|_p \right\rangle = \ker(df)_p \, .$$

□

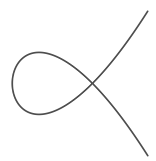
Ejemplo. La función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv x_1^2 + \cdots + x_n^2$ tiene diferencial suprayectiva (de rango 1) en todo punto de $\mathbb{R}^n$ excepto el $\mathbf{0}$. Por lo tanto $S^{n-1} = f^{-1}(\{1\})$ es una subvariedad de $\mathbb{R}^n$, porque $\mathbf{0} \notin S^{n-1}$. Dado $p \in S^{n-1}$, el siguiente espacio

$$\ker(df)_p = \{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : 0 = \nabla f(p) \cdot \mathbf{v} = 2p \cdot \mathbf{v} \} = \{p\}^\perp \, ,$$

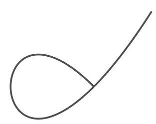
es un hiperplano de vectores numéricos y es lo que en Cálculo y en Geometría de Curvas y Superficies se llama "espacio tangente a la esfera en p". En realidad es $(di)_p(T_pS^{n-1})$, resultado de tomar los vectores de T_pS^{n-1} y "traducirlos" a vectores numéricos de $\mathbb{R}^n$ mediante $(di)_p$. También podemos verlo como el resultado de mirar a T_pS^{n-1} *desde afuera de la esfera.*

2.8 Imágenes de inmersiones

Un ejemplo de inmersión es cualquier camino $\alpha(t)$: intervalo $\to M$ con velocidad nunca nula. En el caso de $M = \mathbb{R}^n$, esos caminos han recibido el nombre de **regulares** en el Cálculo y en la Geometría de Curvas y Superficies. Es bien sabido que pueden "cruzarse consigo mismos", como le ocurre por ejemplo a $\alpha(t) \equiv (\, t^2 - 1 \, , \, t^3 - t \,)$, cuya imagen no es una subvariedad



Además, aunque la restricción $\alpha(t)|_{t>-1}$ es inyectiva, tampoco $\alpha\big((-1, \infty)\big)$ es una subvariedad



En cambio, el camino $\beta(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dado por $\beta(t) \equiv (\cos t, \operatorname{sen} t)$, que no es inyectivo, tiene por imagen la circunferencia unidad que sí es una subvariedad de $\mathbb{R}^2$.
Los caminos "con cruces" nos enseñan que una inmersión debe cumplir cierta *condición no local* para que su imagen sea una subvariedad. Los ejemplos $\alpha(t)|_{t>-1}$ y $\beta(t)$ nos dicen que dicha condición no es la inyectividad sino otra.

Definición 45. *Una aplicación entre espacios topológicos $f : X \to Y$ es* **abierta a la imagen** *si para cada abierto $U \subseteq X$ el conjunto $f(U)$ es un abierto relativo de la imagen $f(X)$, es decir que se tiene $f(U) = f(X) \cap V$ para algún abierto V de Y.*

Teorema 46. *Sea $f : M_1 \to M_2$ una inmersión, inyectiva o no. La imagen $f(M_1)$ es una subvariedad de M_2 si y sólo si f es abierta a la imagen.*

Idea de la demostración. No es difícil demostrarlo en el caso $M_1 =$ intervalo y $M_2 = \mathbb{R}^2$. Pasarlo al caso general sólo es cuestión de aumentar las dimensiones. $\square$

Corolario 47. *Sean $X \subseteq Y \subseteq M$, con M variedad y X, Y subvariedades de M. Entonces X es una subvariedad de Y.*

Demostración. La proposición 42 nos permite afirmar que la inclusión $j : X \hookrightarrow Y$ es una inmersión. Sabemos que la inclusión $i : X \hookrightarrow M$ es una inmersión abierta a la imagen: dado un abierto $U \subseteq X$, existe un abierto V de M tal que $U = i(U) = X \cap V$. Entonces, como $U \subseteq Y$, tenemos

$$j(U) \;=\; U \;=\; U \cap Y \;=\; (X \cap V) \cap Y \;=\; X \cap (Y \cap V) \;=\; X \cap W\ ,$$

donde $W = Y \cap V$ es un abierto de Y. Esto prueba que j es abierta a la imagen y por lo tanto $j(X) = X$ es una subvariedad de Y. $\square$

Corolario 48. *Si $f : M_1 \to M_2$ es una inmersión y su imagen $f(M_1)$ es una subvariedad de M_2, entonces f define un difeomorfismo local de M_1 a $f(M_1)$.*
Si además f es inyectiva, entonces define un difeomorfismo de M_1 a $f(M_1)$.

Demostración. Por la proposición 42 sabemos que f define una inmersión de $\alpha : M_1 \to f(M_1)$. Por el teorema 46 sabemos que α es abierta a la imagen. Por el teorema 41 podemos tomar un abierto $U \subseteq M_1$ tal que $f(U)$ es un abierto de $f(M_1)$ difeomorfo a U. Entonces:

$$\dim M_1 \;=\; \dim U \;=\; \dim f(U) \;=\; \dim f(M_1)\ .$$

Al ser α una inmersión entre variedades de igual dimensión, es un difeomorfismo local.
Si además f es inyectiva, entonces $\alpha : M_1 \to f(M_1)$ es un difeomorfismo local biyectivo, o sea un difeomorfismo. $\square$

Algunos nombres. Debido al corolario 48, algunas personas llaman **difeomorfismo a la imagen** a una inmersión inyectiva cuya imagen es una subvariedad. Otros nombre que también se les da a tales inmersiones es "incrustaciones" (**embeddings** en inglés).
Algunas personas llaman "subvariedad inmersa de M_2" ("immersed submanifold" en inglés) a un par (M_1, f) formado por una variedad M_1 y una inmersión inyectiva $f : M_1 \to M_2$. El ejemplo $\alpha\big((-1,\infty)\big)$, antes mencionado, muestra que estos objetos pueden no ser subvariedades y, ante la confusión que esto puede ocasionar, aquí evitaremos utilizar tal nombre.

Hay, empero, una condición *suficiente,* que por supuesto es *no local,* para que la imagen de una inmersión inyectiva sea una subvariedad.

Proposición 49. *Si $f : M_1 \to M_2$ es una inmersión inyectiva y la variedad M_1 es compacta, entonces la imagen $f(M_1)$ es una subvariedad de M_2. Además $f(M_1)$ es difeomorfa a M_1 por la biyección inducida $M_1 \to f(M_1)$.*

Demostración. Sea $U \subseteq M_1$ un abierto cualquiera. El complemento $M_1 \setminus U$ es un cerrado en el espacio compacto M_1, luego es compacto. Entonces $f(M_1 \setminus U)$, imagen continua de un compacto, es un subconjunto compacto de M_2. Como M_2 es Hausdorff, cualquier subconjunto compacto suyo es cerrado; en particular $f(M_1 \setminus U)$ es un cerrado de M_2.
Por otra parte, al ser f inyectiva se tiene $f(M_1 \setminus U) = f(M_1) \setminus f(U)$. Luego $f(U)$ es un abierto relativo de $f(M_1)$. Como U era un abierto cualquiera de M_1, queda demostrado que f es abierta a la imagen y sólo tenemos que aplicar el teorema 46 y el corolario 48. $\square$

2.9 Sobre la notación de las derivadas parciales

El propósito de este apartado es mostrar, con un ejemplo, un cierto peligro y cómo evitarlo. Sea M variedad de dimensión 3 y sea $(U,\varphi) = \big(U\,,\,(u_1,u_2,u_3)\big)$ una carta conteniendo un punto p. Formamos una nueva carta $\big(U\,,\,(v_1,v_2,v_3)\big)$ definiendo:

$$v_1 \;\equiv\; u_1 \quad , \quad v_2 \;\equiv\; u_1+u_2 \quad , \quad v_3 \;\equiv\; u_1^2-5u_2+u_3 \;,$$

cambio que se deshace así:

$$u_1 \;\equiv\; v_1 \quad , \quad u_2 \;\equiv\; v_2-v_1 \quad , \quad u_3 \;\equiv\; v_3-v_1^2-5v_1+5v_2 \;.$$

Calculamos:

$$\left.\frac{\partial}{\partial v_1}\right|_p \;=\; \left(\frac{\partial u_1}{\partial v_1}\right)_p\cdot\left.\frac{\partial}{\partial u_1}\right|_p+\left(\frac{\partial u_2}{\partial v_1}\right)_p\cdot\left.\frac{\partial}{\partial u_2}\right|_p+\left(\frac{\partial u_3}{\partial v_1}\right)_p\cdot\left.\frac{\partial}{\partial u_3}\right|_p \;=\; \left.\frac{\partial}{\partial u_1}\right|_p-\left.\frac{\partial}{\partial u_2}\right|_p-(2v_1+5)\cdot\left.\frac{\partial}{\partial u_3}\right|_p \;.$$

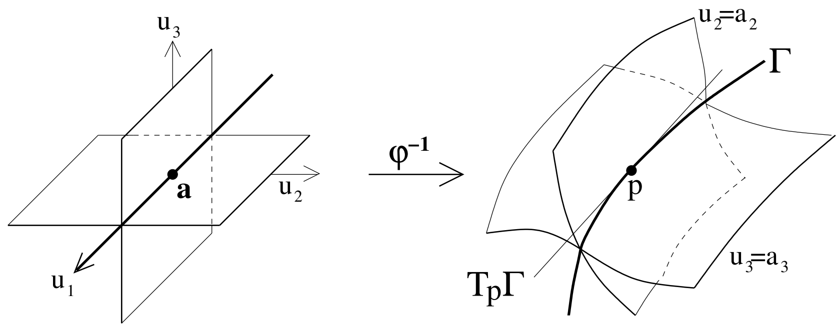
Observamos que las funciones u_1 y v_1 son idénticas, pero $\left.\dfrac{\partial}{\partial u_1}\right|_p$ y $\left.\dfrac{\partial}{\partial v_1}\right|_p$ son muy distintos.
El peligro es que hubiésemos denotado la segunda carta "$\big(U\,,\,(u_1,v_2,v_3)\big)$", porque entonces estaríamos intentando ¡denotar con una sola fórmula $\left.\dfrac{\partial}{\partial u_1}\right|_p$ dos objetos diferentes entre sí!

> Cuando se cambian de coordenadas deben cambiarse *todas* las letras porque, al contrario que la diferencial $(du_i)_p$, el vector $\left.\dfrac{\partial}{\partial u_i}\right|_p$ no está determinado sólo por la función coordenada u_i.

Ésta es una limitación que tiene la notación de las derivadas parciales. Para entender el fenómeno, veamos de manera más concreta cómo depende el vector $X_p = \left.\dfrac{\partial}{\partial u_1}\right|_p$ de las tres funciones coordenadas. Es el único vector tangente a M en p que cumple las condiciones:

$$X_p u_1 \;=\; 1 \quad , \quad X_p u_2 \;=\; 0 \quad , \quad X_p u_3 \;=\; 0 \,.$$

Sea $\mathbf{a} = \big(u_1(p),u_2(p),u_3(p)\big) = (a_1,a_2,a_3)$. De las tres condiciones que definen X_p, las dos últimas dicen que es tangente a las superficies $S_2 = \{u_2 = a_2\}$ y $S_3 = \{u_3 = a_3\}$, luego tangente a $\Gamma = \{u_2 = a_2\,,\,u_3 = a_3\} = S_2 \cap S_3$ que es una curva pasando por p. De este modo la **dirección** del vector X_p es la recta $\langle X_p\rangle = T_p\Gamma$ y depende *solamente* de las funciones u_2,u_3.



Dentro de la recta $T_p\Gamma$, la primera condición $X_p u_1 = 1$ se limita a decir en cuál de los dos **sentidos** apunta X_p y cuán largo o corto es. Vemos, así, lo importantes que son u_2,u_3 en la determinación de X_p.
Lo que $\left.\dfrac{\partial}{\partial u_1}\right|_p$ significa es "el vector que da derivada igual a 1 con la *primera* coordenada y derivada nula con las *demás* funciones coordenadas".
En general, $\left.\dfrac{\partial}{\partial u_i}\right|_p$ significa "el vector que da derivada igual a 1 con la i-ésima coordenada y da derivada nula con las demás coordenadas". La dirección de este vector la deteminan las coordenadas $u_1,\dots,u_{i-1},u_{i+1},\dots,u_n$.