3.8. Problemas

Problema 3.1 Para las cuatro señales de la Figura 3.43:

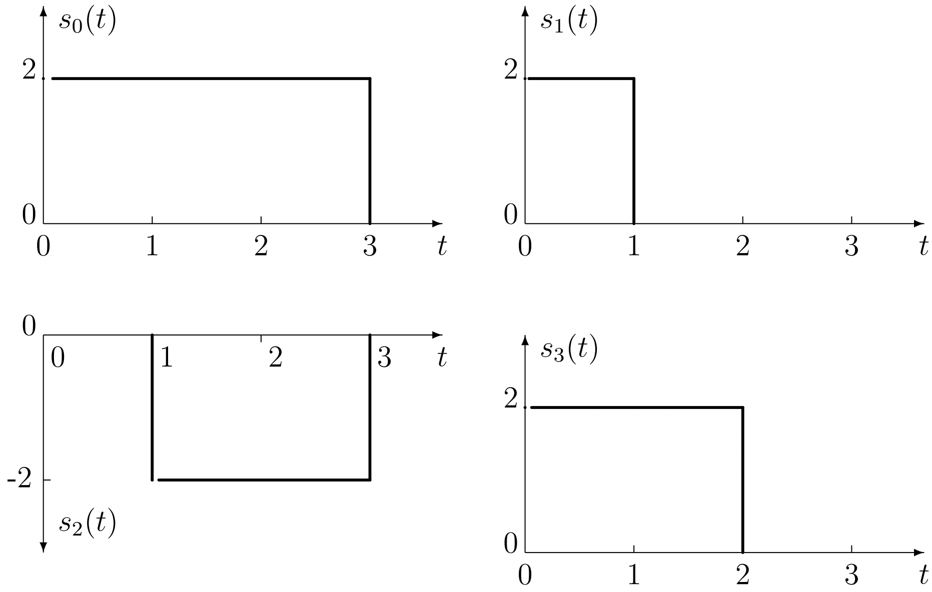

Figura 3.43: Señales para el Problema 3.1.

a) Encuentre un conjunto de señales ortonormales, que formen una base, aplicando el procedimiento de Gram-Schmidt. ¿Cuál es la dimensión del espacio de señales resultante?

b) Obtenga las coordenadas de cada señal en la base correspondiente.

Problema 3.2 Para las tres señales de la Figura 3.44:

a) Encuentre un conjunto de señales ortonormales, que formen una base, aplicando el procedimiento de Gram-Schmidt. ¿Cuál es la dimensión del espacio de señales resultante?

b) Obtenga las coordenadas de cada señal en la base correspondiente.

c) Calcule, a partir de dichas coordenadas, la energía de cada señal.

d) Calcule, a partir de dichas coordenadas, la distancia entre cada par de señales.

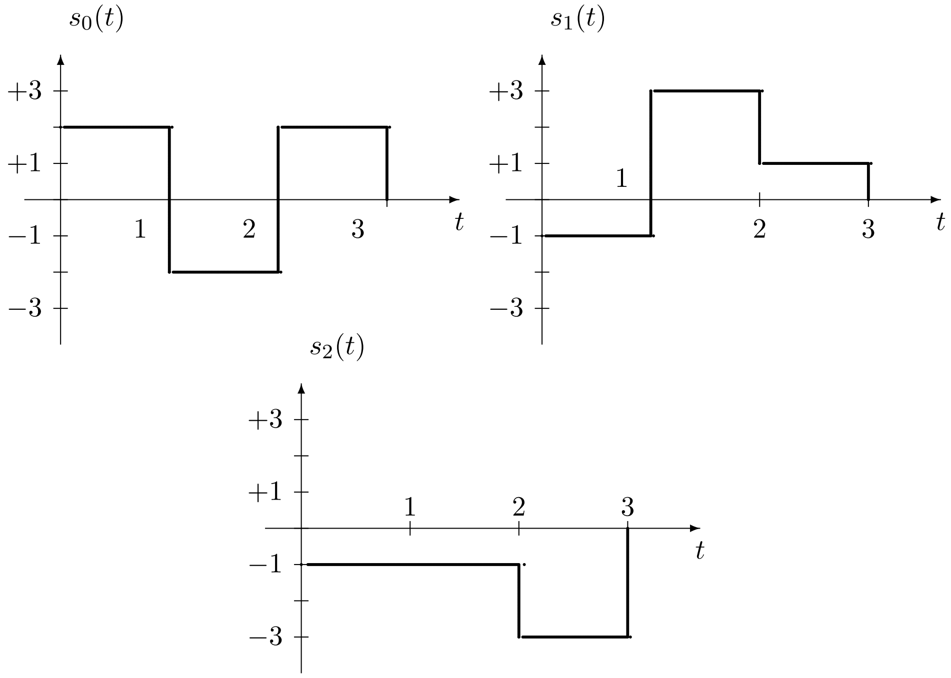

Figura 3.44: Señales para el Problema 3.2.

Problema 3.3 Determine la energía media por símbolo de un conjunto de M señales PAM de la forma

$$s_m(t) = s_m\phi(t),$$

con $m = 1, \cdots, M$ y $0 \leq t < T$, donde $\phi(t)$ es el elemento de la base ortonormal extraido a partir de una señal pulso genérica de energía E_g. Los coeficientes s_m toman la forma

$$s_m = \sqrt{E_g}A_m.$$

Los coeficientes A_m están distribuidos de forma simétrica y equiespaciada (distancia constante d) con respecto al origen del sistema de coordenadas de la base, de tal modo que

$$A_m = 2m - 1 - M.$$

Problema 3.4 Considere el conjunto de señales $\{\phi_i(t)\}_{i=0}^{2}$ mostrados en la Figura 3.45

1. Demuestre que el conjunto de señales son ortonormales.

2. Exprese la forma de onda $x(t)$ como una combinación lineal del conjunto de ondas

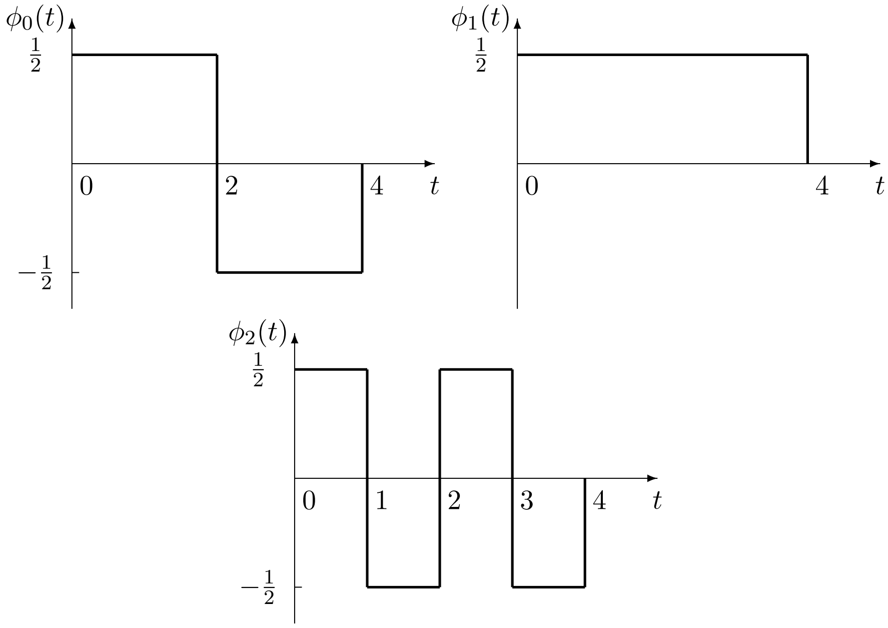

Figura 3.45: Conjunto de señales Problema 3.4.

$\phi_i(t)$ si

$$x(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leq t \leq 1 \\ +1, & 1 \leq t \leq 3 \\ -1, & 3 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

y determine los coeficientes de la expansión (coordenadas en la base).

3. Repita lo mismo para

$$x(t) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}t\right), \ 0 \leq t < 4.$$

Problema 3.5 Considere las cuatro señales de la Figura 3.46

1. Determine la dimensión del espacio de señales asociado.
2. Represente las cuatro formas de onda mediante los vectores $\boldsymbol{s}_i$ en la base ortonormal resultante.
3. Determine la distancia mínima entre cualquier par de vectores.

Problema 3.6 Suponga que dos señales $s_0(t)$ y $s_1(t)$ reales son ortogonales en el intervalo $(0, T)$. Un proceso real $n(t)$ blanco de media cero es correlado con las señales para obtener

$$n_0 = \int_0^T s_0(t)n(t)dt$$

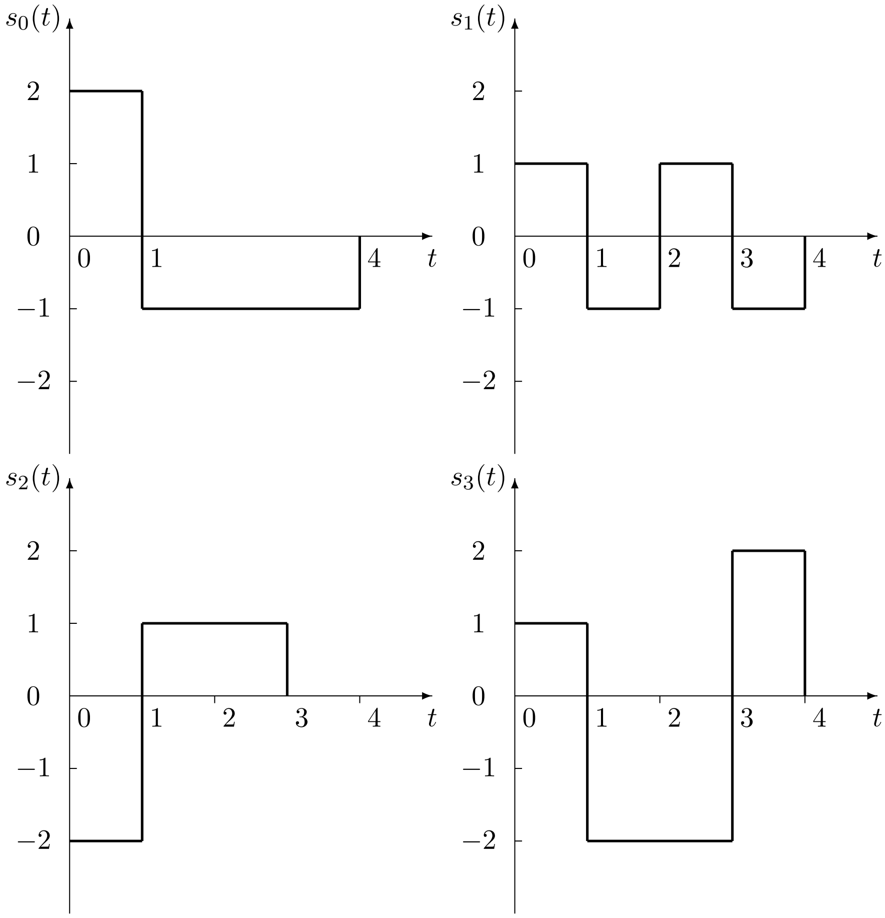

Figura 3.46: Conjunto de señales Problema 3.5.

$$n_1 = \int_0^T s_1(t)n(t)dt$$

Demuestre que $E[n_0 n_1] = 0$.

Problema 3.7 Dadas las tres señales de la Figura 3.47, ¿qué par de ellas seleccionaría para implementar una modulación binaria (con dós símbolos) con el objeto de minimizar la probabilidad de error? Justifique la respuesta.

Problema 3.8 Una sistema de comunicaciones binario utiliza las señales

$$s_0(t) = 0, \quad 0 \leq t < T$$

$$s_1(t) = A, \quad 0 \leq t < T$$

para transmitir la información. El demodulador correla la señal recibida $r(t)$ con $s_1(t)$ y muestrea la salida del correlador en $t = T$.

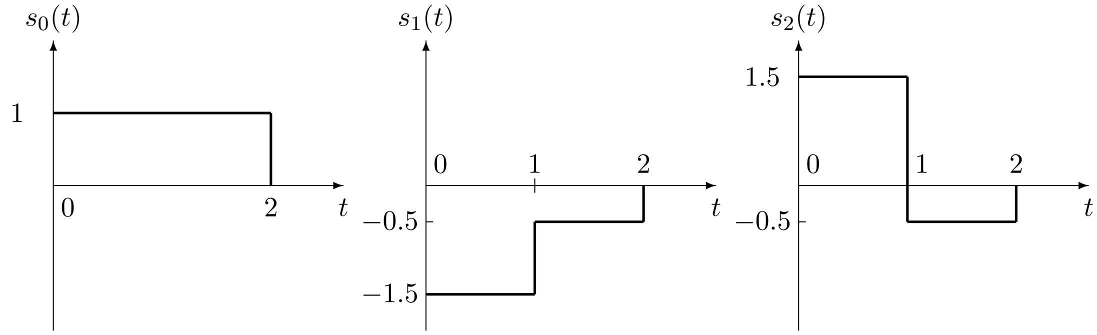

Figura 3.47: Señales para el Problema 3.7.

1. Determine el detector óptimo para un canal gausiano, así como el umbral de decisión óptimo asumiendo que las señales son equiprobables.

2. Obtenga la expresión de la función densidad de probabilidad de las observaciones a la salida del demodulador condicionada a la transmisión de cada símbolo.

3. Determine la probabilidad media de error como una función de la relación E_s/N_o. Compare este resultado con el obtenido para el modelo binario unidimensional simétrico en el que las señales $s_0(t)$ y $s_1(t)$ son opuestas.

Problema 3.9 Un sistema binario, que emplea una constelación unidimensional simétrica con respecto al origen, presenta distintas probabilidades para los dos símbolos, p y $1-p$ respectivamente. El detector óptimo está entonces determinado por el criterio MAP.

1. Determine la probabilidad media de error como una función de E_s/N_o y p.

2. Evalúe la probabilidad de error para $p = 0.3$ y $p = 0.5$, con $E_s/N_o = 10$.

Problema 3.10 La señal recibida en un sistema de comunicación binario unidimensional con constelación $a_0 = A$ y $a_1 = -A$ es

$$r(t) = s(t) + n(t),$$

donde $s(t)$ es la señal de la Figura 3.48 y $n(t)$ es un proceso de ruido blanco gausiano de media nula y densidad espectral de potencia $N_o/2$.

1. Dibuje la respuesta al impulso de filtro adaptado a la señal $s(t)$.

2. Dibuje la salida del filtro adaptado a la señal $s(t)$.

3. Determine la varianza de ruido de la salida del filtro adaptado en $t = 3$.

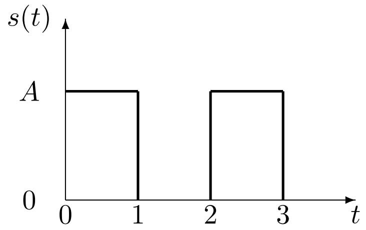

Figura 3.48: Conjunto de señales Problema 3.10.

4. Determine la probabilidad de error como una función de A y N_o.

Problema 3.11 Dibuje la respuesta al impulso del filtro adaptado a las señales de la Figura 3.49. Calcule también y dibuje las salida de cada uno de los filtros adaptados.

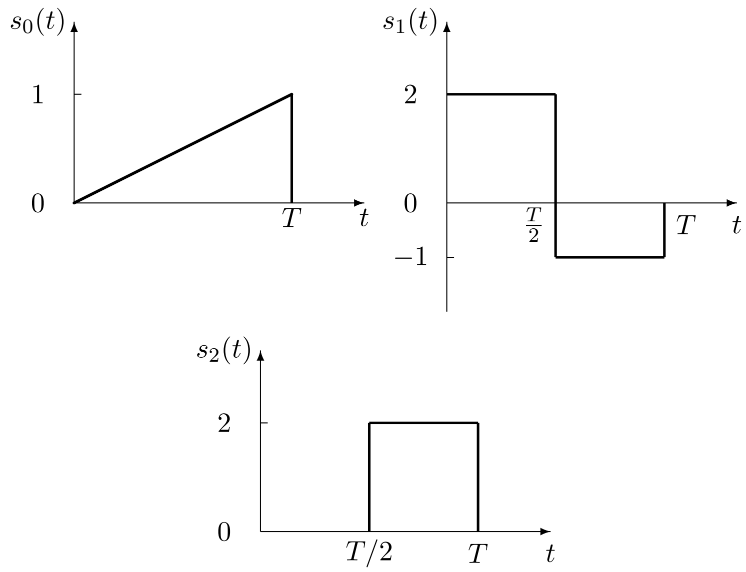

Figura 3.49: Conjunto de señales Problema 3.11.

Problema 3.12 Tres símbolos b_0, b_1 y b_2 se transmiten sobre un canal gausiano con densidad espectral de potencia $N_o/2$. Las señales empleadas para transmitir cada símbolo por el canal de comunicaciones son

$$s_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < T \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$s_1(t) = -s_2(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ -1, & \frac{T}{2} \leq t < T \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} .$$

1. ¿Cual es la dimensión del espacio de señales?
2. Encuentre una base apropiada para el espacio de señales.
3. Dibuje la constelación de las señales para este problema.
4. Obtenga y dibuje las regiones de decisión I_0, I_1 e I_2 óptimas.
5. ¿Cual de los tres símbolos es más vulnerable a los errores y por qué? En otras palabras, ¿para que mensaje $P_{e|b_i}$ es mayor?

Problema 3.13 En un esquema binario unidimensional simétrico las señales utilizadas son

$$s_0(t) = -s_1(t) = \begin{cases} \frac{2At}{T}, & 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ 2A\left(1 - \frac{t}{T}\right), & \frac{T}{2} \leq t < T \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El canal es un canal gausiano con densidad espectral de potencia $S_n(j\omega) = \frac{N_o}{2}$. Las señales tienen probabilidades a priori p_0 y $p_1 = 1 - p_0$.

1. Determine la estructura del receptor óptimo.
2. Calcule la probabilidad de error.
3. Dibuje la probabilidad de error como una función de p_0 para $0 \leq p_0 \leq 1$.

Problema 3.14 Considere un detector de señal con una entrada

$$r = \pm A + n,$$

donde $+A$ y $-A$ se producen con igual probabilidad y n es un término de ruido caracterizado por una función densidad de probabilidad Laplaciana

$$f_n(n) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} e^{-|n|\frac{\sqrt{2}}{\sigma}}$$

1. Determine la probabilidad de error como una función de los parámetros A y σ.
2. Determine la relación señal a ruido requerida para alcanzar una probabilidad de error de 10^{-5}. ¿Como es esta relación comparada con el caso de la distribución gausiana?

Problema 3.15 Considere un sistema de comunicaciones digitales M-ario donde $M = 2^N$ y N es la dimensión del espacio de señales. Suponga que los M vectores de la constelación se sitúan en los vértices del hipercubo que está centrado en el origen. Determine la probabilidad media de error de símbolo como una función de E_s/N_0, donde E_s es la energía media por símbolo, la densidad espectral de potencia del ruido blanco y gausiano es $N_o/2$ y todos los símbolos son igualmente probables.

Problema 3.16 Un sistema de comunicaciones digitales en banda base utiliza las señales mostradas en la Figura 3.50 a) para la transmisión de dos símbolos equiprobables. Se asume que el canal no introduce atenuación y que el ruido es gausiano con densidad espectral de potencia $N_0/2$.

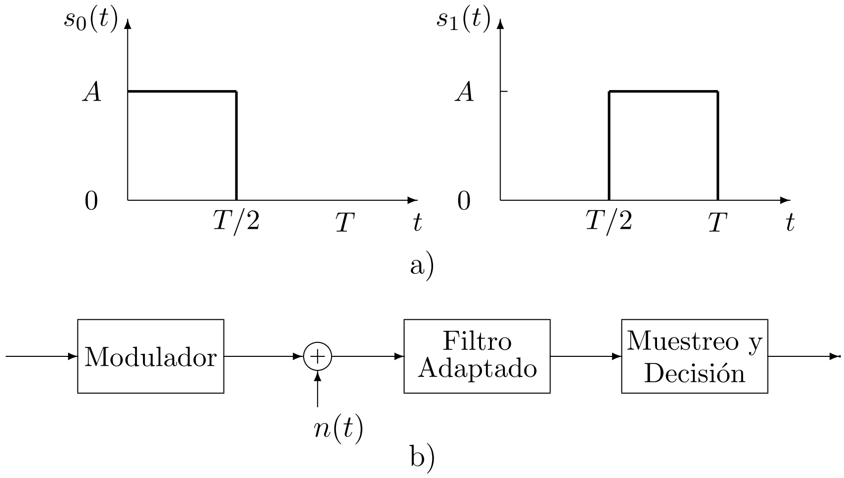

Figura 3.50: Conjunto de señales y sistema Problema 3.16.

1. Encuentre una base ortonormal apropiada para la representación de las señales.

2. En un diagrama de bloques, proporcione las especificaciones del receptor óptimo utilizando filtros adaptados.

3. Calcule la probabilidad de error del receptor óptimo.

4. Demuestre que el receptor óptimo se puede implementar utilizando un único filtro (vease diagrama de bloques de la Figura 3.50 b)). ¿Cuales son las características del filtro adaptado y del dispositivo de muestreo y decisión?

5. Si se asume que el canal no es ideal, sino que tiene una respuesta al impulso
$$h(t) = \delta(t) + \frac{1}{2}\delta\left(t - \frac{T}{2}\right).$$
Utilizando el mismo filtro adaptado empleado en el apartado anterior, diseñe un receptor óptimo.

6. Si el canal tiene una respuesta al impulso
$$h(t) = \delta(t) + a\delta\left(t - \frac{T}{2}\right),$$
donde a es una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $[0, 1]$, y utilizando el mismo filtro adaptado, diseñe de nuevo el receptor óptimo.

Problema 3.17 Considere las dos constelaciones de 8 puntos mostradas en la Figura 3.51. La mínima distancia entre símbolos adyacentes es $2A$. Calcule la energía media por símbolo para cada constelación asumiendo que todos los puntos de la señal son igualmente probables. ¿Qué constelación es más eficiente?

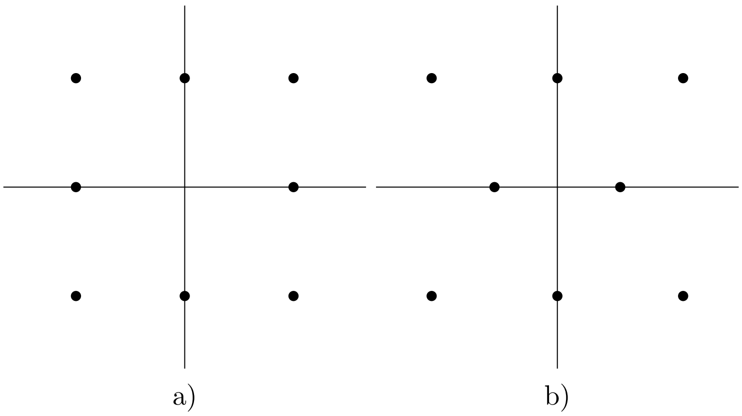

Figura 3.51: Constelaciones Problema 3.17.

Problema 3.18 Considere las constelaciones de ocho puntos mostradas en la Figura 3.52

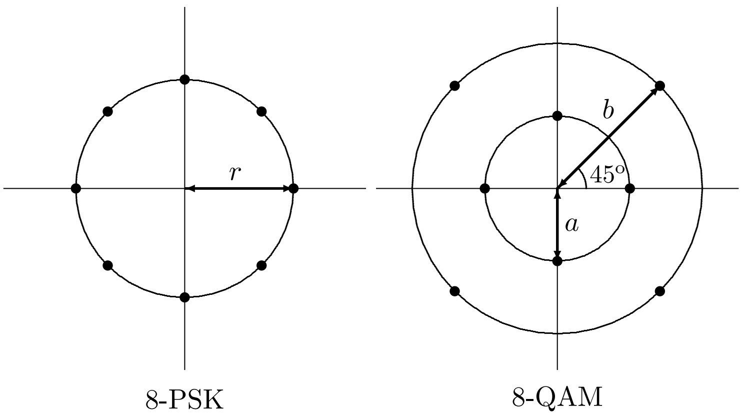

Figura 3.52: Constelaciones Problema 3.18.

1. Los puntos más cercanos en la constelación 8-QAM están separados una distancia A. Calcule los radios a y b de los círculos interior y exterior.

2. Los puntos adyacentes en la constelación 8-PSK están separados una distancia A. Determine el radio r del círculo.

3. Calcule la energía media por símbolo para ambas constelaciones y compare los resultados si se consideran los símbolos equiprobables.

Problema 3.19 Considere un conjunto de M señales ortogonales

$$s_m(t), \qquad 0 \leq m \leq M-1,\ 0 \leq t \leq T,$$

todas ellas con energía $\mathcal{E}$. A partir de estas señales se define un nuevo conjunto de M señales como

$$s'_m(t) = s_m(t) - \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M-1} s_k(t), \qquad 0 \leq m \leq M-1,\ 0 \leq t \leq T.$$

a) Calcule la media de las señales $s'_m(t)$.

b) ¿Forman estas señales una base ortogonal?

Problema 3.20 Un sistema de comunicaciones binario emplea pulsos rectangulares de duración T y amplitudes $\pm A$ para transmitir información a una velocidad de 100 Kbps. Si la densidad espectral de potencia del ruido aditivo gausiano es $N_0/2$, con $N_0 = 10^{-2}$ W/Hz, determine el valor de A necesario para obtener una probabilidad de error $P_e = 10^{-6}$, suponiendo símbolos igualmente probables.

Problema 3.21 Un sistema de comunicaciones binario utiliza una constelación con dos símbolos, $\boldsymbol{a}_0 = +A$ y $\boldsymbol{a}_1 = 0$. Si se transmite sobre un canal aditivo gausiano, y las probabilidades de los símbolos son $p_A(\boldsymbol{a}_0) = 1/3$, y $p_A(\boldsymbol{a}_1) = 2/3$:

a) Calcule el decisor óptimo (es decir, calcule el umbral de decisión).

b) Calcule la probabilidad de error.

Problema 3.22 Dos símbolos equiprobables se transmiten a través de un canal aditivo gausiano con densidad espectral de potencia $N_0/2$. Los símbolos se transmiten por medio de las siguientes señales

$$s_0(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y

$$s_1(t) = s_0(t-1).$$

Se está empleando el receptor mostrado en la Figura 3.53.

a) ¿Es este receptor óptimo? Si no lo es, diseñe el receptor (demodulador + decisor) óptimo y calcule la probabilidad de error para el mismo.

b) Calcule el decisor óptimo para el sistema de la Figura 3.53 suponiendo (aunque no sea cierto) que las componentes de ruido en q_0 y q_1 están incorreladas, obtenga la probabilidad de error, y compárela con la del receptor óptimo.

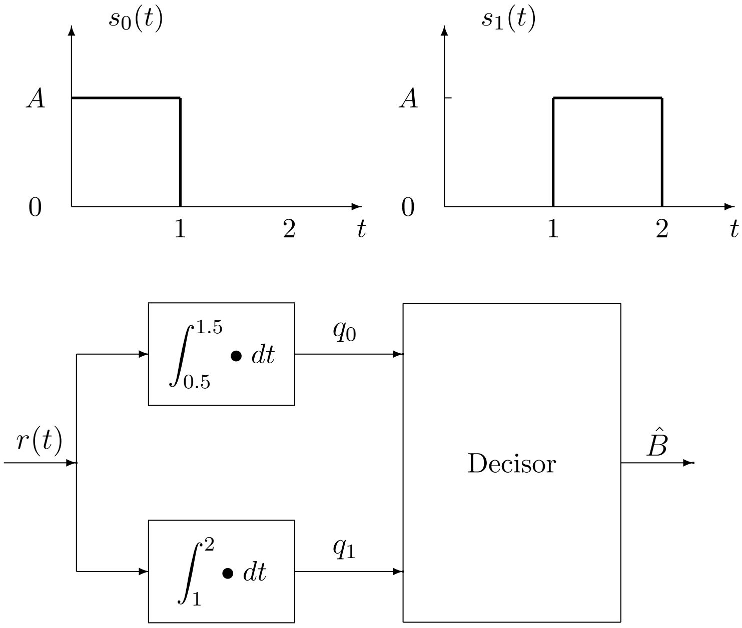

Figura 3.53: Señales y receptor del Problema 3.22.

Problema 3.23 Se tiene la constelación de la Figura 3.54. Se supone que los símbolos tienen la misma probabilidad. Tomando $T = 1$

a) Calcule al energía media por símbolo, E_s.

b) Diseñe una constelación alternativa que, con la misma probabilidad de error, tenga la mínima energía media por símbolo. Calcule el nuevo valor de E_s.

c) Para cualquiera de las dos constelaciones, obtenga un límite de la probabilidad de error mediante la cota de la unión y la cota holgada.

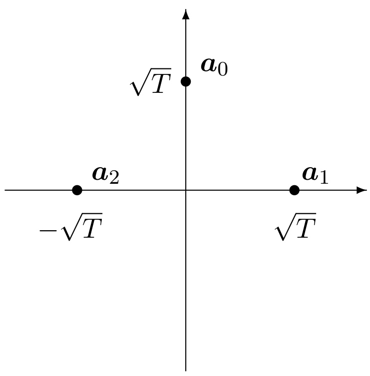

Figura 3.54: Constelación Problema 3.23.

Problema 3.24 Para la implementación de un sistema de comunicaciones de tres símbolos equiprobables, el modulador transmite las tres señales mostradas en la Figura 3.55.

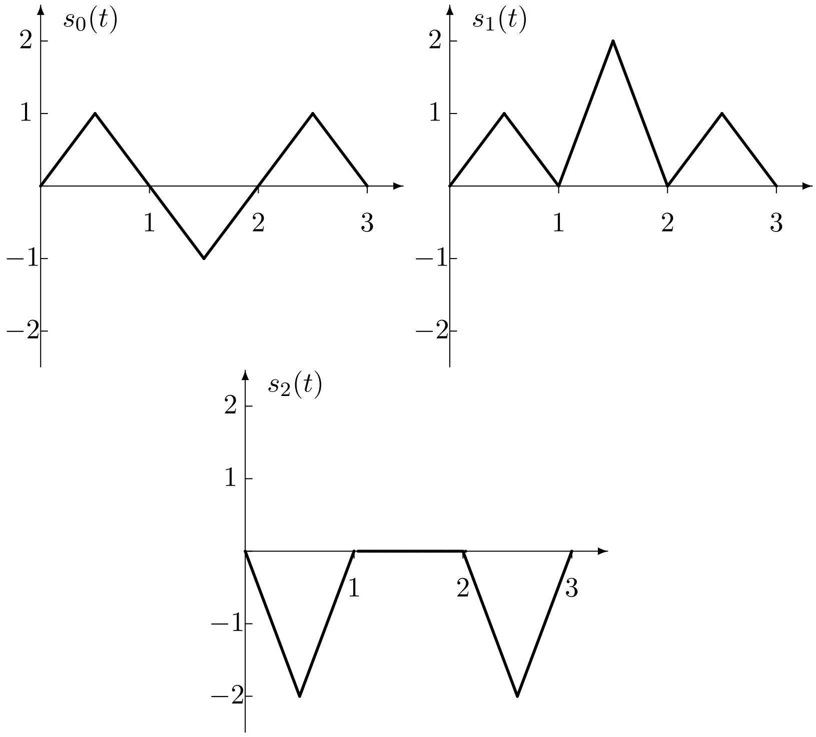

Figura 3.55: Señales Problema 3.24.

a) Calcule la energía media por símbolo.

b) Calcule alguna cota de la probabilidad de error.

Problema 3.25 Un sistema de comunicaciones emplea la constelación representada en la Figura 3.56. En las observaciones proporcionadas por el demodulador, caracterizadas por el canal discreto equivalente

$$q = A + n,$$

el término de ruido, n, tiene la función densidad de probabilidad representada en la Figura 3.56.

a) Obtenga la expresión analítica de la función densidad de probabilidad de la observación condicionada a la transmisión de cada símbolo (es decir, $f_{q|A}(q|a_i)$, para todo i).

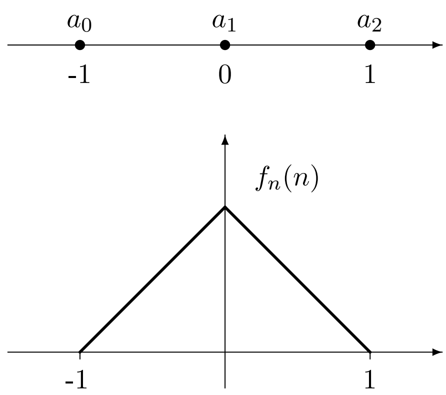

Figura 3.56: Constelación y función densidad de probabilidad del término de ruido para el Problema 3.25.

b) Diseñe el decisor óptimo para símbolos equiprobables.

c) Calcule la probabilidad de error para el decisor anterior.

d) Diseñe el decisor óptimo para las siguientes probabilidades de símbolo: $p_A(a_0) = p_A(a_2) = 1/4$, $p_A(a_1) = 1/2$.

e) Calcule la probabilidad de error para el decisor anterior.

Problema 3.26 Un sistema de comunicaciones binario utiliza las siguientes señales para la transmisión de los dos símbolos:

$$s_0(t) = -s_1(t) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{E_b}{N_0}}, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

El receptor se implementa como se muestra en la Figura 3.57.

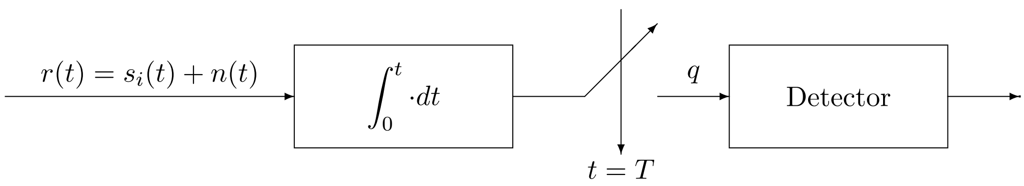

Figura 3.57: Receptor para el Problema 3.26.

Determine la relación señal a ruido a la salida del demodulador (en q), suponiendo que el ruido aditivo es de media nula, gausiano y con densidad espectral de potencia $N_0/2$ W/Hz.

Problema 3.27 Un filtro adaptado tiene la siguiente respuesta en frecuencia

$$H(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega}$$

a) Determine la respuesta al impulso $h(t)$.

b) Determine la señal a la que está adaptado este filtro.

Problema 3.28 El código de línea de Mánchester utiliza las señales de la Figura 3.58 para transmitir los dos símbolos del código.

a) Determine la probabilidad de error si ambos símbolos se transmiten con igual probabilidad.

b) Determine la probabilidad de error si la probabilidad de los símbolos es $p_A(a_0) = p$ y $p_A(a_1) = 1 - p$.

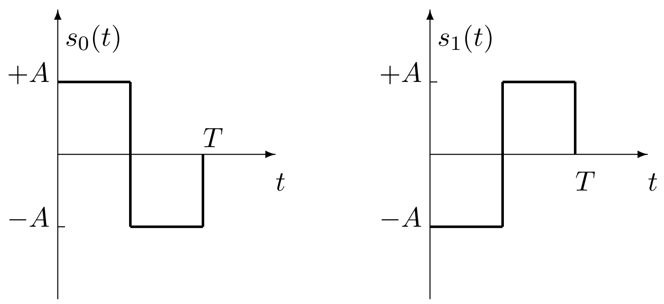

Figura 3.58: Señales para el Problema 3.28.

Problema 3.29 Un sistema de comunicaciones utiliza la constelación de la Figura 3.59 para transmitir tres símbolos.

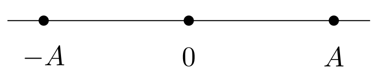

Figura 3.59: Constelación para el Problema 3.29.

Considerando que los símbolos son igualmente probables, un ruido aditivo blanco y gausiano, de densidad espectral de potencia $N_0/2$ W/Hz, y empleando un demodulador adecuado

a) Diseñe el decisor óptimo.

b) Calcule la probabilidad de error media del sistema.

Problema 3.30 Considere un sistema digital de comunicaciones que transmite la información empleando una constelación QAM sobre un canal de voz a una tasa binaria de 2400 baudios (símbolos/s). Se asume ruido aditivo blanco y gausiano.

a) Determine la relación E_b/N_0 requerida para conseguir una probabilidad de error de 10^{-5} para una tasa binaria de 4800 bits/s.

b) Repita el cálculo para una tasa binaria de 9600 bits/s.

c) Repita el cálculo para una tasa binaria de 19200 bits/s.

d) Exponga las conclusiones obtenidas a partir de estos resultados.

Problema 3.31 Un sistema de comunicaciones emplea la constelación mostrada en la Figura 3.60.

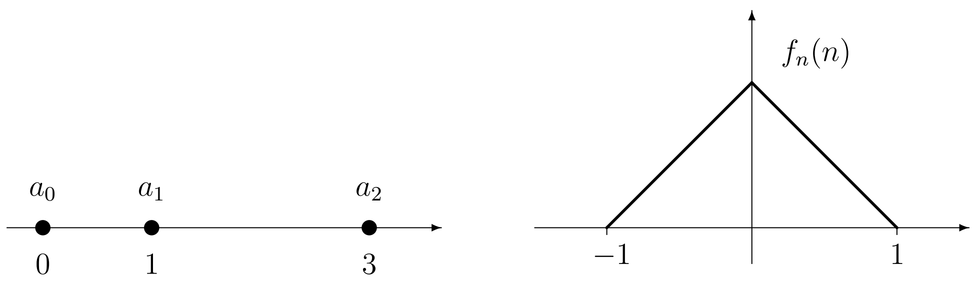

Figura 3.60: Señales para el Problema 3.31.

Dibuje la función densidad de probabilidad de las observaciones a la salida del demodulador condicionada a la transmisión de cada símbolo, $f_{Q|A}(q|a_i)$, $i = 0, 1, 2$, diseñe el decisor óptimo, y calcule la probabilidad de error cuando el término de ruido a la salida del demodulador tiene las siguientes características:

a) Es ruido gausiano con varianza $N_0/2$, y los símbolos son equiprobables.

b) Es ruido uniforme en el intervalo $(-1, 1)$, y los símbolos son equiprobables.

c) Es ruido uniforme en el intervalo $(-1, 1)$, y los símbolos se transmiten con las siguientes probabilidades: $p_A(a_0) = 1/4$, $p_A(a_1) = 1/2$, $p_A(a_2) = 1/4$.

d) Tiene la función densidad de probabilidad de la Figura 3.60, $f_n(n)$, y los símbolos son equiprobables.

e) Tiene la función densidad de probabilidad de la Figura 3.60, $f_n(n)$, y los símbolos se transmiten con las siguientes probabilidades: $p_A(a_0) = 1/4$, $p_A(a_1) = 1/2$, $p_A(a_2) = 1/4$.

Problema 3.32 Un sistema de comunicaciones transmite dos símbolos mediante las señales $s_0(t)$ y $s_1(t)$ que se muestran a continuación en la Figura 3.61

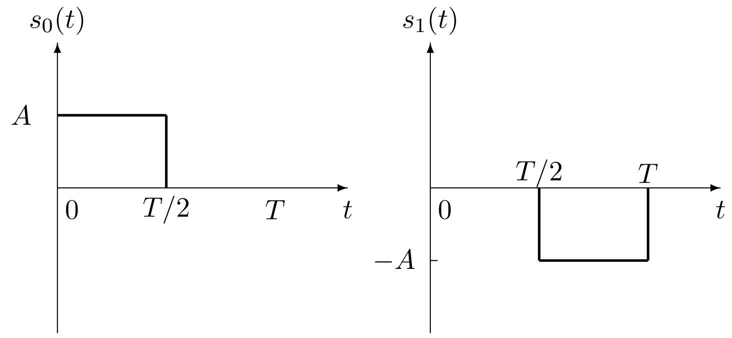

Figura 3.61: Señales para el Problema 3.32.

a) Se tiene un canal aditivo gausiano (ruido blanco con densidad espectral de potencia $N_0/2$). Dibuje la constelación, diseñe el receptor (demodulador + decisor) óptimo, y calcule la probabilidad de error.

b) Si el canal es tal que su salida a una entrada $s(t)$ es $\alpha s(t) + \alpha A$, de nuevo con el mismo tipo de ruido aditivo, rediseñe el decisor óptimo y calcule la probabilidad de error.

c) Si en la situación del apartado a) se utiliza el demodulador de la Figura 3.62, diseñe el decisor óptimo y calcule le probabilidad de error en este caso. Comente los resultados comparándolos con los obtenidos en el apartado a).

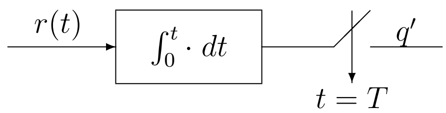

Figura 3.62: Demodulador para el Problema 3.32.

NOTA: Tenga en cuenta que si no se emplea un demodulador normalizado, la varianza de ruido discreto ya no es $N_0/2$.

Problema 3.33 Las cuatro señales de la Figura 3.63 se utilizan para transmitir 4 símbolos igualmente probables en un sistema de comunicaciones. Se considera que dichas señales se transmiten a través de un canal gausiano con densidad espectral de potencia $N_0/2$.

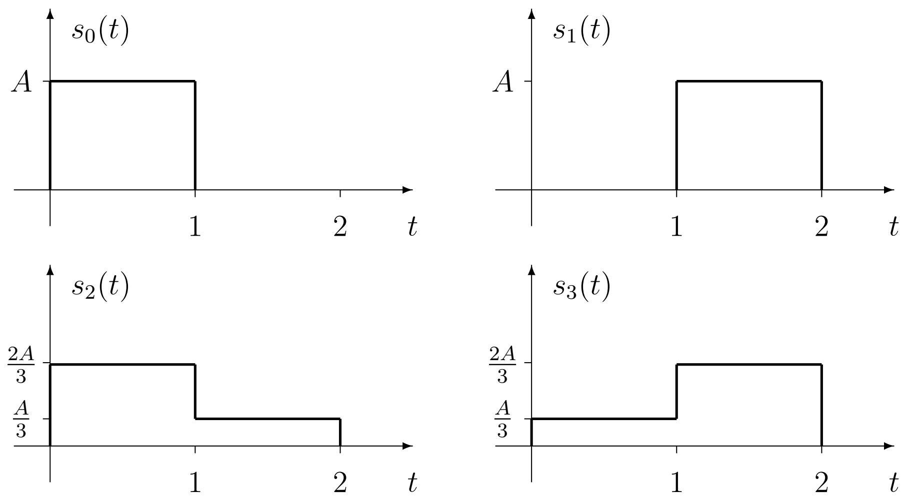

Figura 3.63: Señales para el Problema 3.33.

a) Diseñe el transmisor: codificador (constelación) y modulador ($\{\phi_i(t)\}, i = 0, 1, \cdots, N$).

b) Calcule la energía media por símbolo del sistema, y realice una asignación óptima de bits a cada símbolo.

c) Diseñe el receptor óptimo (demodulador + decisor) utilizando filtros adaptados causales (hay que proporcionar la expresión analítica o dibujarlos), obtenga las expresiones de la función densidad de probabilidad de la observación a la salida del demodulador condicionada a la transmisión de cada símbolo ($f_{\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{q}|\boldsymbol{a}_i)$, $i = 0, 1, 2, 3$), y calcule la probabilidad de error.

d) Si se utiliza el demodulador de la Figura 3.64, diseñe el decisor óptimo, obtenga las expresiones de la función densidad de probabilidad de la observación a la salida del demodulador condicionada a la transmisión de cada símbolo ($f_{Q|A}(q|\boldsymbol{a}_i)$, $i = 0, 1, 2, 3$), y calcule la probabilidad de error. Compare este valor con el obtenido en el apartado anterior y explique los resultados obtenidos.

Problema 3.34 Se va a diseñar un sistema de comunicaciones que utilizará las cuatro señales de la Figura 3.65 para transmitir cuatro símbolos con igual probabilidad. El canal únicamente introduce ruido, que se considerará blanco, gausiano, estacionario y con densidad espectral de potencia $N_0/2$.

a) Diseñe el receptor óptimo (demodulador + decisor). Para el demodulador utilice filtros adaptados causales (se han de proporcionar las expresiones analíticas de los filtros causales o se han de dibujar). Para el decisor, defina las regiones de decisión óptimas (de forma analítica o mediante un dibujo).

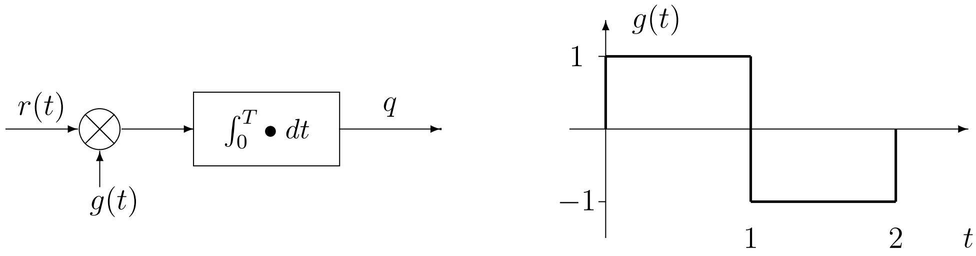

Figura 3.64: Demodulador para el Problema 3.33.

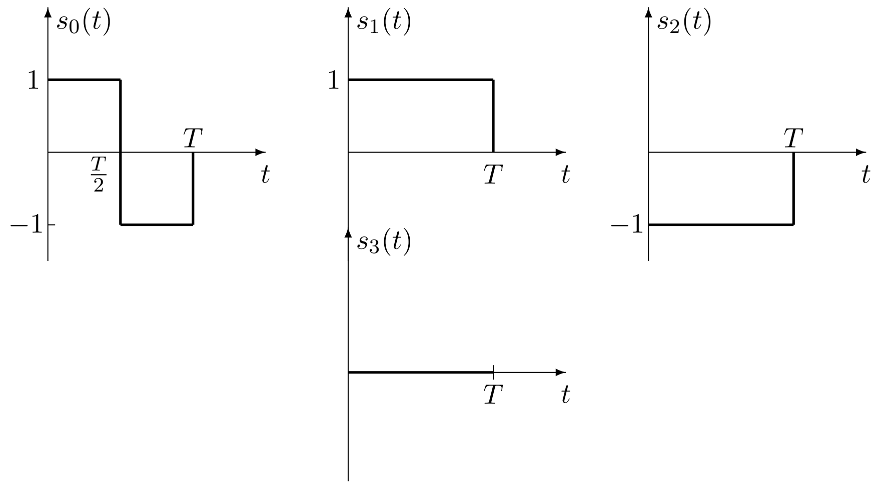

Figura 3.65: Señales para el Problema 3.34.

b) Acote la probabilidad de error mediante la cota holgada y la cota de la unión.

c) Si se utiliza el demodulador de la Figura 3.66, diseñe ahora el decisor óptimo y calcule la probabilidad de error. Compárela con la obtenida con el receptor óptimo desarrollado en el apartado a).

Problema 3.35 Se tiene un sistema de comunicaciones con un transmisor con una tasa de símbolo $R_s = 10^3$ baudios. Se asume ruido aditivo blanco, gausiano, y densidad espectral de potencia $N_0/2$, con $N_0 = 2 \times 10^{-2}$.

a) Una aproximación comúnmente empleada en sistemas de comunicaciones digitales para la probabilidad de error de símbolo es

$$P_e \approx k \cdot Q\left(\frac{d_{min}}{2\sqrt{N_o/2}}\right), \tag{3.2}$$

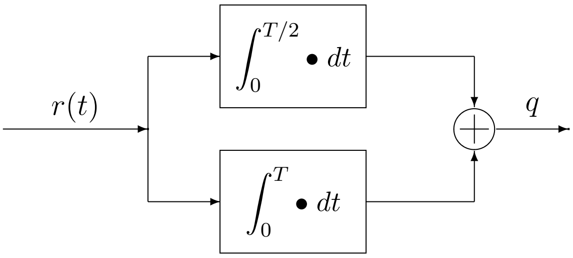

Figura 3.66: Demodulador para el Problema 3.34.

donde d_{min} es la mínima distancia entre dos puntos de la constelación y k es el máximo número de símbolos que se encuentran a d_{min} de un símbolo de la constelación.

1. Utilizando la aproximación (3.2), diseñe el codificador unidimensional óptimo del sistema de comunicaciones, con la menor energía media por símbolo, para obtener una probabilidad de error de símbolo aproximada $P_e \approx 2 \cdot 10^{-4}$ transmitiendo a una velocidad binaria $R_b = 2 \times 10^3$ bits/s.
2. Realice una asignación óptima de bits a cada símbolo, explicando la razón de dicha asignación, y calcule la tasa de error binaria aproximada.

b) Si el sistema de comunicaciones utiliza el codificador y el modulador definidos en la Figura 3.67:

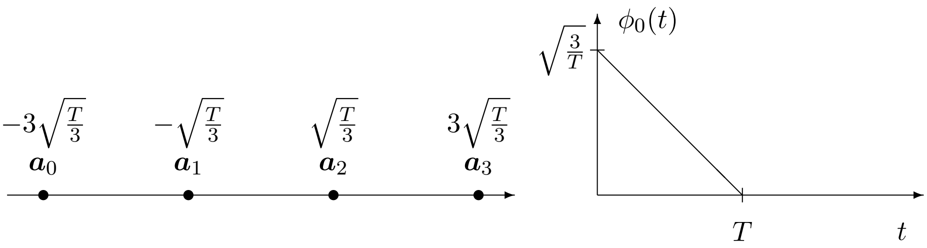

Figura 3.67: Codificador y modulador para el Problema 3.35.

1. Diseñe el demodulador óptimo utilizando un correlador y utilizando un filtro adaptado causal (en este último caso proporcione la expresión analítica de la respuesta al impulso del filtro o bien dibújela).
2. Si por simplicidad, en lugar del demodulador óptimo se emplea un demodulador que realiza la siguiente operación sobre la señal recibida ($r(t)$)

$$q = 2 \cdot \int_0^T r(t)dt,$$

diseñe el decisor óptimo y calcule la probabilidad de error de símbolo asumiendo símbolos equiprobables. Discuta si esta probabilidad de error será mayor o menor que la obtenida con el demodulador del apartado anterior.

Problema 3.36 Se va a diseñar un sistema de comunicaciones que utilizará las ocho señales de la Figura 3.68 para transmitir ocho símbolos con igual probabilidad. El canal únicamente introduce ruido, que se considerará blanco, gausiano, estacionario y con densidad espectral de potencia $N_0/2$. Por simplicidad en los cálculos, considere $T = 2$.

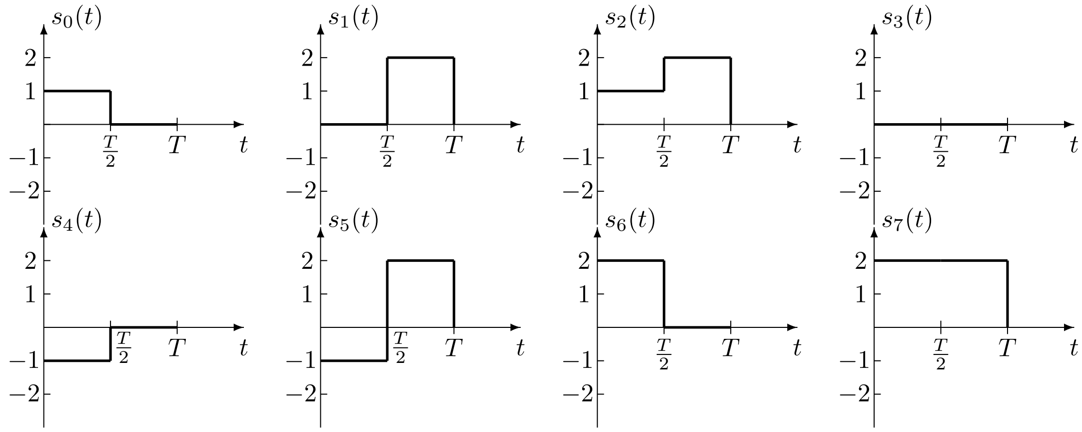

Figura 3.68: Señales para el Problema 3.36.

a) Realice la asignación de los bits que transporta cada una de las señales para obtener la mínima probabilidad de error de bit, y justifique la razón para elegir dicha asignación.

b) Obtenga otras 8 señales alternativas (dibuje las ocho señales o proporcione sus expresiones analíticas) con las que se pueda obtener la misma probabilidad de error que con el conjunto original, pero que requieran una mínima energía media por símbolo, y calcule esa energía media por símbolo mínima.

c) Diseñe el receptor óptimo (demodulador + decisor), y calcule la probabilidad de error obtenida (puede hacerlo utilizando tanto el conjunto original de señales como el obtenido en la sección b), ya que en ambos casos la probabilidad de error ha de ser la misma).

Problema 3.37 Un sistema de comunicaciones utiliza una constelación 8-PSK, formada por 8 símbolos situados sobre un círculo. En concreto, las coordenadas de los 8 símbolos son:

$$\boldsymbol{a}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_5 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_6 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_7 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

El codificador va a funcionar del siguiente modo: la constelación se dividirá en dos subconstelaciones de modo que para codificar $A[n]$ para n impar utilizará sólo la mitad de los símbolos (primera subconstelación), y para n par la otra mitad de símbolos restantes (segunda subconstelación).

a) Realice la división de la constelación en dos subconstelaciones de modo óptimo considerando tanto la energía media por símbolo de cada subconstelación como la probabilidad de error de la misma, y

   a1) Justifique la división realizada (sin justificación en términos de E_s y P_e, la división de la constelación no será valorada).

   a2) Teniendo en cuenta el modo de funcionamiento del sistema, realice la asignación binaria óptima para los 8 símbolos y justifique dicha asignación.

   a3) Calcule la tasa binaria (bits/segundo) en función del tiempo de símbolo T del sistema.

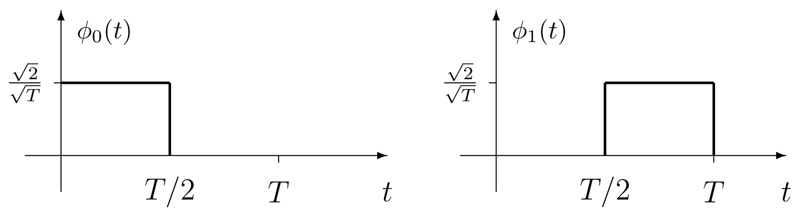

Figura 3.69: Modulador para el Problema 3.37.

b) Si el sistema utiliza el modulador de la Figura 3.69, donde para simplificar los cálculos se considerará en adelante $T = 2$, proporcione el demodulador óptimo mediante filtros adaptados causales para los símbolos impares, el demodulador óptimo mediante filtros adaptados causales para los símbolos pares, el decisor óptimo para los símbolos impares, el decisor óptimo para los símbolos pares, y la probabilidad de error total del sistema.

c) Si en el receptor se emplea el demodulador de la Figura 3.70, obtenga el decisor óptimo para los símbolos impares, el decisor óptimo para los símbolos pares, y la probabilidad de error total del sistema. A la vista de los resultados, ¿utilizaría este demodulador para los símbolos impares? ¿Y para los pares?

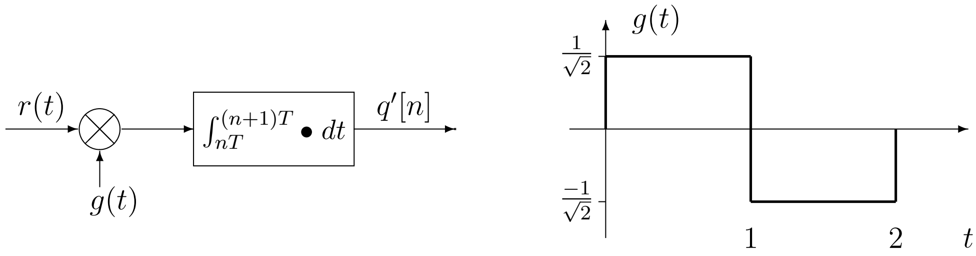

Figura 3.70: Demodulador para el Problema 3.37.

Problema 3.38 Un sistema de comunicaciones utiliza una constelación formada por los siguientes 4 símbolos,

$$\boldsymbol{a}_0 = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

que se transmiten con igual probabilidad, y un modulador dado por las funciones base de la Figura 3.71.

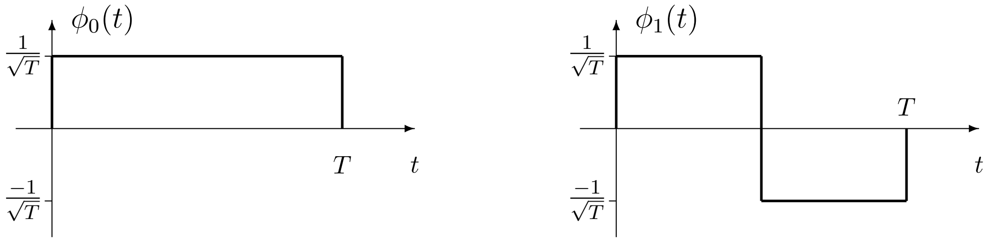

Figura 3.71: Demodulador para el Problema 3.38.

Por simplicidad en los cálculos, en lo sucesivo considere $T = 1$. Considere también la transmisión sobre un canal gausiano con densidad espectral de potencia de ruido blanco $N_0/2$.

a) Realice la asignación binaria que minimiza la probabilidad de error de bit, justificando dicha asignación (sin la justificación adecuada, la asignación no será valorada), y calcule la velocidad de transmisión de símbolos, R_s, y la velocidad de transmisión binaria, R_b.

b) Represente las cuatro señales utilizadas para la transmisión de cada símbolo, $s_i(t)$, $i = \{0, 1, 2, 3\}$, y la señal resultante de la transmisión de la siguiente secuencia de símbolos

$$\boldsymbol{A}[0] = \boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{A}[1] = \boldsymbol{a}_0,\ \boldsymbol{A}[2] = \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{A}[3] = \boldsymbol{a}_0,\ \boldsymbol{A}[4] = \boldsymbol{a}_2.$$

c) Diseñe el receptor óptimo (demodulador + decisor), y calcule la probabilidad de error obtenida con este receptor.

d) Si en lugar del demodulador óptimo se utiliza el demodulador de la Figura 3.72, diseñe el decisor óptimo para ese demodulador y calcule la probabilidad de error resultante.

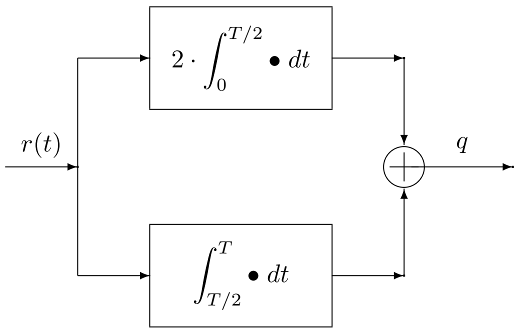

Figura 3.72: Demodulador para el Problema 3.38.