2.7. Problemas

Problema 2.1 Se tiene una variable aleatoria X. Calcule las probabilidades:

a) $P(X > 1)$,

b) $P(X > -1)$,

c) $P(X < -1)$,

d) $P(-1 \leq X \leq 1)$

para los siguientes casos:

1. X es una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[-2, 2]$.
2. X es una variable aleatoria gaussiana de media 1 y varianza 4.

Problema 2.2 Dos variables aleatorias, X e Y, tienen la función de distribución $F_X(x)$ y la función de probabilidad $f_Y(y)$, respectivamente, que se representan en la Figura 2.16.

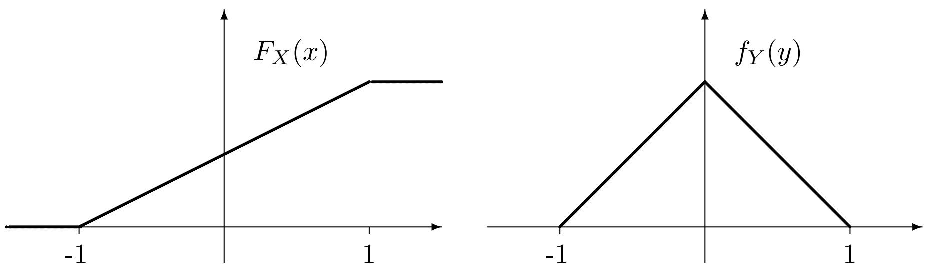

Figura 2.16: Función de distribución $F_X(x)$ y función de probabilidad $f_Y(y)$ del Problema 2.2.

a) Escriba las expresiones analíticas de las funciones de distribución y de densidad de probabilidad para cada una de las variables aleatorias ($F_X(x)$,$f_X(x)$,$F_Y(y)$,$f_Y(y)$).

b) Calcule la varianza de las dos variables aleatorias.

c) Calcule las siguientes probabilidades sobre la variable aleatoria Y: $P(Y > 0)$, $P\left(Y > -\frac{1}{2}\right)$, $P\left(Y < -\frac{1}{2}\right)$, $P\left(Y > \frac{1}{4}\right)$.

Problema 2.3 En una cierta ciudad tres marcas de coche, A, B y C, copan el 20 %, 30 % y 50 %, respectivamente, de la cuota de mercado. La probabilidad de avería durante el primer año, para cada una de las marcas, es del 5 %, 10 % y 15 %, respectivamente.

a) Calcule la probabilidad de que un coche de la ciudad sufra una avería durante el primer año.

b) Si un coche sufre una avería, calcule la probabilidad de que el fabricante del mismo sea la marca A.

Problema 2.4 Se lanza una moneda tres veces y se define una variable aleatoria, X, que modela el número de caras que se obtienen. Si la moneda está trucada, y la probabilidad de que salga cara es p:

a) Defina el rango de la variable aleatoria X.

b) Calcule la función densidad de probabilidad, $f_X(x)$, de X.

c) Calcule la función de distribución, $F_X(x)$.

d) Calcule la probabilidad de que X exceda el valor 1.

Problema 2.5 Sea $X[n]$ un proceso estacionario en tiempo discreto, estacionario, de media m_X, y función de autocorrelación $R_X[k]$. Considere el proceso

$$Y[n] = X[n] + a \cdot X[n-1],$$

donde a es una constante.

a) Calcule la media, $m_Y[n]$, del proceso $Y[n]$.

b) Calcule la función de autocorrelación, $R_Y[n+k, n]$, de $Y[n]$.

c) Obtenga la densidad espectral de potencia, $S_Y(e^{j\omega})$ de $Y[n]$.

Problema 2.6 Un proceso aleatorio $X(t)$ se define como $X(t) = A + B \cdot t$, donde A y B son variables aleatorias independientes y uniformemente distribuidas en $[-1, 1]$. Calcule la media $m_X(t)$ y la función de autocorrelación $R_X(t_1, t_2)$.

Problema 2.7 Un proceso aleatorio $X(t)$ se define como

$$X(t) = A + B \cdot t,$$

donde A y B son dos variables aleatorias independientes, la primera con una función de densidad de probabilidad $f_A(a)$ como la mostrada en la Figura 2.17, y la segunda con una función densidad de probabilidad $f_B(b)$ uniforme en el intervalo $[-1, 1]$.

a) Calcule la media, $m_X(t)$, del proceso $X(t)$.

b) Calcule la función de autocorrelación, $R_X(t+\tau, t)$, del proceso $X(t)$.

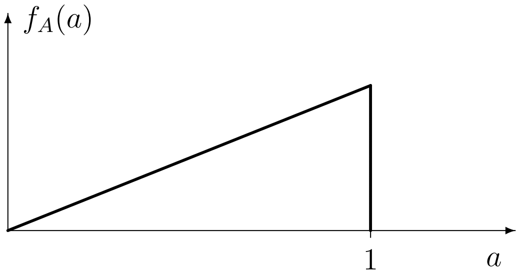

Figura 2.17: Función densidad de probabilidad de la variable aleatoria A.

c) ¿Es este proceso estacionario en sentido amplio?

Problema 2.8 El proceso aleatorio $X(t)$ se define como $X(t) = X$, donde X es una variable aleatoria uniformemente distribuida en $[-1, 1]$. Demuestre que el proceso es estacionario.

Problema 2.9 Se describe un proceso $X(t)$ que para $t \geq 0$ tiene la propiedad de que para todo n y todo $(t_1, t_2, \cdots, t_n) \in I\!\!R^n$, la función densidad de probabilidad conjunta de $\{X(t_i)\}_{i=1}^n$ es una probabilidad conjuntamente Gaussiana de media nula y matriz de covarianza dada por

$$C_{i,j} = \mathrm{Cov}(X(t_i), X(t_j)) = \sigma^2 \min(t_i, t_j)$$

¿Es este proceso estacionario en sentido amplio?

Problema 2.10 Explique cuál de las siguientes funciones puede corresponder a la función de autocorrelación de un proceso aleatorio estacionario y por qué.

1. $f(\tau) = \sin(2\pi f_o \tau)$.
2. $f(\tau) = \tau^2$.
3. $f(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau|, & |\tau| \leq 1 \\ 1 + |\tau|, & |\tau| > 1 \end{cases}$
4. $f(\tau)$ como en la Figura 2.18

Problema 2.11 El proceso aleatorio $Z(t)$ se define como

$$Z(t) = X\cos(2\pi f_o t) + Y\sin(2\pi f_o t),$$

donde X e Y son variables aleatorias Gaussianas independientes, de media cero y varianzas σ_X^2 y σ_Y^2.

1. Calcule la media $m_Z(t)$.

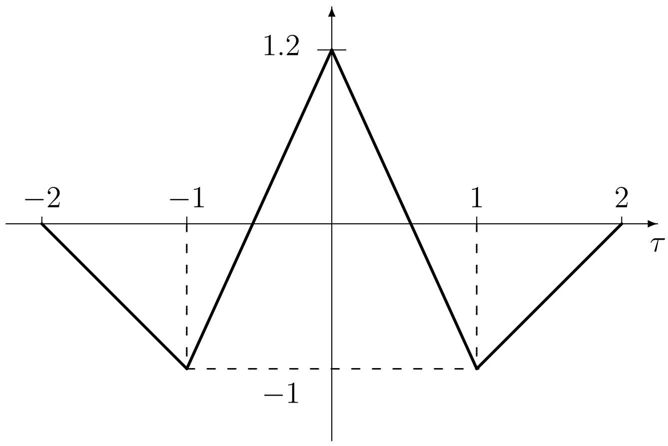

Figura 2.18: $f(\tau)$ Problema 2.10, apartado 4.

2. Calcule la autocorrelación $R_Z(t+\tau, t)$.
3. ¿Es $Z(t)$ estacionario o cicloestacionario?
4. Calcule la densidad espectral de potencia $S_Z(j\omega)$.
5. Repita las cuestiones anteriores para $\sigma_X = \sigma_Y$.

Problema 2.12 El proceso aleatorio $Z(t)$ tiene la siguiente descripción analítica

$$Z(t) = X\cos(2\pi f_o t) + Y\,\mathrm{sen}(2\pi f_o t),$$

donde X es una variable aleatoria uniforme en el intervalo (-1,1), e Y es una variable aleatoria uniforme en el intervalo (0,1). Además, X e Y son independientes. Calcule la media, $m_Z(t)$, función de autocorrelación $R_Z(t+\tau, t)$, y densidad espectral de potencia $S_Z(j\omega)$.

NOTA: puede tener en cuenta las siguientes relaciones trigonométricas

$$\cos A\cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A+B) + \cos(A-B)\right], \qquad \mathrm{sen}\,A\,\mathrm{sen}\,B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right]$$

$$\cos A\,\mathrm{sen}\,B = \frac{1}{2}\left[\mathrm{sen}(A+B) - \mathrm{sen}(A-B)\right]$$

Problema 2.13 Sea $\{A_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ una secuencia de variables aleatorias que cumplen $E[A_k] = m$, $E[A_k A_j] = R_A[k-j] = R_A[j-k]$. Sea $p(t)$ cualquier señal determinista con transformada de Fourier $P(j\omega)$. Se define el proceso aleatorio

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k p(t-kT)$$

donde T es una constante.

1. Calcule la media del proceso $m_X(t)$.
2. Calcule la autocorrelación del proceso $R_X(t+\tau,t)$.
3. Muestre que el proceso es cicloestacionario con período T.
4. Muestre que

$$\bar{R}_X(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T R_X(t+\tau,t)dt = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_A[n]R_p(\tau - nT)$$

   donde $R_p(\tau) = p(\tau) * p^*(-\tau)$ es la función de autocorrelación (determinista) de $p(t)$

5. Muestre que la densidad espectral de potencia de $X(t)$ está dada por

$$S_X(j\omega) = \frac{|P(j\omega)|^2}{T}\left[R_A[0] + 2\sum_{n=1}^{\infty} R_A[n]\cos(\omega nT)\right]$$

Problema 2.14 Calcule la densidad espectral de potencia del proceso aleatorio

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n p(t-nT),$$

sabiendo que su densidad espectral de potencia se puede obtener como

$$S_X(j\omega) = \frac{|P(j\omega)|^2}{T}\left[R_A(0) + 2\sum_{k=1}^{\infty} R_A(k)\cos(\omega kT)\right],$$

para los siguientes casos:

1. A_n son variables aleatorias independientes tomando valores ± 1 con igual probabilidad y

$$p(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le T \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

2. Todo igual que en el caso anterior pero con A_n tomando los valores 0 y 1 con igual probabilidad.
3. Resuelva los apartados 1 y 2 para el caso

$$p(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 3T \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

4. Para todos los casos anteriores, obtenga el ancho de banda que contiene el 95 % del total de la potencia del proceso.

NOTA: Tenga en cuenta las siguientes relaciones

$$\int_{-B}^{B} T\mathrm{sinc}^2(T\omega)\cdot d\omega = \begin{cases} 1, & B=\infty \\ 0.95, & B=\frac{2}{T} \\ 0.9, & B=\frac{1}{T} \\ 0.8, & B=\frac{0.533}{T} \\ 0.75, & B=\frac{0.47}{T} \\ 0.5, & B=\frac{0.27}{T} \end{cases}$$

Problema 2.15 Una señal de ruido que se modela como un proceso aleatorio blanco, Gaussiano, de media nula y con densidad espectral de potencia $N_o/2$ pasa por un filtro paso bajo ideal con ancho de banda B.

1. Calcule la función de autocorrelación del proceso de salida.
2. Asumiendo que $\tau = \frac{1}{2B}$, calcule la función densidad de probabilidad conjunta de las variables aleatorias $Y(t)$ e $Y(t+\tau)$. ¿Son estas variables aleatorias independientes? ¿Y para $\tau = \frac{1}{4B}$?

Problema 2.16 $X(t)$ es un proceso estacionario con densidad espectral de potencia $S_X(j\omega)$. Este proceso atraviesa el sistema que se muestra en la Figura 2.19

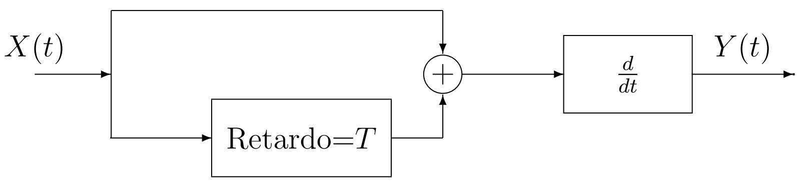

Figura 2.19: Sistema para el Problema 2.16.

1. ¿Es el proceso $Y(t)$ estacionario? Razone la respuesta.
2. Calcule la densidad espectral de potencia del proceso $Y(t)$.
3. ¿Qué componentes frecuenciales no pueden estar presentes en el proceso de salida y por qué?

Problema 2.17 Un proceso estacionario $X(t)$ pasa a través de un sistema lineal e invariante, teniendo a la salida el proceso $Y(t)$. Encontrar la función de autocorrelación y la función de correlación cruzada entre los procesos de entrada y salida para los casos siguientes:

1. Un retardador con retardo Δ.
2. Un sistema con $h(t) = \frac{1}{t}$.
3. Un sistema con $h(t) = e^{-\alpha t}u(t)$ para $\alpha > 0$.
4. El sistema definido por la ecuación diferencial
$$\frac{d}{dt}Y(t) + Y(t) = \frac{d}{dt}X(t) - X(t)$$
5. Un sistema promediador en tiempo finito $2T$ (T es una constante), definido por la relación entrada salida
$$y(t) = \frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T} x(\tau)d\tau.$$

Problema 2.18 Para cada uno de los siguientes procesos, encuentra la densidad espectral de potencia.

1. $X(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \Theta)$, donde A es una constante y Θ es una variable aleatoria uniformemente distribuida entre $[0, \pi]$.
2. $Z(t) = X + Y$, donde X e Y son independientes, X está uniformemente distribuida entre $[-1, 1]$ e Y es uniforme entre $[0, 1]$

Problema 2.19 $X(t)$ es un proceso aleatorio estacionario con función de autocorrelación
$$R_X(\tau) = e^{-\alpha|\tau|},\ \alpha > 0.$$
El proceso se aplica a un sistema lineal e invariante con respuesta al impulso
$$h(t) = e^{-\beta t}u(t),\ \beta > 0.$$
Calcule la densidad espectral de potencia del proceso de salida $Y(t)$. Trate los casos $\alpha \neq \beta$ y $\alpha = \beta$ por separado.

Problema 2.20 Se define el proceso $X(t)$ como:
$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \mathrm{sinc}(2W(t - nT))$$
donde A_n son variables aleatorias independientes de media zero y varianza σ^2

1. Calcule la densidad espectral de potencia usando el siguiente resultado (ver Problema 2.14)
$$S_X(j\omega) = \frac{|P(j\omega)|^2}{T}\left[R_A(0) + 2\sum_{k=1}^{\infty} R_A(k)\cos(\omega kT)\right]$$

2. Para el caso de que $T = \frac{1}{2W}$, calcule la potencia del proceso.

3. Sea $X_1(t) = \frac{N_0}{2}\Pi(\frac{f}{2W})$ y $A_n = X_1(nT)$ donde $T = \frac{1}{2W}$. Determine la densidad espectral de potencia y la potencia del proceso $X(t)$. ¿Cuál es la relación entre $X_1(t)$, $X(t)$?

Problema 2.21 Un proceso de ruido tiene una densidad espectral de potencia

$$S_n(j\omega) = \begin{cases} 10^{-8}\left(1 - \frac{|\omega|}{2\pi\cdot 10^8}\right), & |\omega| < 2\pi \cdot 10^8 \\ 0, & |\omega| > 2\pi \cdot 10^8 \end{cases}.$$

Si el ruido pasa a través de un filtro paso banda ideal con ancho de banda de 2 MHZ centrado a 50 MHz, calcule la potencia del proceso de salida.

Problema 2.22 La señal recibida en un sistema de comunicaciones, $r(t) = s(t)+n(t)$, pasa a través de un filtro paso bajo ideal con ancho de banda B Hz y ganancia unidad. La señal $s(t)$ tiene una densidad espectral de potencia

$$S_s(j\omega) = \frac{P_o}{1 + (\omega/\omega_o)^2},$$

donde $\omega_o = 2\pi f_o$ y f_o es el ancho de banda a 3 dB (en Hz). El término de ruido, $n(t)$ tiene una densidad espectral de potencia $N_o/2$ para todas las frecuencias. Calcule y dibuje la relación señal a ruido en función de la relación B/f_o. ¿Para que ancho de banda del filtro, B, se obtiene la máxima relación señal a ruido?

Problema 2.23 Calcule la media y autocorrelación del proceso

$$X(t) = A \cdot \cos(\omega t + \theta) \tag{2.1}$$

y determine si es estacionario o cicloestacionario (si es así, determine el periodo) en los siguientes casos:

a) A es una variable aleatoria gausiana real de media nula y varianza unidad y ω y θ son constantes reales no nulas.

b) A es una variable aleatoria gausiana real de media igual a 1 y varianza unidad y ω y θ son constantes reales no nulas. reales no nulas.

c) ω es una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $(0, 2\pi]$ y A y θ son constantes reales no nulas.

d) θ es una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $(0, 2\pi]$ y A y ω son constantes reales no nulas.

e) θ es una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $(0, \pi]$ y A y ω son constantes reales no nulas.

f) A es una variable aleatoria gausiana real de media nula y varianza unidad, ω y θ son variables aleatorias con distribución uniforme en el intervalo $(0, 2\pi]$, y las tres estadísticamente independientes.

Problema 2.24 El proceso aleatorio $Y(t)$ viene dado por

$$Y(t) = A_c \cdot \cos(\omega_c \cdot t) \cdot X(t),$$

donde A_c y ω_c son dos constantes que determinan la amplitud y frecuencia de la sinusoide, respectivamente, y $X(t)$ es un proceso aleatorio estacionario, de media nula, función de autocorrelación $R_X(\tau)$, densidad espectral de potencia $S_X(j\omega)$, y potencia P_X.

a) Calcule la media del proceso $Y(t)$.

b) Calcule la función de autocorrelación del proceso $Y(t)$.

c) Calcule la densidad espectral de potencia de $Y(t)$.

d) Calcule la potencia del proceso $Y(t)$.

Problema 2.25 Una determinada modulación analógica que modula simultáneamente dos señales moduladoras se puede definir mediante el siguiente proceso aleatorio

$$S(t) = M_A(t) \cdot \cos(\omega_c t) + M_B(t) \cdot \mathrm{sen}(\omega_c t),$$

donde $M_A(t)$ y $M_B(t)$ son dos procesos aleatorios que modelan las dos señales moduladoras. Se supone que ambos son procesos aleatorios independientes, estacionarios, de media nula, e idénticas función de autocorrelación $R_{M_A}(\tau) = R_{M_B}(\tau) = R_M(\tau)$, densidad espectral de potencia $S_{M_A}(j\omega) = S_{M_B}(j\omega) = S_M(j\omega)$, y potencia $P_{M_A} = P_{M_B} = P_M$.

a) Calcule la media del proceso aleatorio $S(t)$, $m_S(t)$.

b) Calcule la función de autocorrelación del proceso $S(t)$, $R_S(t+\tau, t)$, y diga si el proceso es estacionario o cicloestacionario.

c) Calcule la densidad espectral de potencia del proceso, $S_S(j\omega)$, y obtenga su potencia, P_S.

NOTA: Igualdades trigonométricas

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\cos(a-b) + \frac{1}{2}\cos(a+b), \qquad \mathrm{sen}(a)\,\mathrm{sen}(b) = \frac{1}{2}\cos(a-b) - \frac{1}{2}\cos(a+b),$$

$$\mathrm{sen}(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\mathrm{sen}(a-b) + \frac{1}{2}\mathrm{sen}(a+b)$$