Métodos Matemáticos aplicados a la Ingeniería
Grado en Ingeniería de la Energía. Curso 2018-2019.

Examen Final - 9 de enero de 2019

Nombre y apellidos:
DNI / NIE:
Titulación / Doble Titulación:

• **Parte de Teoría:** debes indicar y justificar todos los pasos y cálculos realizados. Si sólo pones los resultados numéricos, **no puntuará**. Explica los resultados y los cálculos **adecuadamente**.
• **Duración del examen: 1 hora y 30 minutos para la parte de Teoría.**

Parte de Teoría (10 puntos)

1. **(2 puntos)** Considera la siguiente ecuación no lineal:

$$e^{x/10} + 2 = x^3 - 6(x-1)^2$$

   (a) **(0.5 puntos)** Localiza una raíz de la ecuación en un intervalo de longitud menor o igual a 1.

   (b) **(1.5 puntos)** Obtén una aproximación de su solución, aplicando como máximo 4 iteraciones del método de Newton, con una tolerancia de 10^{-3}, y partiendo de un valor inicial adecuado.

2. **(2 puntos)** Resuelve estos ejercicios:

   (a) **(1.5 puntos)** Escribe las fórmulas generales de los métodos de Runge-Kutta de 3 estados, y deduce de ellas el caso particular del método dado en la tabla de Butcher siguiente:

$$\begin{array}{c|ccc} 1/4 & 1/8 & 1/8 & 0 \\ 1/2 & 1/10 & 1/5 & 1/5 \\ 3/4 & 0 & 1/4 & 2/4 \\ \hline & 1/12 & 5/12 & 1/2 \end{array}$$

   Nota: no es necesario que escribas todo el método en una única expresión, puedes dejarlo en varias.

   (b) **(0.5 puntos)** El radio de A-estabilidad del método de Euler implícito es de $-\infty$. Para el PVI $\{y' = -800y, y(0) = 300\}$, ¿qué valores de h debemos tomar para aplicar este método? ¿Por qué?.

3. **(3 puntos)** Sea el problema de valor inicial (PVI) siguiente:

$$(\text{PVI}): \begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 2x, \quad x \in [1,2], \\ y(1) = -1, y'(1) = 1. \end{cases}$$

Resuelve el PVI de forma aproximada con el método de Euler explícito, tomando un paso de $h = 0.5$, e indica claramente cuál es la aproximación que se obtiene para el valor $y(2)$.

4. **(3 puntos)** Dado el siguiente problema de valor inicial y de contorno (PVIC) para la EDP del calor:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 2xt, \quad (x,t) \in \Omega = [0,1] \times [0,2] \\ u(x,0) = x^2 - x, \quad \forall x \in [0,1] \\ u(0,t) = t, \quad \forall t \in [0,2] \\ u(1,t) = -t, \quad \forall t \in [0,2] \end{cases}$$

(a) **(0.5 puntos)** Realiza una discretización del dominio Ω con los pasos $\Delta x = 1/3$, $\Delta t = 1/2$, indicando claramente cuáles son los nodos se obtienen, cuántos hay y cómo se numeran.

(b) **(1.75 puntos)** Desarrolla, paso a paso, un método numérico de diferencias finitas para el PVIC anterior, utilizando las fórmulas de derivación numérica siguientes:

$$u_t(x,t) \approx \frac{u(x,t) - u(x,t-\Delta t)}{\Delta t}$$

$$u_{xx}(x,t) \approx \frac{u(x+\Delta x,t) - 2u(x,t) + u(x-\Delta x,t)}{(\Delta x)^2}$$

(c) **(0.75 puntos)** Explica detalladamente cómo se aplicaría el método obtenido en el apartado anterior, si es explícito o implícito, cuáles son los valores de u que se quieren calcular y cuáles son conocidos.