Universidad Rey Juan Carlos

TEORÍA DE LA SEÑAL Y COMUNICACIONES

Grados en Ingeniería en Sistemas de Telecomunicación, Sistemas Telemáticos y Tecnologías de la Telecomunicación/en Sistemas Audiovisuales y Multimedia

Curso 2014-15 12 de mayo de 2015

Asignatura: Señales y Sistemas / Sistemas Lineales

Duración total: 3 horas

Problema 1 (2.5 puntos)

Sean las señales siguientes:

$$x(t) = 2e^{j2\pi t}u(-t-2) + 2\,u(t+2) - 2(1-e^{-(t-2)})\,u(t-2)$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jn\pi/4}\delta[n-k]$$

a) Calcular y representar $z(t) = Re\{x(t)\}$. (0.75 puntos)
b) Estudiar la periodicidad de $v(t) = Im\{x(t)\}$ y de $y[n]$. (1 puntos)
c) Calcular la energía de *z(t)* y la potencia de *y[n]*. (0.75 puntos)

Problema 2 (2.5 puntos)

a) Estudie la linealidad y la invarianza del sistema:

$$y[n] = x[n] + 0.5\,x^2[n-1]\,u[n]$$ (0.75 puntos)

b) Estudie causalidad y estabilidad del SLIT dado por

$$h[n] = \sum_{k=-3}^{3} k\,e^{jk2\pi/3}\delta[n-k].$$ (0.75 puntos)

c) Calcule la convolución de $x(t) = 2\,e^{-|t|}$ con $h(t) = u(t+1) - u(t-1)$. (1 puntos)

Problema 3 (5 puntos)

a) Obtenga el DFS de la siguiente señal periódica, teniendo en cuenta su periodo: (1.5 puntos)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\,\delta(t-1-4k) + 3\,e^{j(\frac{\pi t}{2}+\pi/3)}$$

b) Calcule la TF de $x(t) = 0.5\,j\,e^{j2\pi t}$ (u(t+2)-u(t-2)). (1.5 puntos)
c) Sean las siguientes señales: (2 puntos)

- $x(t)$ cuya TF es un pulso triangular en $(-2\pi, 2\pi)$ rad/s.
- $r(t)$ que es la salida cuando entra $x(t)$ en un filtro paso bajo ideal de frecuencia de corte π rad/s.
- $s(t)$ que es el resultado de multiplicar $r(t)$ por $\cos(5\,\pi t)$.
- $v(t)$ que es el resultado de multiplicar $s(t)$ por $\cos(5\,\pi t)$.
- $z(t)$ que es la salida cuando entra $v(t)$ en un filtro paso bajo ideal de frecuencia de corte π rad/s.

Represente un diagrama de bloques entre $x(t)$ y $s(t)$, y otro diagrama entre $s(t)$ y $z(t)$. Represente gráficamente las transformadas de Fourier de todas las señales.

Universidad Rey Juan Carlos

TEORÍA DE LA SEÑAL Y COMUNICACIONES

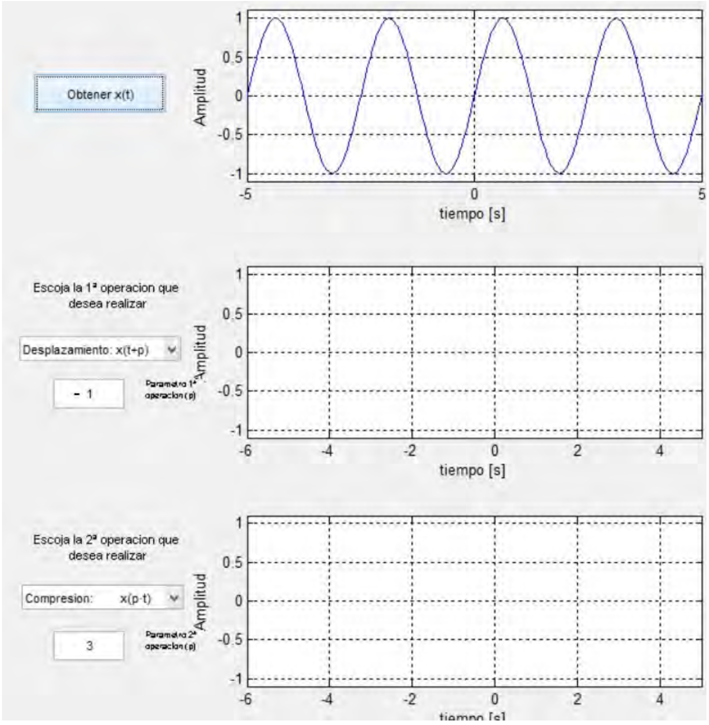
Apellidos: Nombre:	Grado: Asignatura:	Calificación:

Prueba de
LABORATORIO

(Esta prueba consta de 8 cuestiones que corresponden a todo el laboratorio de la asignatura, cuentan el 20% de la nota final. Cada respuesta acertada suma 1,25 puntos y cada respuesta fallada resta 0,5 puntos. En cada cuestión sólo hay una respuesta correcta).

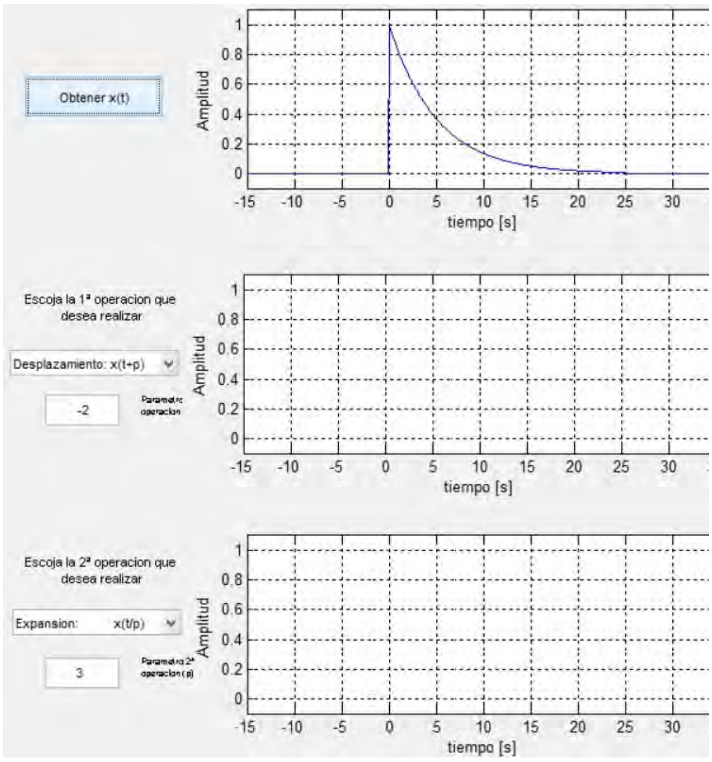
Cuestión L1. Si el resultado de las siguientes dos operaciones sobre la señal del panel superior se expresa como $z(t) = A \cdot cos(2\pi t + \varphi)$. Podemos afirmar que:

a) *A = 1; f = 4; φ = 1,3.*
b) *A = 1; f = 0,4; φ = -1,3π.*
c) *A = 1; f = 0,4; φ = -0,8π.*
d) *Ninguna de las anteriores es cierta.*

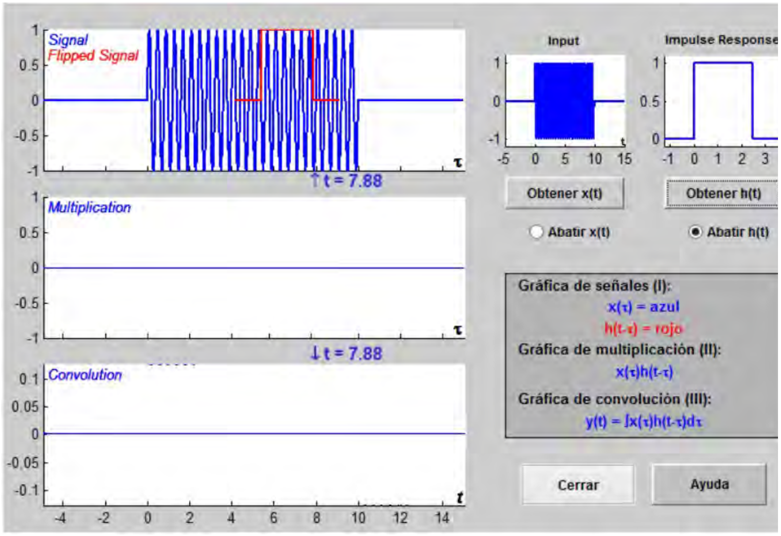


Cuestión L2. Si el resultado de las siguientes dos operaciones sobre la señal del panel superior se expresa como $z(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$. Podemos afirmar que la constante de tiempo (τ) vale aproximadamente:

a) *15 segundos.*
b) *5 segundos.*
c) *1,5 segundos.*
d) *Ninguna de las anteriores es cierta.*

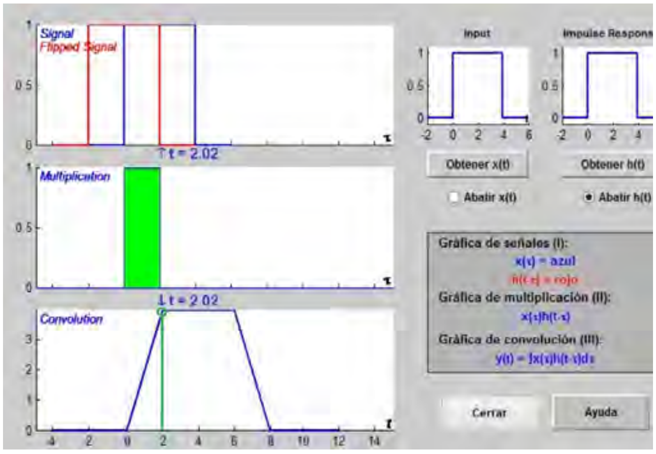


Cuestión L3. El resultado de convolucionar la señal $x(t) = sen(5\pi \cdot t)$ y la señal $h(t) = u(t) - u(t-2{,}5)$, tal y como se realiza en el gráfico, cumple que:



a) *Es una señal sinusoidal.*
b) *Es nula para cualquier valor de t.*
c) *Es una señal sinc.*
d) *Ninguna de las anteriores es cierta.*

Cuestión L4. En el interfaz gráfico de la práctica 2 de nuestra asignatura se han seleccionado tanto para x(t) como para h(t) los pulsos que aparecen en la gráfica. Las figuras que aparecen tanto en la segunda como en la tercera ventana…



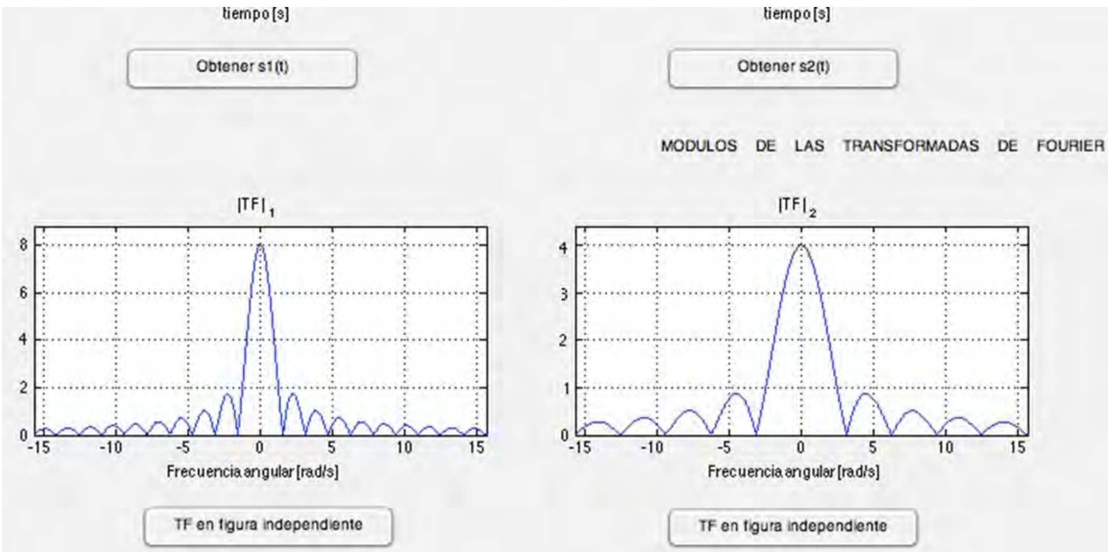
a) *No pueden ser correctas, puesto que la convolución no empieza y termina donde debiera.*

b) *No pueden ser correctas puesto que el segundo panel no tiene sentido.*

c) *No pueden ser correctas, puesto que el tercer panel no tiene sentido.*

d) *Son correctas.*

Cuestión L5. Sean las señales en la figura adjunta. Se tiene que:

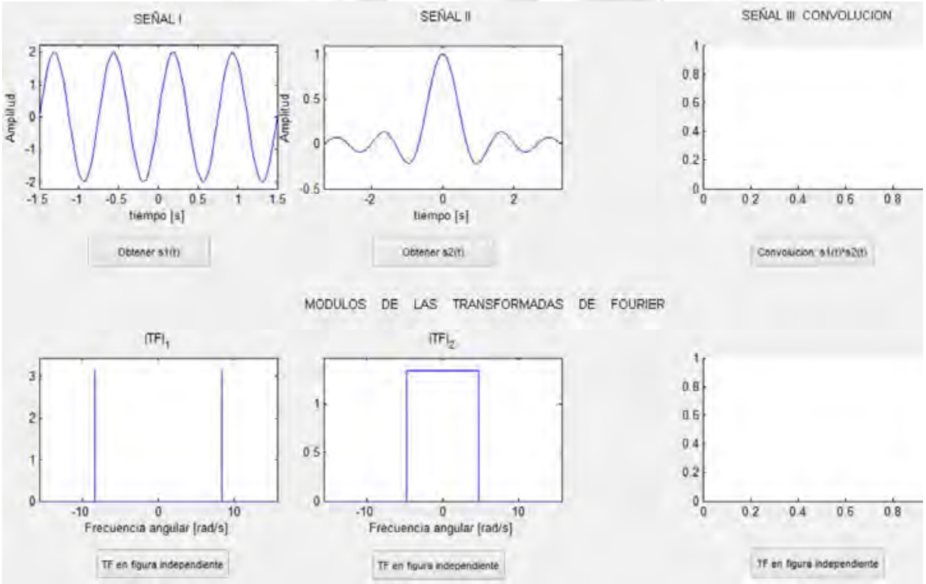


a) *En el tiempo, la señal de la derecha se ha obtenido mediante un escalado temporal (compresión) de la señal de la izquierda con factor 2.*
b) *En el tiempo, la señal de la derecha se ha obtenido mediante un escalado de amplitud (amplificación) de la señal de la izquierda con factor 2.*
c) *En el tiempo, la señal de la derecha se ha obtenido mediante dos escalados, uno temporal (compresión) y uno de amplitud (amplificación), de la señal de la izquierda con factor 2 en ambos.*
d) *Ninguna de las anteriores es cierta.*

Universidad Rey Juan Carlos

TEORÍA DE LA SEÑAL Y COMUNICACIONES

Cuestión L6. En la figura adjunta.



a) El gráfico inferior derecho será una sinc.

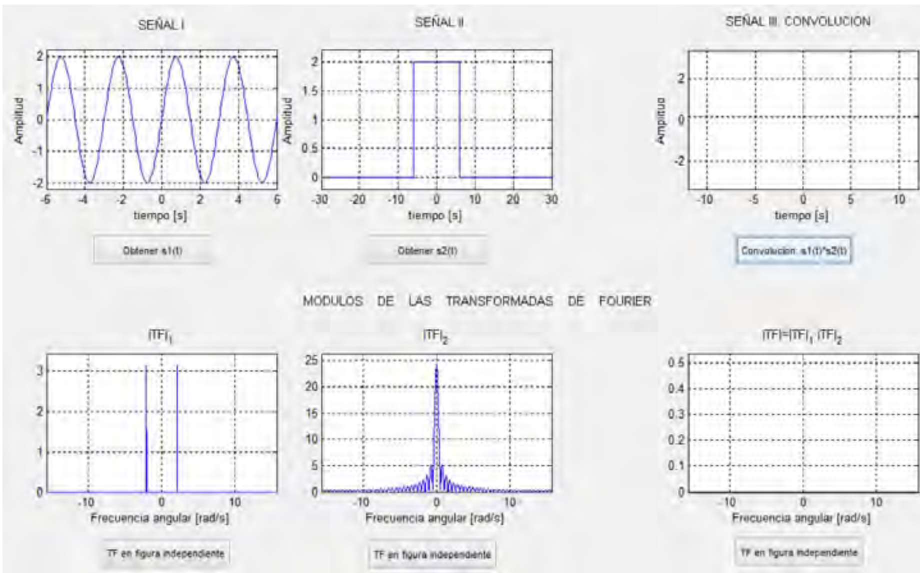
b) El gráfico superior derecho será una sinusoide.

c) El gráfico inferior derecho serán dos impulsos.

d) Ninguna de las anteriores.

es cierta.

Cuestión L7. En la figura adjunta, donde la señal del centro es un pulso de anchura bilateral 12 segundos, se puede decir que:



a) El gráfico inferior derecho será una sinc.

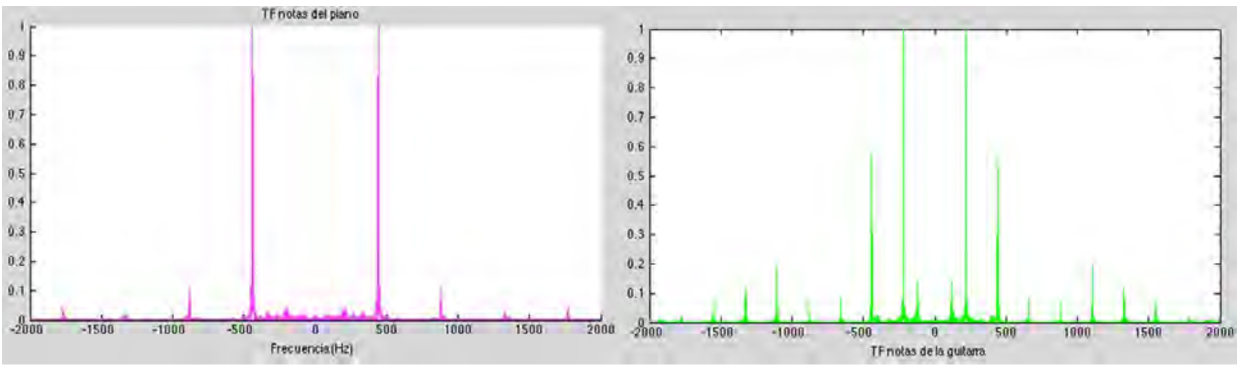
b) El gráfico superior derecho será una sinusoide.

c) El gráfico inferior derecho serán dos impulsos.

d) Ninguna de las anteriores.

es cierta.

Cuestión L8. En la figura adjunta puede decirse que:



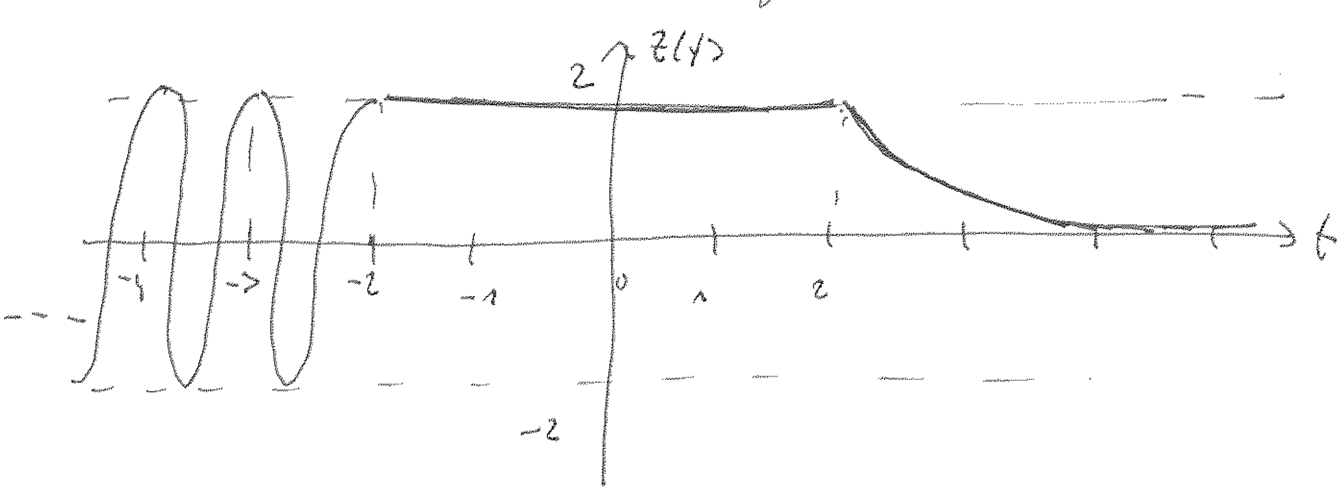
a) *El piano y la guitarra están emitiendo la misma nota y en la misma octava.*
b) *El piano y la guitarra están emitiendo la misma nota y en distinta octava.*
c) *El piano y la guitarra están emitiendo distinta nota y en la misma octava.*
d) *Ninguna de las anteriores es cierta.*

(P1) $x(t) = 2e^{j2\pi t} \cdot u(-t-2) + 2u(t+2) -$
$$- 2(1 - e^{-(t-2)})\, u(t-2)$$

$$y[n] = \sum_k e^{jn\frac{\pi}{4}} \cdot \delta[n-k] = \sum_k e^{jk\frac{\pi}{4}} \delta[n-k]$$

(a) $z(t) = \mathrm{Re}\{x(t)\} = 2\cos(2\pi t) \cdot u(-t-2) +$
$$+ 2u(t+2) - 2(1 - e^{-(t-2)}) \cdot u(t-2)$$

Podemos utilizar para ayudarnos representaciones intermedias de cada uno de los sumandos, y queda:



(b) $v(t) = \mathrm{Im}\{x(t)\} = 2\,\mathrm{sen}(2\pi t) \cdot u(-t-2)$.

No es periódica al estar multiplicada por el escalón.

$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{jk\frac{\pi}{4}} \cdot \delta[n-k]$, vamos poniendo en cada δ un valor tomado de la circunferencia unidad cada $\frac{\pi}{4}$, por tanto $y[n]$ es periódica con periodo $\boxed{N = 8 \text{ muestras}}$

(c) $E = \int_{-\infty}^{+\infty} |z(t)|^2 dt = +\infty$ (de acuerdo con la gráfica)

Por ser periódica, calculo su potencia media en 1 periodo:

$$\boxed{P_m = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |y(k)|^2 = \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7} |e^{jk\frac{\pi}{4}}|^2 = \frac{1}{8}\cdot 8 = 1\ W}$$

P2 (a) $y[n] = x[n] + 0'5\, x^2[n-1]\cdot u[n]$

Para estudiar linealidad comenzamos por ejemplo por escalado, y así si nos sale ya no lineal nos ahorramos aditividad.

$$x_1[n] \rightarrow y_1[n] = x_1[n] + 0'5\, x_1^2[n-1]\cdot u[n]$$

$$x_2[n] = a\cdot x_1[n] \rightarrow y_2[n] = x_2[n] + 0'5\, x_2^2[n-1]\cdot u[n]$$

$$= a\, x_1[n] + 0'5\, \underline{\underline{a^2}}\, x_1^2[n-1]\cdot u[n] \neq a\, y_1[n]$$

NO ES LINEAL

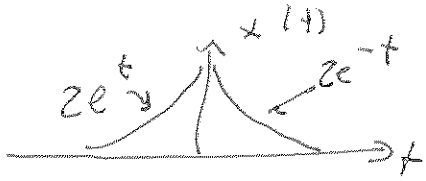
(b) $h[n] = \sum_{k=-3}^{3} k\cdot e^{jk\frac{2\pi}{3}}\delta[n-k]$.

Causalidad: no es un SLIT causal, porque $h[n] \neq 0$ en $n = -3, -2, -1$.

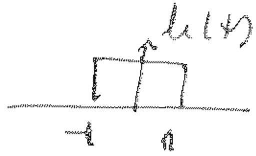
Estabilidad: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = \sum_{k=-3}^{3} |k\cdot e^{jk\frac{2\pi}{3}}| =$

$$= \sum_{k=-3}^{3} |k|\cdot 1 = 2\cdot(1+2+3) = 12 < \infty \Rightarrow \text{Estable.}$$

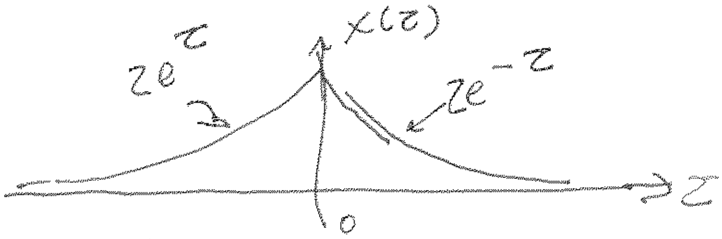
(c) $x(t) = 2e^{-|t|}$

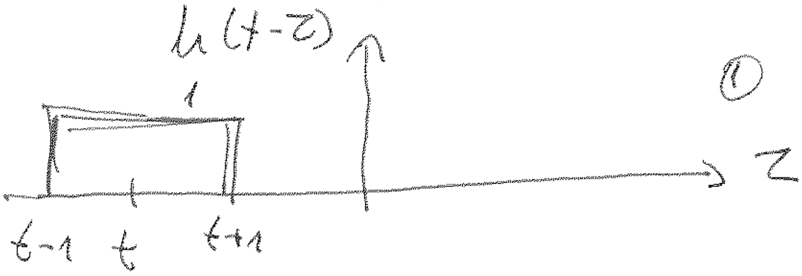


$h(t) = u(t+1) - u(t-1)$

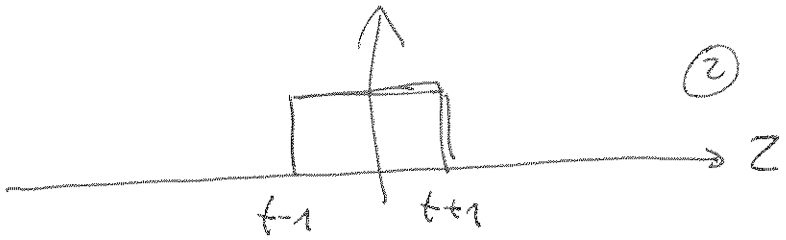


$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$



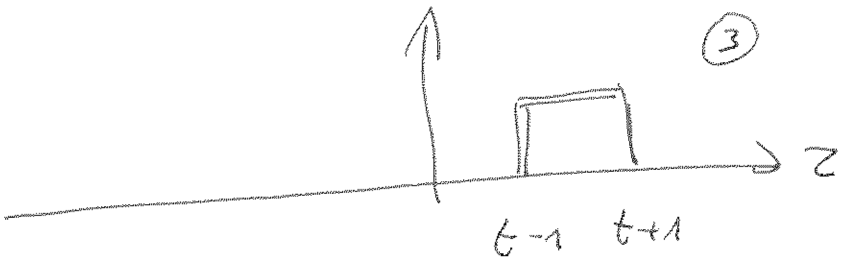


① $t+1 < 0 \rightarrow \underline{t < -1}$



② $\left.\begin{array}{l} t+1 \geq 0 \\ t-1 < 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} t \geq -1 \\ t < 1 \end{array}$

$\rightarrow \underline{-1 \leq t < 1}$



③ $t-1 \geq 0 \rightarrow \underline{t \geq 1}$

① $y(t) = \int_{t-1}^{t+1} 2e^{\tau} dt = 2\left[e^{\tau}\right]_{t-1}^{t+1} = 2e^{t+1} - 2e^{t-1} =$

$= 2e^{t}(e - e^{-1})$ //

② $y(t) = \int_{t-1}^{0} 2e^{z}\,dz + \int_{0}^{t+1} 2e^{-z}\,dz = 2[e^{z}]_{t-1}^{0} +$

$+ 2[-e^{-z}]_{0}^{t+1} = 2 - 2e^{t-1} - 2e^{-t-1} + 2 =$

$= 4 - 2e^{t-1} - 2e^{-t-1}$ //

③ $y(t) = \int_{t-1}^{t+1} 2e^{-z}\,dz = -2[e^{-z}]_{t-1}^{t+1} =$

$= -2e^{-t-1} + 2e^{-t+1} = 2e^{-t}(e - e^{-1})$ //

$$y(t) = \begin{cases} 2e^{t}(e - e^{-1}), & t < -1 \\ 4 - 2e^{t-1} - 2e^{-t-1}, & -1 \le t < 1 \\ 2e^{-t}(e - e^{-1}), & t \ge 1 \end{cases}$$

(P3) (a) $x(t) = \sum_k 2\delta(t-1-4k) + 3e^{j(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3})}$

El tren de deltas tiene $T_1 = 4$ s.

La exponencial tiene $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{\pi/2} = 4$ s.

Por lo tanto, $T_0 = \text{mcm}\{4, 4\} = 4$ s.

Los coeficientes del tren de deltas son:

$$C_k = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} 2\delta(t-1)\, e^{-jk\frac{2\pi}{4}t} dt = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} 2\delta(t-1) \cdot$$

$$\cdot\, e^{-jk\frac{\pi}{2}} dt = \frac{1}{2} \cdot e^{-jk\frac{\pi}{2}}$$

Para la sinusoide, por inspección: $d_1 = 3e^{j\frac{\pi}{3}}$ $(d_k = 0 \ \forall k \neq 1)$

Por tanto, $\boxed{x_k = C_k + d_k}$

(b) $x(t) = 0'5j\, e^{j2\pi t}(u(t+2) - u(t-2))$

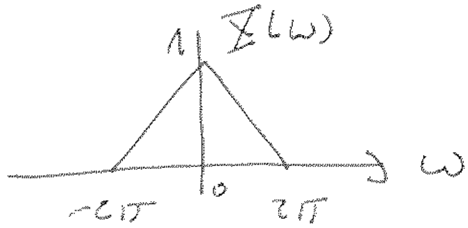
$$\boxed{X(j\omega)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt = \int_{-2}^{2} 0'5j\, e^{j2\pi t} e^{-j\omega t} dt =$$

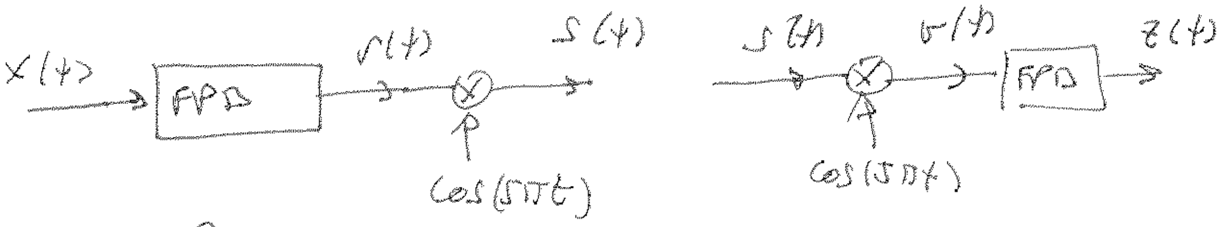
$$= 0'5j \frac{1}{j2\pi - j\omega}\left[e^{j(2\pi-\omega)t}\right]_{-2}^{2} =$$

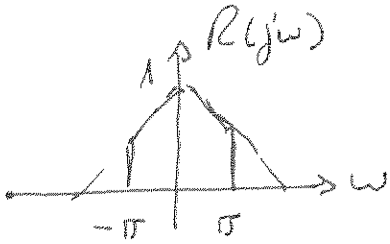
$$= \frac{1}{4\pi - 2\omega}\left[e^{j2(2\pi-\omega)} - e^{-j2(2\pi-\omega)}\right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi - 2\omega}\left[e^{-j2\omega} - e^{j2\omega}\right] = \frac{-2j\,\text{sen}(2\omega)}{4\pi - 2\omega} = \boxed{\frac{-j\,\text{sen}(2\omega)}{2\pi - \omega}}$$

(c) $x(t)$







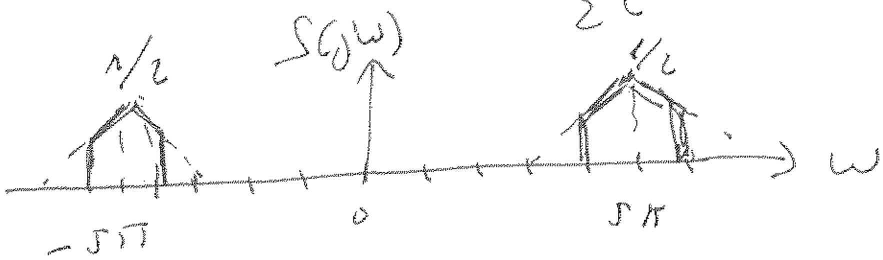
Sabemos además que:

$$x(t)\cdot y(t) \xleftrightarrow{TF} \frac{1}{2\pi}\, X(j\omega) * Y(j\omega)$$

$$\cos(\omega_0 t) \xleftrightarrow{TF} \pi\left[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\right]$$

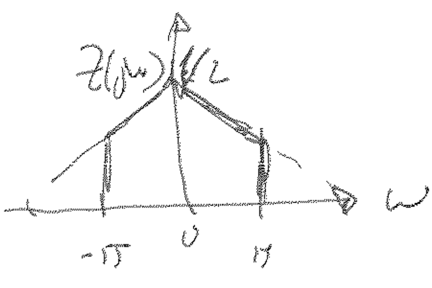
Por lo tanto: $S(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\cdot R(j\omega) * \left(\pi\left(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right)\right)$

$$= \frac{1}{2}\left[R(j(\omega-\omega_0)) + R(j(\omega+\omega_0))\right]$$



$$V(j\omega) = \frac{1}{4}\, R(\omega - 2\omega_0) + \frac{1}{2}\, R(\omega) +$$

$$+ \frac{1}{4}\, R(\omega + 2\omega_0)$$



(L1) $T = 2'5$ seg $\Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{2'5} \Rightarrow f = \frac{1}{2'5} = 0'4$

$x(t) = \text{sen}(2\pi \cdot 0'4\, t)$

$r(t) = x(t+1) = \text{sen}(2\pi \cdot 0'4(t$ [redacted] $1)) =$

$= \text{sen}(2\pi \cdot 0'4\, t$ [redacted] $2\pi \cdot 0'4)$

$z(t) = r(3t) = \text{sen}(2\pi \cdot 0'4 \cdot 3t$ [redacted] $2\pi \cdot 0'4) =$

$= \cos(2\pi \cdot 1'2t$ [redacted] $0'8\pi - \frac{\pi}{2}) = \cos(2\pi \cdot 1'2t$ [redacted] $1'3\pi)$

(L2) $x(t) = e^{-\frac{t}{5}} \cdot u(t)$

$r(t) = x(t-2) = e^{-\frac{t-2}{5}} \cdot u(t-2)$

$z(t) = r(t/3) = e^{-\frac{t/3}{5} - \frac{2}{5}}\; u(t/3 - 2)$

$\Rightarrow \underline{\tau_z = 3 \cdot 5 \cong 15 \text{ seg.}}$

(L3) $\omega_0 = 5\pi = \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{5\pi} = \frac{2}{5} = 0'4$ seg.

Por tanto, (a) será una señal sinusoidal.

(C4) Primer y segundo panel son correctos. Sin embargo, el área en el producto del segundo panel es 2, por lo que el valor del resultado en el tercer panel en $t = 2$ debería ser 2, y no 4. => (C)

(C5) Sabemos que $\Pi(t/T_1) \xleftrightarrow{TF} 2\,\frac{\mathrm{sen}(T_1 w)}{w}$

En la primera señal, su transformada en cero vale $8 = 2T_1$ =>

=> $T_1 = 4$ segundos.

En la segunda señal, su transformada en cero vale $4 = 2 \cdot T_2$ =>

=> $T_2 = 2$ segundos.

Por lo tanto, la segunda señal se ha obtenido de una compresión de factor 2 con respecto a la anterior.

(C6) (d) Ninguna de las anteriores. Ambos paneles serían nulos.

(C7) (d) Ninguna de las anteriores. Ambos paneles serían nulos.

(C8) (b) Misma nota en distinta octava.