TÍTULO: *Sistemas no inerciales. Fuerzas ficticias.*

OBJETIVOS:

- Comparar las descripciones del movimiento en sistemas de referencia inerciales y no inerciales.
- Explicar la aparente presencia de fuerzas extra en sistemas de referencia no inerciales.

DESARROLLO CONCEPTUAL

DEFINICIONES:

Un sistema de referencia no inercial es uno que se mueve con movimiento acelerado. Para que las leyes de Newton sean válidas en sistemas no inerciales es necesario introducir fuerzas ficticias o inerciales.

FORMULACIÓN SIMPLE DEL PROBLEMA

Por simplicidad, vamos a considerar de momento el movimiento en una sola dimensión, digamos a lo largo del eje X. Sean dos sistemas de referencia tales que el origen *O* del primero es distinto del origen *O'* del segundo. Así, si la coordenada de un punto P respecto a *O* es *x* y la coordenada del mismo punto respecto a O' es *x'*, entre ambas existe la relación $x = x' + OO'$, siendo *OO'* la distancia entre *O* y *O'*. Si el punto P está en movimiento, sus coordenadas son funciones del tiempo $x(t)$ y $x'(t)$, pero siempre se satisfará la relación $x(t)=x'(t)+OO'$.

¿Qué pasa entonces si el sistema *O'* está en movimiento respecto al sistema *O*? Supongamos en primer lugar que la velocidad de *O'* con respecto a *O* es constante v_0. Entonces la distancia *OO'* varía con el tiempo de la forma $OO'= v_0t$ (si suponemos que en el instante $t=0$ los orígenes *O* y *O'* coincidían) y la relación general entre las coordenadas en ambos sistemas toma la forma concreta

$$x(t) = x'(t) + v_0 t$$

Se ha visto en una ficha anterior que la velocidad es la derivada de la posición con respecto el tiempo y la aceleración es la derivada de la velocidad. Así, la velocidad y la aceleración del punto P medidas en el sistema *O* son $v(t) = dx(t)/dt$ y $a(t) = dv(t)/dt = d^2x(t)/dt^2$. Del mismo modo, la velocidad y aceleración de P medidas en el sistema *O'* son $v'(t) = dx'(t)/dt$ y $a'(t) = dv'(t)/dt$ Entonces, la relación entre ellas es

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{dx'(t)}{dt} + v_0 \qquad \Rightarrow \qquad v(t) = v'(t) + v_0$$

y derivando una vez más

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{dv'(t)}{dt} + \frac{dv_0}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad a(t) = a'(t)$$

ya que v_0 es constante y la derivada de una constante es cero. En resumen, si el sistema *O'* se mueve con velocidad constante v_0 respecto al sistema *O*, la velocidad que mide el observador ligado al sistema *O* es igual a la velocidad que mide el observador ligado a *O'* más la velocidad v_0. Sin embargo, las aceleraciones que miden ambos observadores son iguales. (En adelante utilizaremos *O* tanto para referirnos al origen de coordenadas de un sistema como al observador que refiere sus medidas a dicho origen. Y los mismo para *O'*)

Supongamos, por el contrario, que *O'* se mueve con respecto a *O* no con velocidad constante sino con aceleración a_0 constante. En este caso $OO' = (1/2)a_0t^2$ y así, la relación entre las coordenadas es

$$x(t) = x'(t) + \frac{1}{2}a_0t^2$$

Entonces

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{dx'(t)}{dt} + a_0t \qquad \Rightarrow \qquad v(t) = v'(t) + a_0t$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{dv'(t)}{dt} + a_0 \qquad \Rightarrow \qquad a(t) = a'(t) + a_0$$

Es decir, en este caso las aceleraciones que miden *O* y *O'* no son iguales sino que difieren en a_0.

Recordemos ahora que la segunda ley de Newton afirma que las fuerzas producen aceleraciones. Hemos visto que si *O'* se mueve con especto a *O* a velocidad constante, ambos observadores miden las mismas aceleraciones y, por lo tanto, requieren las mismas fuerzas para explicarlas. Ya hemos dicho que los sistemas de referencia que se mueven a velocidad constante se llaman inerciales. Por el contrario, si *O'* se mueve respecto a *O* con movimiento acelerado, los dos observadores miden aceleraciones diferentes y, por lo tanto, requieren fuerzas diferentes. En efecto, *O* escribirá la ley de Newton de la forma $F = ma$, y *O'* escribirá $F' = ma'$. Pero acabamos de ver que $a' = a - a_0$ y así

$$F' = ma' = m(a - a_0) = F - ma_0$$

Es decir, si el observador *O'* quiere seguir manteniendo la validez de la segunda ley de Newton en su sistema de referencia debe introducir una fuerza extra de valor $F_0 = -ma_0$.

Hay que tener en cuenta que *O'* no tiene por qué saber que él se encuentra en un sistema en movimiento. Podría estar encerrado y no ver el exterior. Simplemente ve que tiene que introducir una fuerza F_0 de origen desconocido.

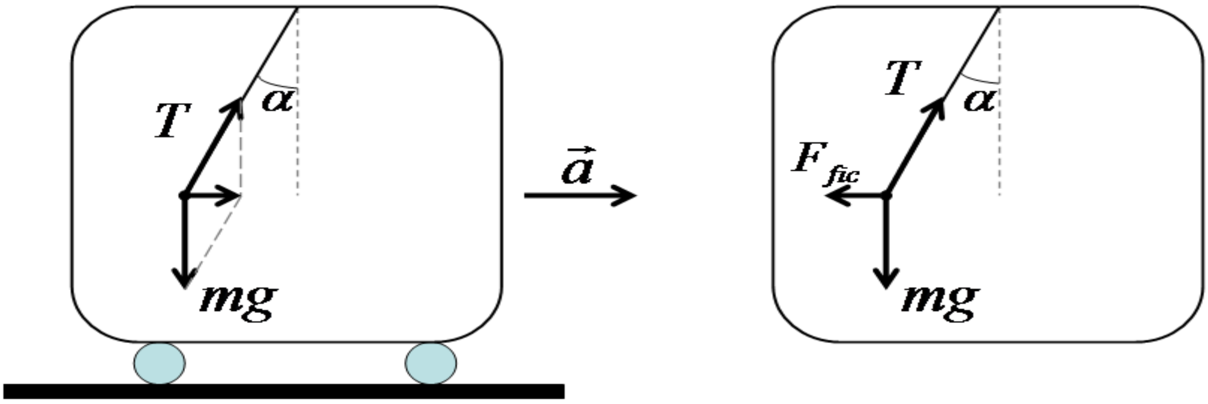
Supongamos, por ejemplo, que *O'* cuelga un cuerpo de masa *m* del techo y observa que el cuerpo queda en reposo pero desplazado hacía la izquierda respecto a la vertical del punto de suspensión, de modo que la cuerda forma un ángulo α (ver figura de la derecha). *O'* pensará inmediatamente que hay una fuerza F_{fic} que actúa hacia la izquierda, y que la posición de equilibrio se alcanza cuando la componente horizontal de la tensión de la cuerda compensa a dicha fuerza. Por su parte, la componente vertical de la tensión compensa al peso. En definitiva, puesto que *a' = 0*, la segunda ley de Newton, desglosada en componentes cartesianas, es

$$T\ \mathrm{sen}\alpha - F_{fic} = 0$$
$$T\cos\alpha - mg = 0$$

de donde se deduce fácilmente

$$\tan\alpha = \frac{F_{fic}}{mg}$$

O' puede pensar que la causa de esta fuerza F_{fic} es algún campo de fuerzas especial, por ejemplo, un campo eléctrico horizontal. Para ello, repite el experimento pero colgando cuerpos con diferente carga eléctrica, pensando que si la carga es mayor, también lo será la fuerza F_{fic} el ángulo α será mayor. Sin embargo, *O'* comprueba que el ángulo α es siempre el mismo cuelgue lo que cuelgue. (La realidad es que todos los objetos en el laboratorio, incluido el propio observador, parecen ser empujados hacia la izquierda.) Por ello, tiene que concluir que la fuerza F_{fic} que tira del cuerpo que cuelga es siempre proporcional a la masa de dicho cuerpo, es decir, $F_{fic} = km$, siendo *k* una constante de proporcionalidad. Entonces $\tan\alpha = k/g = cte.$, como le dice el experimento.



Pero hay una explicación más sencilla y es que *O'* se encuentra dentro de un laboratorio que se mueve hacia la derecha con aceleración a_0. Un observador *O* que está en reposo fuera del laboratorio ve que éste y todo lo que hay en él, en particular el cuerpo que cuelga, se mueve con aceleración a_0. (Ver figura de la izquierda). Por lo tanto, es necesario que sobre el cuerpo actúe una fuerza horizontal para mantener dicha aceleración, y esta fuerza la proporciona la componente horizontal de la tensión: Ésa es la auténtica razón de que la cuerda esté inclinada. En definitiva, la segunda ley de Newton para el observador *O* es

$$\begin{aligned} T\ \mathrm{sen}\alpha &= ma \\ T\cos\alpha - mg &= 0 \end{aligned} \qquad \text{y asi} \qquad \tan\alpha = \frac{a}{g}$$

Ahora queda claro que el valor de la misteriosa constante *k* que medía *O'* no es otra cosa que el valor de la aceleración que mide *O*, y que la fuerza F_{fic} es una fuerza ficticia que tuvo que introducir *O'* para explicar el fenómeno desde su sistema de referencia acelerado.

EJEMPLO

ENUNCIADO

Supongamos que un observador *O'* se encuentra en un laboratorio circular y hace el mismo experimento de colgando objetos del techo. Lo que encuentra ahora es que no todos los objetos se desvían de la vertical en la misma dirección sino que se desvían alejándose siempre del centro del laboratorio. Nuevamente piensa que hay una fuerza horizontal F_{fic} que tira hacia fuera, y por ello la llama con el pomposo nombre de fuerza centrífuga. En la posición de equilibrio de cada objeto colgante, esta fuerza está compensada por la componente horizontal de la tensión de la cuerda, y *O'* llega nuevamente a una expresión $\tan\alpha = F_{fic}/mg$ para el ángulo de inclinación. Pero ahora nota algo nuevo. Todos los objetos que cuelgan a la misma distancia del centro del laboratorio se desvían el mismo ángulo, pero los objetos que cuelgan a más distancia del centro se desvían más que los que cuelgan a menos distancia. Llega así a la conclusión de que la fuerza F_{fic} no solo es directamente proporcional a la masa de los objetos sino también a la distancia al centro del laboratorio; es decir,: $F_{fic} = kmr$. ¿Existe una explicación más sencilla para este fenómeno? ¿A qué corresponde, en esta explicación, la constante *k*?

RESOLUCIÓN

Lo que ocurre es que *O'* se encuentra sin saberlo dentro de un tiovivo que gira con velocidad angular ω. Un observador *O* situado fuera del tiovivo ve que el cuerpo está describiendo una circunferencia con velocidad angular ω constante. El movimiento circular uniforme es también un movimiento acelerado, aunque ahora la aceleración no es tangente sino normal a la trayectoria, y su valor es $a_n = \omega^2 r$, siendo *r* la distancia el centro de giro. La segunda ley de Newton para *O* es

$$\begin{aligned} T\ \mathrm{sen}\alpha &= m\omega^2 r \\ T\cos\alpha - mg &= 0 \end{aligned} \qquad \text{y asi} \qquad \tan\alpha = \frac{\omega^2 r}{g}$$

de modo que ahora $k = \omega^2$.

EJERCICIO DE AUTOCOMPROBACIÓN

ENUNCIADO

Una persona que está dentro de un ascensor en un edificio deja caer una piedra desde 3 metros de altura respecto al suelo del ascensor. La piedra tarda 0,87 segundos en caer al suelo del ascensor. ¿Con qué aceleración se está moviendo el ascensor con respecto al edificio
?

RESULTADO

$a_{ascensor} \approx 1{,}8\ \mathrm{m/s^2}$ hacia abajo

REFERENCIAS:

- P. A. Tipler y G. Mosca, *Física para la Ciencia y la Tecnología*, 6ª Edición, Editorial Reverté, 2010.
  P. A. Tipler y G. Mosca, *Física para la Ciencia y la Tecnología*, 5ª Edición, Editorial Reverté, 2005.

AUTOR:

- Javier García Sanz