Fundamentos de Matemáticas.

Prueba de Evaluación a Distancia. Curso 2020-21

- Se debe marcar una sola respuesta correcta. Cada pregunta acertada suma 1 punto, las incorrectas restan 0.3. Las preguntas en blanco no puntúan.
- Las preguntas deben ser contestadas en el cuestionario virtual al que se accede a través del link "*CURSO 2020-21. Cuestionario: Prueba de evaluación a distancia online (disponible a partir del día 8 de enero de 2021)*".
- Recuerde que dentro del examen virtual las respuestas deben ser marcadas en la pestaña correspondiente.
- El cuestionario virtual estará disponible del 8 al 12 de enero, ambos inclusive.

ENUNCIADO DEL TEST

1. En el proceso de calcular la matriz escalonada reducida de una matriz $A \in \mathcal{M}_3$ se obtiene que dicha matriz reducida es la matriz identidad tras haber realizado las siguientes operaciones elementales:

$$A \underset{F_1 \leftrightarrow F_3}{\rightarrow} A' \underset{F_2 \to F_2 - F_1}{\rightarrow} A'' \underset{F_1 \to \frac{1}{3}F_1}{\rightarrow} A'' \underset{F_1 \to F_1 + F_2}{\rightarrow} A''' \underset{F_2 \to -\frac{1}{2}F_2}{\rightarrow} A'''' \underset{F_3 \to F_3 + F_2}{\rightarrow} A''''' \underset{F_2 \to F_2 - 2F_3}{\rightarrow} A'''''' \underset{F_1 \to F_1 + \frac{7}{3}F_3}{\rightarrow} I$$

Se pide calcular la matriz A.

(a) $A = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ -2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

(c) La matriz A no se puede determinar (d) Ninguna de las anteriores

2. Sea $A \in \mathcal{M}_7$ tal que $\det A = -1$. Calcule $\det(-2A)$.

(a) $\det(-2A) = -128$ (b) $\det(-2A) = 2$

(c) $\det(-2A) = -64$ (d) Ninguna de las anteriores

3. Determine los valores de a para los que los vectores

$$\mathbf{A} = \{(a,1,1,1),(1,a,1,1),(1,1,a,1),(1,1,1,a)\}$$

no formen una base de $\mathbb{R}^4$.

(a) $a = -3$ (b) $a \in \{3,-3\}$

(c) $a \in \{-1,3\}$ (d) Ninguna de las anteriores

4. Sea $\mathcal{M}_2$ el espacio vectorial de las matrices de orden 2 con sus operaciones vectoriales usuales. Consideremos la aplicación lineal $F : \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_2$

definida por

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathcal{M}_2 & \to & \mathcal{M}_2 \\ & A & \mapsto & \frac{1}{2}A^T \end{array}$$

Consideramos la siguiente base:

$$\mathbf{A} = \left\{ \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Se pide determinar la base $\mathbf{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4\}$ tal que

$$M(F; \mathbf{A}, \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) No es posible encontrar dicha base

(b) $\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

(c) $\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$

(d) Ninguna de las anteriores

5. Sea $F: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal definida por

$$F((x_1, x_2, x_3, x_4) = (4x_2 + 4x_3 - 8x_4, 4x_4 - 4x_2, 4x_4 - 4x_3, x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4)$$

Señale una ecuaciones implícitas del subespacio imagen $\mathrm{Im}F$.

(a) $\mathrm{Im}F = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4 : y_1 - y_2 + y_3 = 0\}$

(b) $\mathrm{Im}F = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4 : y_1 - y_2 - y_3 = 0\}$

(c) $\mathrm{Im}F = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4 : y_1 + y_2 + y_3 = 0\}$

(d) Ninguna de las anteriores

6. Sea la sucesión $a_n = (\ln x)^n$. Señale la respuesta correcta:

(a) $\{a_n\}$ es convergente si y solamente si $x \in [-e, e]$

(b) $\{a_n\}$ es convergente si y solamente si $x \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$

(c) $\{a_n\}$ es convergente si y solamente si $x = 0$

(d) Ninguna de las anteriores

7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \int_1^{x^2} e^{t^2} dt$. Calcule el valor de la derivada $f'(-1)$.
   (a) $f'(-1) = 2e^2$ (b) $f'(-1) = 0$
   (c) $f'(-1) = -2e$ (d) Ninguna de las anteriores

8. Encuente un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ que minimiza la distancia a los puntos $\mathbf{a}_1 = (1, 4)$, $\mathbf{a}_2 = (5, 2)$ y $\mathbf{a}_3 = (3, -2)$, es decir que minimiza la cantidad

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}_1\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{a}_2\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{a}_3\|^2$$

   (a) $\mathbf{x} = (4, \frac{5}{3})$ (b) $\mathbf{x} = (3, \frac{4}{3})$ (c) $\mathbf{x} = (1, \frac{2}{3})$ (d) Ninguna de las anteriores

9. Dada la siguiente ecuación en coordenadas polares

$$r = \operatorname{sen}^2 \theta$$

   encuentre una expresión equivalente en coordenadas cartesianas (x, y).
   (a) $y^2 = \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}$ (b) $4x^2 y = \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}$
   (c) $x^2 y^2 = x^2 + y^2$ (d) Ninguna de las anteriores

10. Dada una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y un recinto $\mathbf{M} \subset \mathbb{R}^2$ se define el valor medio de f en $\mathbf{M}$ como

$$\operatorname{avg}(f) := \frac{\int_{\mathbf{M}} f(x, y) dx dy}{\operatorname{area}(\mathbf{M})}.$$

   Calcule el valor medio de la función $f(x, y) = \sqrt{x + y}$ en el rectángulo de vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 1)$ y $(0, 1)$.
   (a) $\operatorname{avg}(f) = 1.6601$ (b) $\operatorname{avg}(f) = 1.5268$
   (c) $\operatorname{avg}(f) = 1.7413$ (d) Ninguna de las anteriores