Capítulo 1. El concepto de operación

ENUNCIADOS

Ejercicio 1 Sea $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ el conjunto de los números naturales. Sobre dicho conjunto consideramos la operación $\diamond$ definida por

$$\begin{array}{rcc} \diamond : \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ (n, m) & \longmapsto & n \diamond m = |n - m| \end{array}$$

en donde recordemos que $|\cdot|$ denota el valor absoluto. Señale razonadamente si las siguientes afirmaciones son ciertas:

- $\diamond$ es asociativa
- $\diamond$ es conmutativa
- No existe elemento neutro

Ejercicio 2 Sea $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ el conjunto de los números naturales. Sobre dicho conjunto consideremos la operación $\diamond$ definida de la siguiente manera

$$\begin{array}{rcc} \diamond : \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ (n, m) & \longmapsto & n \diamond m = 1 + n \cdot m \end{array}$$

Señale razonadamente si las siguientes afirmaciones son ciertas:

- $\diamond$ es asociativa
- $\diamond$ es conmutativa
- No existe elemento neutro para $\diamond$

Ejercicio 3 Si $V = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 | a > 0\}$ y $(a, b) * (c, d) = (ac, b + d)$, el elemento neutro de $(V, *)$ verifica:

a) Es $(0, 0)$.

b) Existe y pertenece a V.

c) No existe.

d) Ninguna de las anteriores.

Ejercicio 4 Estúdiese las propiedades de la siguiente operación $*$ definida entre elementos de $\mathbb{Z}$: $a * b = 2ab - b^2 + 1$ siendo $a,\ b \in \mathbb{Z}$.

Ejercicio 5 Razónese si es un anillo o no lo es cada uno de los siguientes conjuntos con sus operaciones suma y producto habituales:

a) El conjunto de los polinomios de grado menor o igual que cinco.

b) El conjunto de los polinomios de grado par.

c) Las matrices de orden 2×3.

d) El conjunto de todas las subsucesiones de una sucesión dada.

Ejercicio 6 i) Considere el conjunto de los polinomios con su suma y producto habituales y de un ejemplo de un elemento no nulo de dicho conjunto que no posea inverso con respecto al producto. (Piense en una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{1}{f}$ no esta definida en todo el dominio.

ii) Razone si el conjunto de las funciones continuas con sus operaciones habituales es un cuerpo.

Ejercicio 7 Sea el conjunto $M = \{a, b, c\}$ y consideremos la ley de composición interna $\circ$ definida mediante la siguiente tabla

$\circ$	a	b	c
a	a$\circ$a=b	a$\circ$b=a	a$\circ$c=a
b	b$\circ$a=a	b$\circ$b=b	b$\circ$c=c
c	c$\circ$a=c	c$\circ$b=c	c$\circ$c=b

Señale. si existe, el elemento neutro. ¿Es un grupo?.

Ejercicio 8 Si consideramos en $\mathbb{R}^2$ la operación $\circ$ definida como

$$(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (x_1 y_1,\ x_1 + y_1)$$

Estudie si es conmutativa, asociativa y si posee elemento neutro.

Ejercicio 9 Sea $\mathbb{M}_2$ el espacio vectorial de matrices cuadradas de orden 2. Consideramos $*$ la operación definida por

$$A * B = B^T \times A^T \text{ para todo } A, B \in \mathbb{M}_2,$$

en donde $\times$ denota el producto usual de matrices. De las siguientes elecciones de subconjuntos señale el número de ellos para los que $*$ continúa siendo una operación. Es decir, dadas las afirmaciones:

- $*$ es una operación sobre el conjunto de matrices diagonales

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

- $*$ es una operación sobre el conjunto de matrices

$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$$

- $*$ es una operación sobre el conjunto de matrices triangulares inferiores

$$M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

- $*$ es una operación sobre el conjunto de matrices

$$M_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Ejercicio 10 Considere la operación $*$ sobre el conjunto de los números reales $M = \mathbb{R}$ definida por

$$a * b = 10^{a+b} \text{ para todo } a, b \in \mathbb{R}.$$

Estudie la veracidad de las siguientes afirmaciones:

- $*$ es conmutativa.
- El elemento inverso de $a = 2$ viene dado por $a' = 1/2$.
- El elemento neutro viene dado por $e = 1$.

Ejercicio 11 Pruébese mediante el método de inducción que $x^n - y^n$ siempre tiene a $x - y$ como factor siendo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 12 Aproximar $\sqrt{11}$ *por un número racional con un error menor que una diez milésima, esto es un error menor que* 10^{-4}.

Ejercicio 13 Efectue las siguientes operaciones con numero complejos y determine el módulo y argumento de su resultado y representar sus afijos en el plano complejo. a) i^{18}. b) $(1+i)^3$.

Ejercicio 14 Dado un conjunto $M = \{a, b, c, d\}$ defínase una ley interna $\diamond$ de modo que $(M, \diamond)$ sea un grupo abeliano(véase nota sobre relación de congruencia que puede encontrar en el curso virtual).

Ejercicio 15 Determine el ínfimo y supremo de la sucesión $\left(e^{\frac{n^4+1}{n^5+1}}\right)$.

Ejercicio 16 Estúdiense si el conjunto $B = \cup_{n=1}^{n=5}(n, n+2)$ es acotado inferior y superiormente y, en su caso, determínese los conjuntos de cotas inferiores y superiores. Señale el supremo, ínfimo, la adherencia, la acumulación y sus puntos aislados.

Ejercicio 17 Determíne el supremo e ínfimo de la sucesión $\left(\dfrac{e^n}{e^n+1}\right)$.

Ejercicio 18 Considerando el conjunto de números reales

$$A = \left\{(-1)^n \frac{n-1}{n^2+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

determine su supremo, ínfimo, adherencia, acumulación y puntos aislados.

Ejercicio 19 Pruebe por el principio de inducción la siguiente fórmula

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

Ejercicio 20 Encuéntrese para qué valor de $n \geq 1$ el número $\sqrt{n-1}$ es irracional.

Ejercicio 21 Consideremos el producto cartesiano de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, es decir, los pares ordenados

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \colon x \in \mathbb{R} \text{ y } y \in \mathbb{R}\}.$$

Se pide reescribir, si es posible, los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ como un producto cartesiano de dos subconjuntos de $\mathbb{R}$:

a) $\{(x, y) \colon x \in \mathbb{Z}\}$

b) $\{(x, y) \colon y = x^2\}$

c) $\{(x, y) \colon x < 0\}$

d) $\{(x, y) \colon 1 \leq x \leq 2 \text{ y } 3 \leq y \leq 5\}$

Repáse en el curso cero, el producto cartesiano de dos conjuntos y la definición de par ordenado. Nótese que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es $\mathbb{R}^2$ (también llamado el *plano complejo*).

Ejercicio 22 Se pide un subconjunto de $\mathbb{R}$ que tenga únicamente dos puntos de acumulación.

Ejercicio 23 Pruébese que el módulo del producto de dos complejos es el producto de sus módulos.

Ejercicio 24 Un *número algebraico* es cualquier número real o complejo que es solución de una ecuación polinómica de la forma: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ siendo $n > 0$, $a_n \neq 0$ (grado del número algebraico) y cuyos coeficientes son números enteros, es decir, $a_i \in \mathbb{Z}$. Se piden ejemplos de números algebraicos reales y complejos.

SOLUCIONES

Solución 1

- $\diamond$ no es asociativa . Basta tomar $n = 1$, $m = 2$, $q = 3$, en dicho caso se tiene

$$\begin{gathered}(n \diamond m) \diamond q = (1 \diamond 2) \diamond 3 = 1 \diamond 3 = 2 \\ \neq \\ n \diamond (m \diamond q) = 1 \diamond (2 \diamond 3) = 1 \diamond 1 = 0.\end{gathered}$$

- $\diamond$ es conmutativa. Aplicando propiedades del valor absoluto, para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$ se tiene

$$n \diamond m = |n - m| = |-(n - m)| = |m - n| = m \diamond n.$$

- $e = 0$ es el elemento neutro, ya que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\begin{aligned} n \diamond 0 &= |n - 0| = n, \\ 0 \diamond n &= |0 - n| = n. \end{aligned}$$

Solución 2

- $\diamond$ no es asociativa. Tomemos $n = 1$, $m = 2$, $q = 3$, se tiene

$$\begin{gathered}(n \diamond m) \diamond q = (1 \diamond 2) \diamond 3 = 3 \diamond 3 = 10 \\ \neq \\ n \diamond (m \diamond q) = 1 \diamond (2 \diamond 3) = 1 \diamond 7 = 8.\end{gathered}$$

- $\diamond$ es conmutativa. Para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$n \diamond m = 1 + n \cdot m = 1 + m \cdot n = m \diamond n.$$

- Si existiese un elemento neutro $e \in \mathbb{N}$, entonces para $n = 1$ se tendria

$$1 \diamond e = 1 \Leftrightarrow 1 + e = 1 \Leftrightarrow e = 0$$

  De lo anterior necesariamente $e = 0$, pero en dicho caso

$$2 \diamond e = 2 \diamond 0 = 1 \neq 2,$$

  luego no verifica la propiedad de elemento neutro para el caso particular $n = 2$. Por tanto no existe elemento neutro.

Solución 3 Los elementos que forman V son pares de números reales tales, que su primera coordenada es mayor que 0.

a) es falsa.
El par $(0,0)$ no es el elemento neutro de $(V,*)$:

$$(0,0) \notin V \text{(su primera coordenada no es mayor que 0)}.$$

b) es correcta.
Existe y es el $(1,0)$ como se comprueba a continuación.
Si existiera un elemento neutro (c,d) de $(V,*)$ debería verificar

$$(a,b)*(c,d)=(a,b) \quad \text{y} \quad (c,d)*(a,b)=(a,b).$$

- $(1,0)$ es elemento neutro por la derecha:
  $(a,b)*(c,d)=(a,b) \Leftrightarrow \begin{cases} ac=a \\ b+d=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ d=0 \end{cases}$
- $(1,0)$ es también elemento neutro por la izquierda:
  $(1,0)$ verifica $(1,0)*(a,b)=(1a,0+b)=(a,b)$.

Por tanto $(1,0)\in V$ es el elemento neutro. La estructura algebraica de un conjunto depende de las operaciones definidas entre sus elementos.

c) es falsa.

Solución 4 En primer lugar, la operación $*$ definida entre elementos de $\mathbb{Z}$ es efectivamente una operación. En efecto, si a, $b\in\mathbb{Z}$ entonces $a*b=2ab-b^2+1\in\mathbb{Z}$ (nótese que ab representa el producto conocido entre números enteros y el símbolo $-$ representa la resta conocida de números enteros). Además, la operación $*$ no es asociativa porque $(a*b)*c\neq a*(b*c)$ con a, b, $c\in\mathbb{Z}$. En efecto:
$(a*b)*c=(2ab-b^2+1)*c=2(2ab-b^2+1)c-c^2+1=4abc-2b^2c+2c-c^2+1$ mientras que
$a*(b*c)=a*(2bc-c^2+1)=2a(2bc-c^2+1)-(2bc-c^2+1)^2+1$
La operación $*$ no cumple la propiedad conmutativa ya que, en general, $a*b\neq b*a$ porque $a*b=2ab-b^2+1$ y $b*a=2ba-a^2+1$ pero $a^2\neq b^2$ en general. El elemento neutro $e\in\mathbb{Z}$ no existe ni por la derecha (resp. por la izquierda) porque no existe $e\in\mathbb{Z}$ tal que $a*e=a$ (resp. $e*a=a$) para todo $a\in\mathbb{Z}$) y, por consiguiente, no existe elemento simétrico ni por la derecha ni por la izquierda.

Solución 5 a) El conjunto $(P_5(x), +, \times)$ de los polinomios de grado menor o igual que cinco con las operaciones suma $+$ y producto no es un anillo unitario, ya que $(P_5(x), +)$ es un gupo abeliano: la suma es asociativa y conmutativa, $p(x) = 0$ es el elemento neutro y $-q(x)$ es el elemento simétrico de $q(x)$. Sin embargo, el grado del polinomio producto de dos polinomios de $P_5(x)$ puede ser mayor que cinco, con lo cual $\times$ no es una ley interna y $(P_5(x), +, \times)$ no es un anillo.

b) El producto de dos polinomios de grado par es un polinomio de grado par y por tanto la operación producto $\times$ es interna. En cambio, la suma de polinomios de grado par no es necesariamente un polinomio de grado par. De hecho, tomando dos polinomios

$$p_1(x) = x^2 + x + 1, \ p_2(x) = -x^2 + 2x + 3$$

su suma

$$p_1(x) + p_2(x) = x^2 + x + 1 - x^2 + 2x + 3 = 3x + 4$$

es un polinomio de grado 1(impar). Luego no es una operación interna y no cabe hablar de anillo.

c) Aunque las matrices $\mathcal{M}_{2\times 3}$ de orden 2×3 son un grupo abeliano para la suma, es obvio que el producto de dos de ellas no está definido y no tiene sentido hablar de anillo.

d) En el conjunto de todas las subsucesiones de una sucesión dada, la suma de dos elementos no tiene porque ser una subsucesión, luego no es una operación interna y no tiene sentido hablar de grupo.

Solución 6 Consideramos el conjunto de las funciones continuas definidas en todo el dominio $\mathbb{R}$ y denotemoslo por

$$C(\mathbb{R}) : \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ continua}\}$$

y sea P el conjunto de los polinomios. Es evidente que $P \subset C(\mathbb{R})$.

Por otro lado dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ su posible función "inversa" $\frac{1}{f}$ no está definida en los puntos en que f se anula ya que en dichos puntos la función $\frac{1}{f}$ no toma un valor (división por cero). Consideremos el polinomio $p(x) = x$ que evidentemente no es el elemento nulo (téngase en cuenta que el elemento nulo $\mathbf{0}$ en dicho conjunto es la función constante $\mathbf{0}(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ que es evidentemente una función continua).

Entonces tenemos:

A. En primer lugar $\left(\frac{1}{p}\right)(x) = \frac{1}{x}$ no es un polinomio por tanto el posible inverso no existiría en el conjunto de los polinomios. En cambio compruebe que $p(x) = x^2 + 1$ sí que admite inverso ya que $(\frac{1}{p})(x) = \frac{1}{x^2+1}$ está definida en todo el dominio por no anularse el denominador.

B. $\dfrac{1}{p}$ es no está definida en $\overline{x} = 0$, luego no es una función en todo $\mathbb{R}$ y por tanto no existe dicho elemento en el espacio de las funciones continuas con dominio todo el espacio $\mathbb{R}$. Luego $(C(\mathbb{R})\backslash\{\mathbf{0}\}, \times)$ no es un grupo y por tanto $(C(\mathbb{R}), +, \times)$ no es un cuerpo.

Solución 7 a, c no puede ser neutros ya que $a \circ a = c \circ c = b$. El elemento b es el neutro ya que de la tabla

$$\begin{aligned} a \circ b &= b \circ a = a \\ c \circ b &= b \circ c = c \\ b \circ b &= b \end{aligned}$$

Por otro lado no se cumple la propiedad asociativa, por ejemplo $c \circ (c \circ a) \neq (c \circ c) \circ a$ ya que

$$\begin{aligned} c \circ (c \circ a) &= c \circ c = b \\ (c \circ c) \circ a &= b \circ a = a \end{aligned}$$

Por tanto no es grupo.

Solución 8 La operación no es conmutativa ya que tomando por ejemplo $\mathbf{a} = (x_1, y_1) = (1, 1)$, $\mathbf{b} = (x_2, y_2) = (2, 1)$ se tiene

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = (1, 1) \circ (2, 1) = (1, 2) \neq (2, 3) = (2, 1) \circ (1, 1) = \mathbf{b} \circ \mathbf{a}$$

Tampoco es asociativa ya que si añadimos a los puntos anteriores el punto $\mathbf{c} = (x_3, y_3) = (0, 1)$ se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \circ (\mathbf{b} \circ \mathbf{c}) &= (1, 1) \circ ((2, 1) \circ (0, 1)) = (1, 1) \circ (2, 3) = (1, 2) \\ (\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) \circ \mathbf{c} &= ((1, 1) \circ (2, 1)) \circ (0, 1) = (1, 2) \circ (0, 1) = (2, 3) \end{aligned}$$

Del mismo modo no existe elemento neutro, para ello debería existir un elemento $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$ que verificase

$$(x_1, y_1) \circ (e_1, e_2) = (e_1, e_2) \circ (x_1, y_1) = (x_1, y_1)$$

para cualquier (x_1, y_1) de $\mathbb{R}^2$. En general es falso, ya que si por ejemplo consideramos $(x_1, y_1) = (1, 1)$ se tiene

$$(1, 1) \circ (e_1, e_2) = (1, 2) \neq (1, 1)$$

Si en vez de la operación propuesta, considerasemos una operación $\diamond$ definida como

$$(x_1, y_1) \diamond (x_2, y_2) = (x_1 x_2,\ y_1 + y_2)$$

compruébese que dicha operación sí es conmutativa, asociativa y tiene elemento neutro dado por

$$\mathbf{e} = (1, 0).$$

Solución 9 Se trata de ver para cada subconjunto si para todo A, $B \in M_i$ entonces

$$A * B \in M_i \text{ para todo } i = 1, ..., 4.$$

- $*$ es una operación sobre M_1 ya que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}^T \times \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} a_1 a_2 & 0 \\ 0 & b_1 b_2 \end{pmatrix} \in M_1 \end{aligned}$$

- $*$ es un operación sobre sobre M_2 ya que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}^T \times \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} a_1 b_2 & 0 \\ 0 & a_1 b_2 \end{pmatrix} \in M_2 \end{aligned}$$

- $*$ no una operación sobre M_3 ya que
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3$$
y se tiene
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin M_3 \end{aligned}$$

- $*$ no es una operación sobre M_4 ya que
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_4$$
y se tiene
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \notin M_4 \end{aligned}$$

Solución 10 Claramente la operación es conmutativa como consecuencia de la conmutatividad de la suma de números reales. En cambio el elemento neutro de $*$ no existe. Por ejemplo si consideramos el punto $\bar{a} = 0$ si existiese un elemento neutro $e \in \mathbb{R}$, éste debería verificar
$$e * 0 = 0,$$
lo que es equivalente a que
$$10^e = 0.$$
Como no existe ningún e verificando la identidad anterior, entonces no puede existir elemento neutro y consecuentemente tampoco el inverso.

Solución 11 Para $n = 1$ es cierto ya que $x^1 - y^1 = x - y$. Supongamos que es cierto para n, es decir, $x^n - y^n$ tiene a $x - y$ como factor. Para terminar basta probar que es cierto para $n + 1$, es decir, tenemos que probar que $x^{n+1} - y^{n+1}$ tiene a $x - y$ como factor. Como $x^{n+1} - y^{n+1} = x^n x - x^n y + x^n y - y^n y = (x - y)x^n + (x^n - y^n)y$ se concluye que $x^{n+1} - y^{n+1}$ tiene a $(x - y)$ con factor ya que $x^{n+1} - y^{n+1}$ es suma de dos términos que poseen a $(x - y)$ como factor, $(x - y)x^n$ y $(x^n - y^n)y$ (que lo tiene porque, por hipótesis, $x^n - y^n$ posee a $x - y$ como factor).

Solución 12 $\sqrt{11} = 3,3166247....$ por tanto $3,3166$ aproxima a $\sqrt{11}$ con un error menor que $0,0001$.

Solución 13 a) $i^{18} = (i^2)^9 = (-1)^9 = -1$ y su afijo es por tanto el punto $(-1, 0)$. Luego $\rho = 1$ y $\theta = \operatorname{arctag} 0 = \pi$.

b) $(1 + i)^3 = (1 + i)(1 + i)^2 = (1 + i)(1 + i^2 + 2i) = (1 + i)(1 - 1 + 2i) = 2i + 2i^2 = 2i - 2$. Luego su afijo es $(-2, 2)$.

Su módulo es $\rho = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Solución 14 De la nota de relaciones de congruencia sabemos que $(\mathbb{Z}/4, +, \cdot)$ es un anillo de cuatro elementos con unidad y conmutativo. Luego $(\mathbb{Z}/4, +)$ es un grupo multiplicativo, por tanto es un ejemplo de grupo conmutativo con cuatro elementos. Su tabla es

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Identificando $\diamond = +$, $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$, $d = 3$ se tiene

◦	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

En cambio destaquemos que $(\mathbb{Z}/4 - \{0\}, \cdot)$ no es un grupo. Si consideramos $\mathbb{Z}/4 = \{0, 1, 2, 3\}$ con la operación producto, su tabla es

$\cdot$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

El elemento neutro es 1, pero no existe inverso del elemento 2 y que 2 operado con cualquier elemento es 0 o 2 y por tanto $(\mathbb{Z}/4 - \{0\}, \cdot)$ no puede ser grupo. De hecho se puede probar que $(\mathbb{Z}/n, +, \times)$ es un cuerpo si y solamente si n es primo, lo que concuerda con este caso ya que $n = 4$ no es primo.

Solución 15 Partimos de la sucesión $a_n = e^{\frac{n^4+1}{n^5+1}}$, que como probaremos es una sucesiÃ³n decreciente. Es decir

$$a_1 = e \geq a_2 = e^{\frac{2^4+1}{2^5+1}} \geq ... \geq a_n = e^{\frac{n^4+1}{n^5+1}} \geq a_{n+1} = e^{\frac{(n+1)^4+1}{(n+1)^5+1}} \geq ...$$

Luego es evidente que el supremo, menor de las cotas superiores de la sucesiÃ³n, es el primer elemento. Mientras que el Ã-nfimo, mayor de las cotas inferiores de la sucesión, es el límite de la misma. Para probar es hecho, denotando dicho lÃ-mite por L, $L = \lim_{n\in\mathbb{N}} a_n$, se tiene que para cualquier cota inferior C de la sucesión (a_n) se cumple

$$a_n \geq C \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

Por tanto tomando límite en la expresión anterior

$$L = \lim_{n\in\mathbb{N}} a_n \geq C$$

Lo que prueba que L es el máximo de las cotas inferiores de la sucesión y por tanto su ínfimo. Esto es general para cualquier sucesión decreciente, en este caso particular

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = a_1 = e, \; \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n = \lim_{n\in\mathbb{N}} a_n = \lim_{n\in\mathbb{N}} e^{\frac{n^4+1}{n^5+1}} = e^{\lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^4+1}{n^5+1}} = e^0 = 1$$

Queda probar que la sucesión es decreciente, lo haremos estudiando el signo de la derivada. Si definimos la función

$$f(x) = e^{\frac{x^4+1}{x^5+1}},$$

y probamos que la función es decreciente en el dominio $I = [1, \infty)$ entonces necesariamente es decreciente en el subconjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ que está contenido en I. Para probar que la función f es decreciente en I basta que ver que su exponente $g(x) = \frac{x^4+1}{x^5+1}$ es decreciente. Ya que como la exponencial es una función creciente, si $y \leq x$ se tiene que $g(x) \leq g(y)$ y por tanto

$$f(y) = e^{g(y)} \geq e^{g(x)} = f(x).$$

Computando la derivada

$$g'(x) = -x^3 \frac{x^5 - 4 + 5x}{(x^5+1)^2}$$

se ve que la función derivada siempre es negativa, ya que su denominador es el menos producto de dos polinomios positivos en I, $h_1(x) = x^3$ y $h_2(x) = x^5 - 4 + 5x$. El primer polinomio $h_1(x)$ es evidente que es positivo. Mientras que el segundo tiene derivada $h_2'(x) = 5x^4 + 5$ positiva, luego es una función creciente en I con lo que

$$h_2(1) = 2 \leq h_2(x) \text{ para todo } x \in I$$

y también es positivo.

Luego la derivada de g es negativa,

$$g'(x) < 0 \text{ para todo } x \in I,$$

y concluimos por tanto que la función f es decreciente en I.

Solución 16 $B = \cup_{n=1}^{n=5}(n, n+2) = (1,3) \cup (2,4) \cup (3,5) \cup (4,6) \cup (5,7) = (1,7)$. Se trata de un intervalo abierto, su ínfimo y su supremo coincidirán con el extremo inferior y el extremo superior de dicho intervalo

$$\text{ínf}\, B = 1, \ \sup B = 7$$

La adherencia y su acumulación coinciden y viene dados por el cerrado

$$\overline{B} = B' = [1,7]$$

No contiene puntos aislados.

Solución 17 Se puede ver directamente que la sucesión es creciente

$$s(n+1) - s(n) = \frac{e^{n+1}}{e^{n+1}+1} - \frac{e^n}{e^n+1} = \frac{e^{n+1}-e^n}{(e^{n+1}+1)(e^n+1)} > 0$$

Otra forma es ver que la función $s(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$ tiene derivada positiva en todo el dominio

$$s'(x) = \frac{e^x(e^x+1) - e^x e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} \geq 0$$

en particular para todo $x \in \mathbb{N}$ y por tanto es creciente. Por tanto

$$s(1) \leq s(2) \leq ... \leq s(n) \leq s(n+1) \leq ... \leq \lim_{n\to\infty} s(n)$$

Luego

$$\begin{aligned} \inf s(n) &= s(1) = \frac{e}{e+1} \\ \sup s(n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{e^n+1} = 1. \end{aligned}$$

Solución 18 El conjunto está formado por los términos de la sucesión

$$a_n = (-1)^n \frac{n-1}{n^2+1}$$

que toma valores positivos en los términos pares y negativos en los términos impares. En general si definimos

$$f(n) = \frac{n-1}{n^2+1}$$

su derivada viene dada por

$$f'(n) = -\frac{n^2-2n-1}{(n^2+1)^2}$$

que se anula en los puntos $\{\sqrt{2}+1, 1-\sqrt{2}\} \approx \{2,4142, -0{,}41421\}$.En el intervalo $[1, 2{,}41]$ la función derivada toma valores positivos, mientras que en el intervalo $[2{,}41, \infty)$ la función derivada toma valores negativos. Luego la función f es decreciente en $[2{,}41, \infty)$ y por tanto la sucesión $(b_n) = \left(\frac{n-1}{n^2+1}\right)$ es decreciente para valores mayores de 3

$$b_n \geq b_{n+1} \text{ para } n \geq 3$$

En los términos pares se tiene $(-1)^{2n} = 1$ y por tanto $a_{2n+2} = b_{2n+2} \leq b_{2n} = a_{2n}$ para $2n$ par mayor que 3. Mientras que en los impares $(-1)^{2n-1} = -1$ y por tanto $a_{2n+1} = -b_{2n+1} \geq -b_{2n-1} = a_{2n-1}$ para $2n-1$ impar mayor que 3. Es decir la sucesión es decreciente en los términos pares y creciente en los impares siempre a partir del tercer término. Por otra parte el supremo de la sucesión solamente se podrá tomar en los términos pares por ser los positivos. Además por el análisis anterior la sucesión es decreciente a partir del término 3, luego el supremo de la sucesión se encuentra en

$$\sup A = \max\{a_2, a_4\} = \max\left\{\frac{1}{5}, \frac{3}{17}\right\} = \frac{1}{5}$$

Siguiendo un razonamiento similar, el ínfimo de la sucesión se encuentra en los términos impares, y por ser la sucesión creciente a partir de $n = 3$, el ínfimo se alcanza en

$$\inf A = \min\{a_1, a_3\} = \min\left\{0, -\frac{1}{5}\right\} = -\frac{1}{5}$$

La acumulación está formada por los límites de las subsucesiones formadas por elementos del conjunto sin que dicho límite sea elemento de dicha sucesión.En este caso cualquier subsucesión de elementos de A tiende a 0 ya que

$$\lim_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n\frac{n-1}{n^2+1}=0.$$

En cambio la adherencia está formada por todos los límites de las subsucesiones formadas por elementos del conjunto, y en este caso la subsucesiones pueden contener al límite. Como $0=a_1$ pertenece al propio A, se tiene

$$\operatorname{Adh} A = A.$$

A los conjuntos cuya adherencia coincide con el propio conjunto se les dice cerrados, ya que intuitivamente cualquier sucesión del conjunto tiende a otro elemento del conjunto. El conjunto de puntos aislados incluye a todos los puntos de A que no pertenecen a la acumulación, es decir todos los punto de A exceptuado el punto $\{0\}$ son aislados. Intuitivamente se puede comprobar que dichos puntos aislados ya que son aquellos puntos de A que dejan "huecos" unos con respecto a los otros.

Solución 19 Problemos la fórmula por inducción

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

Para $n=1$ la fórmula es cierta ya que

$$\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]_{n=1}=\frac{1}{2}1(1+1)=1$$

Supuesto que se verifica la fórmula para $n-1$ términos, es decir

$$1+2+3+\ldots+(n-1)=\frac{1}{2}(n-1)n \tag{1}$$

veamos que se verifica para n términos. De hecho aplicando la fórmula (**??**) se tiene

$$\begin{aligned}1+2+3+\ldots+(n-1)+n &= \frac{1}{2}(n-1)n+n=\frac{(n-1)n+2n}{2}\\ &= \frac{n^2+n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

lo que prueba la fórmula en general.

Solución 20 Para que $\sqrt{n-1}$ sea un número racional, deben existir $p, q \in \mathbb{N}$ no divisibles entre sí tal que

$$\sqrt{n-1} = \frac{p}{q} \rightarrow n - 1 = \frac{p^2}{q^2} \qquad (2)$$

Luego $\left(\frac{p}{q}\right)^2$ es un número natural y como p, q no son divisibles entre sí, necesariamente $q = 1$. Una manera de ver que $q = 1$, es considerando el *Teorema Fundamental de la Aritmética* que dice que cualquier número natural se puede expresar de manera única como un producto de factores primos. Por ejemplo los números 12, 65 se pueden descomponer como

$$\begin{aligned} 12 &= 2^2 \cdot 3 \\ 65 &= 5 \cdot 13 \end{aligned}$$

Si pensamos el término de estas descomposiciones podemos ver que el cociente

$$\frac{p^2}{q^2} = \frac{p_1^2 \cdot p_2^2 \cdot \ldots, p_k^2}{q_1^2 \cdot q_2^2 \ldots \cdot q_l^2}$$

es un cociente de número primos $p_1, p_2, \ldots, p_k$, q_1, $q_2, \ldots, q_l$ distintos entre sí. Como $\frac{p^2}{q^2}$ es un número natural los elementos del denominador se tiene que ir cancelando con los del denominador para dar un número natural. Pero eso es imposible ya que los primos $p_1, p_2, \ldots, p_k$, q_1, $q_2, \ldots, q_l$ son distintos. Luego necesariamente $q = 1$. Por tanto

$$n = p^2 + 1 \text{ con } > 1.$$

Finalmente, los números $n \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt{n-1}$ son irracionales, son aquellos que no verifican dicha condición

$$\left\{n \neq p^2 + 1 : p \in \{2, 3, 4, , \ldots\}\right\} = \{5, 10, 17, 26, \ldots\}$$

Solución 21 *a*) A) $\{(x, y) : x \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$

b) $\{(x,y)\colon y=x^2\}$ representa el conjunto de puntos de la gráfica de la parábola $y=x^2$. No es posible representarlo mediante un producto cartesiano de dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ porque en caso contrario, si $\{(x,y)\colon y=x^2\}=A\times B$ siendo A, $B\subseteq\mathbb{R}$ entonces como un producto cartesiano verifica:

si $(a,b)\in A\times B$ y $(a',b')\in A\times B$ entonces también (a',b), $(a,b')\in A\times B$

si $(a,b)=(0,0)$ (nótese que $(0,0)\in\{(x,y)\colon y=x^2\}=A\times B$ y $(a',b')=(1,1)$ (nótese que $(1,1)\in\{(x,y)\colon y=x^2\}=A\times B$) también $(1,0)\in A\times B$ lo cual no es cierto, ya que $(1,0)\notin\{(x,y)\colon y=x^2\}$. Luego, no es posible escribir el subconjunto $\{(x,y)\colon y=x^2\}$ de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ como un producto cartesiano de subconjuntos de $\mathbb{R}$.

c) $\{(x,y)\colon x<0\}=(-\infty,0)\times\mathbb{R}$

d) $\{(x,y)\colon 1\leq x\leq 2,\ 3\leq y\leq 5\}=[1,2]\times[3,5]$.

Se recomienda representar gráficamente cada uno de los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ anteriores.

Solución 22 Un ejemplo sería $A=\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}\cup\{1+\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Los únicos puntos de acumulación son $\{0,1\}$ por ser puntos límites de $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{1+\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ respectivamente.

Solución 23 Denotemos por $|z|$ el módulo de un número complejo $z\in\mathbb{C}$. Entonces, se trata de probar que $|(x+yi)(x'+y'i)|=|x+yi||x'+y'i|$. Como $(x+yi)(x'+y'i)=xx'-yy'+(xy'+x'y)i$ resulta que:

$$|(x+yi)(x'+y'i)|=\sqrt{(xx'-yy'^2+(xy'+x'^2}=\sqrt{x^2x'^2+y^2y'^2+x^2y'^2+x'^2y^2}=\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}=|x+yi||x'+y'i|.$$

Solución 24 La unidad imaginaria $i=\sqrt{-1}$ es un número algebraico ya que $i^2=-1$, es decir, es solución de $x^2+1=0$. Otro ejemplo es $\sqrt{3}$ porque $(\sqrt{3})^2-3=0$ y por tanto es solución de $x^2-3=0$.

Capítulo 2. Matrices y determinantes

ENUNCIADOS

Ejercicio 1 El rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & k & 0 \\ k & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ es: A) 2 si $k = 0$; B) 3; C) Depende del valor de k; D) Ninguna de las anteriores.

Ejercicio 2 Sabiendo que A, $B \in \mathcal{M}_{3\times 4}$ son tales que $a_{ij} = i + 2j$ y $b_{ij} = 2i - j$, se pide estudiar la relación entre las matrices $A + 2B$ y $-2A + B$.

Ejercicio 3 Si A, $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ y $n > 1$, ¿es cierto que $\det(A) + \det(B) = \det(A + B)$?.

Ejercicio 4 Clasificar el sistema $mx + y + z = 0$; $x + my + z = 0$; $x + y + mz = 0$ con $m \in \mathbb{R}$ para los distintos valores de m.

Ejercicio 5 Se llama *matriz elemental por filas* a una matriz cuadrada obtenida tras realizar en la matriz identidad, I, una de las siguientes transformaciones elementales entre las filas F_i de I:

- permutar, $F_i \leftrightarrow F_j$
- reemplazar, $F_i \rightarrow F_i + \alpha F_j$
- multiplicar, $F_i \rightarrow \alpha F_i$ siendo $\alpha \neq 0$

(véase el curso cero para repasar las trasnformaciones u operaciones elementales entre las filas de una matriz).

Calcúlese la matriz inversa de cada una de las siguientes matrices elementales:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ E_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ E_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 6 El sistema de ecuaciones $(1-a)x_1+(2a+1)x_2+(2a+2)x_3=a;\ ax_1+ax_2=2a+2;\ \ 2x_1+(a+1)x_2+(a-1)x_3=a^2-2a+9$ es incompatible si: A) $a=1$; B) $a=0$ ó $a=2$; C) $a\neq 0$ y $a\neq 2$; D) Ninguna de las anteriores.

Ejercicio 7 Sea el sistema lineal de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} x_1+hx_2=2 \\ 4x_1-8x_2=k \end{array}\right\},$$

en donde $h,\ k\in\mathbb{R}$ parámetros reales. Señale todos los valores $h,\ k$ para los que el sistema no tiene solución.

Ejercicio 8 Si A y B son matrices simétricas de orden n, entonces: A) La matriz AB es simétrica; B) Si $AB\neq BA$ entonces AB es simétrica; C) Si AB es simétrica entonces $AB=BA$; D) Ninguna de las anteriores.

Ejercicio 9 Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -3 \\ 6 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -3 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

a) Pónganse dos ejemplos de las siguientes clases de submatrices de A:

i) fila, ii) columna, iii) cuadradas de distinto orden.

b) Efectúese el producto $A\times B$.

c) Compruébese que $(A\times B)^T=B^T\times A^T$.

Ejercicio 10 Dadas las matrices .

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Cálcula la suma y producto de matrices que enuncian a continuación.

$$AB,\ BA,\ B^TC,\ C^TB,\ I-C^TC,\ (I-CC^T)A$$

Si alguna expresión no está definida señale el porqué.

Ejercicio 11 Determine la matriz X tal que $AXA = AB$ para los siguientes casos

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Ejercicio 12 Una matriz $A \in M_{n\times n}$ de dice idempotente si $A^2 = A$. Razone que $B = I - A$ (recuede I matriz identidad) es asimismo idempotente y además $AB = BA = 0$.

Ejercicio 13 Responda a las siguientes preguntas razonadamente:

(i) Si una matriz A es de orden 5×3 y el producto AB es de orden 5×7, ¿cuál es el orden de la matriz B?

(ii) ¿Es verdadero que $(AB)^T = A^T B^T$?.

(iii) Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & k \end{pmatrix}$ en donde k es un parámetro. ¿Qué valores de k hacen que $AB = BA$?.

Ejercicio 14 Compuébese que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ es regular si a o b son distintos de cero. Pruébese que el conjunto de esta clase de matrices y la matriz nula con las operaciones usuales constituye un cuerpo.

Ejercicio 15 Cálcule el determinante de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 16 Calcúlese el valor del determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

mediante los adjuntos de la fila dos y mediante los adjuntos de la columna cuatro y compruébese que se obtiene el mismo resultado.

Ejercicio 17 Aplíquense operaciones elementales para calcular el determinante de la matriz del ejercicio anterior mediante los adjuntos de la primera columna en la que todos sus elementos deben ser cero salvo uno de ellos.

Ejercicio 18 Dada la relación matricial

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

exprese las ecuaciones de la matriz X en función de la matriz Y.

Ejercicio 19 Suponga que A, B, C son invertibles de orden $n \times n$. Demuestre que la matriz producto ABC es también invertible encontrado una matriz D tal que $(ABC)D = D(ABC)$. Compruebe el resultado para el caso particular

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 20 Calcule el rango de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 & 0 & 3 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y resuelva los sistemas $AX = C$, $BX = C$ en donde $X^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}$ es el vector de incognitas.

Ejercicio 21 Resuelva el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 22 Cálcule el rango de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 23 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \sin x & -\cos x & 0 \\ \cos x & \sin x & 0 \\ \sin x + \cos x & \sin x - \cos x & 1 \end{pmatrix},$$

calcule su posible matriz inversa

Ejercicio 24 En este ejercicio suponemos que A,B, C, son matrices cuadradas de orden n que suponemos de determinante no nulo. Siguiendo la notación usual O, I denotan respectivamente la matriz nula y la matriz identidad correspondiente. Consideramos la matriz por bloques definida de la siguiente manera

$$\Lambda = \begin{pmatrix} I & O & O \\ C & I & O \\ A & B & I \end{pmatrix}$$

Señale la forma de la matriz inversa. Si consideramos $A_{ij} \in M_n$ matrices de orden n entonces la matriz por bloques

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \in M_{3n}$$

es una matriz de orden $3n$.

SOLUCIONES

Solución 1 El rango de la matriz, no puede ser mayor que 3. Es claro que al menos es 2. Para determinar si el rango es 3 tenemos que calcular todos los menores de orden 3. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & k \\ k & 2 & 0 \end{vmatrix} = -3k-2$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ k & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2k-2$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & k & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4k-2$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & k & 0 \\ k & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2k^2+2k+2$. Por lo tanto como basta tener un menor de orden 3 no nulo, podemos asegurar que el rango siempre es tres sea cual sea el valor de k ya que los cuatro menores no se pueden anular a la vez.

Solución 2 Si $C = A + 2B$ y $D = -2A + B$ entonces

$$c_{ij} = a_{ij} + 2b_{ij} = i + 2j + 4i - 2j = 5i$$

y

$$d_{ij} = -2a_{ij} + b_{ij} = -2i - 4j + 2i - j = -5j.$$

De donde se deduce que en general

$$c_{ij} = -d_{ji},$$

En caso de que A, B fuesen matrices cuadradas se tendría

$$C = -D^t \Leftrightarrow A + 2B = -(-2A + B)^t = 2A^t - B^t.$$

Solución 3 No es cierto. Un contraejemplo sencillo se obtiene para $n = 1$, $A = 2$, $B = 3$. En el caso de $n = 2$ un contraejemplo puede ser $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Solución 4 El sistema es homogéneo, y por tanto siempre es compatible.

El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ vale $(m+2)(m-1)^2$.

Si $m = 1$ o $m = -2$ el sistema es compatible indeterminado. Si $m \neq -2, 1$ el sistema es compatible determinado.

Solución 5 Es fácil comprobar que cada una de ellas son matrices elementales por tanto: $E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_3^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Se comprueba fácilmente que $E_1 \times E_1^{-1} = I_2$, $E_2 \times E_2^{-1} = I_3$, $E_3 \times E_3^{-1} = I_4$.

Solución 6 La matriz de coeficientes asociada al sistema de ecuaciones es: $A = \begin{pmatrix} 1-a & 2a+1 & 2a+2 \\ a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \end{pmatrix}$

La condición necesaria y suficiente para que un sistema sea incompatible es que $\text{rang}(A) \neq \text{rang}(Amp)$ siendo A la matriz de coefientes asociada a ese sistema y Amp la matriz anterior ampliada con la columna que forman los términos independientes. Además, el determiante de A es

$$|A| = a(1-a)(a-2).$$

Entonces si $a \neq 0$, $a \neq 1$ y $a \neq 2$, $\text{rang}(A) = 3 = \text{rang}(Amp)$ y el sistema es compatible determinado y la opción C) es falsa.
¿Cómo es el sistema si $a = 1$?

En este caso $\text{rang}(A) = 2$ y la matriz Amp es $Amp = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ que tiene $\text{rang}(Amp) = 2$. Entonces el sistema es compatible e indeterminado y la opción A) es falsa.

¿Cómo es el sistema si $a = 0$? En este caso $\text{rang}(A) = 2$ y la matriz Amp es $Amp = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 9 \end{pmatrix}$ que tiene $\text{rang}(Amp) = 3$.

Entonces el sistema es incompatible.
¿Cómo es el sistema si $a = 2$?

En este caso $\text{rang}(A) = 2$ y la matriz Amp es $Amp = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix}$ que tiene $\text{rang}(Amp) = 3$. Entonces el sistema es incompatible. Por lo tanto la opción B) es correcta.

Solución 7 Por el teorema de Rouché-Frobenius, el sistema no tiene solución si el rango de la matriz del sistema y de su ampliada no coinciden, es decir

$$rango \begin{pmatrix} 1 & h \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \neq rango \begin{pmatrix} 1 & h & 2 \\ 4 & -8 & k \end{pmatrix}$$

Como

$$rango \begin{pmatrix} 1 & h \\ 4 & -8 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 \text{ si } h \neq -2 \\ 1 \text{ si } h = -2 \end{cases}$$

podemos estudiar dos casos:

- Si $h \neq -2$, entonces para cualquier k que consideremos

$$rango \begin{pmatrix} 1 & h \\ 4 & -8 \end{pmatrix} = rango \begin{pmatrix} 1 & h & 2 \\ 4 & -8 & k \end{pmatrix} = 2$$

  y el sistema tiene solución.
- Si $h = -2$, entonces para que el sistema no tenga solución se debe verificar

$$rango \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & -8 & k \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow rango \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & k \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow k \neq 8.$$

Solución 8 Una matriz A es simétrica si $a_{ij} = a_{ji}$ para cada $i \neq j$. O de forma equivalente, A es simétrica, si su matriz traspuesta A^T coincide con ella misma, es decir, $A^T = A$.

Mediante ejemplos sencillos. Es posible eliminar alguna de las opciones. Veamos: se puede comprobar que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ son simétricas pero $AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ no es simétrica y $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Luego A) y B) son falsas. Por otro lado, como $(AB)^T = B^T A^T$ se tiene que si $AB = (AB)^T$ (es decir, si AB es simétrica) entonces $AB = B^T A^T = BA$. Luego C) es cierta.

Solución 9 a) Un ejemplo submatriz fila de $A = (a_{ij})$ puede ser la primera fila

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

y del mismo modo un ejemplo de submatriz columna de A puede ser la segunda columna

$$\begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Como $A \in \mathcal{M}_{3\times 4}$, $B \in \mathcal{M}_{4\times 2}$ entonces $A \times B \in \mathcal{M}_{3\times 2}$. Aplicando la fórmula del producto de matrices

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -3 \\ 6 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -3 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \times 2 + 2 \times 1 + 4 \times (-3) + 0 \times 0 & -1 \times 1 + 2 \times 0 + 4 \times (-2) + 0 \times 3 \\ 3 \times 2 + 2 \times 1 + (-1) \times (-3) + (-3) \times 0 & 3 \times 1 + 2 \times 0 + (-1) \times (-2) + (-3) \times 3 \\ 6 \times 2 + 0 \times 1 + 1 \times (-3) + 1 \times 0 & 6 \times 1 + 0 \times 0 + 1 \times (-2) + 1 \times 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -12 & -9 \\ 11 & -4 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c) $B^T \in \mathcal{M}_{4\times 2}$, $A^T \in \mathcal{M}_{2\times 3}$ luego $B^T \times A^T \in \mathcal{M}_{3\times 2}$. Operando directamente

$$\begin{aligned}
B^T \times A^T &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{matrix} 2\times(-1)+1\times 2+(-3)\times 4+0\times 0 \\ 1\times(-1)+0\times 2+(-2)\times 4+3\times 0 \end{matrix} \right. \\
&\qquad \left. \begin{matrix} 2\times 3+1\times 2+(-3)\times(-1)+0\times(-3) & 2\times 6+1\times 0+(-3)\times 1+0\times 1 \\ 1\times 3+0\times 2+(-2)\times(-1)+3\times(-3) & 1\times 6+0\times 0+(-2)\times 1+3\times 1 \end{matrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} -12 & 11 & 9 \\ -9 & -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -9 \\ 11 & -4 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}^T = (A \times B)^T
\end{aligned}$$

Solución 10 Se tiene

- $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
- $BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

  $B^T C$ no tiene sentido ya que el número de columnas de

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  es 3 y no coincide con el número de filas de C que es 1.

$C^T B$ no tiene sentido ya que el número de columnas de

$$C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

es 1 y no coincide con el número de filas de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ que es 3.

Como

$$C^T C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

la matriz identidad I se debe entender de orden 3 para que tenga sentido la matriz $I - C^T C$ en la operación. De hecho

$$\begin{aligned} I - C^T C &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En este caso

$$CC^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 6$$

En este caso la matriz unidad debe entenderse la de orden 1, es decir la matriz identidad que no es mÃ¡s que el número real $I = 1$. Luego

$$I - CC^T = -5$$

La matriz $\left(I - CC^T\right) A$ tiene sentido no como producto de matrices sino como producto de un número real por una matriz (operación producto por un escalar)

$$\left(I - CC^T\right) A = -5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 \\ -10 & -15 & -5 \end{pmatrix}$$

Solución 11 En primer lugar la matriz X debe ser tal que XA y AX tengan sentido, luego el número de columnas y filas de X deben coincidir con el número de filas y columnas de A. Por tanto el orden de la matriz X es necesariamente 2.

(i) En este caso la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

tiene inversa ya que su determinante es no nulo

$$|A| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right| = -1$$

Por tanto podemos aplicar el teorema de caracterización de la inversa para calcularla, aplicando dicho teorema se tiene

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Si la matriz X tiene inversa está univocamente determinada, es decir es única. Despejamos el valor de X multiplicando en ambas expresiones por la matriz inversa A^{-1}

$$AXA = AB \Leftrightarrow A^{-1}AXAA^{-1} = A^{-1}ABA^{-1} \Leftrightarrow IXI = IBA^{-1} \Leftrightarrow X = BA^{-1}$$

(aclaremos que el símbolo $\Leftrightarrow$ denota "si y solamente si")Por tanto

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 16 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(ii) En este caso la matriz A no tiene inversa ya que su determinante es nulo

$$|A| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right| = 0$$

Luego no sabemos a priori si la matriz X está univocamente determinada, de hecho como veremos no es única sino que existen infinitas matrices X. En este caso para determinar la matriz consideramos una matriz incognita

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

en donde a, b, c, d son parámetros reales a determinar. En general como

$$\begin{aligned} AXA &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ AB &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

se tiene que $AXA = AB \quad$ si

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Consecuentemente $a = 0$, mientras que los demás parámetros b, c y d pueden ser arbitrarios. Por tanto la solución X es una matriz de la forma

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} : b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Por ejemplo tomando $b = -1$, $c = 2$, $d = 7$ se tiene que

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

y véase que efectivamente verifica la identidad ya que

$$AXA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = AB$$

Solución 12 Hay que probar en primer lugar que la matriz $B = I - A$ es idempotente, es decir que

$$BB = (I - A)(I - A) = I - A = B.$$

Como $AA = A$, operando se tiene

$$(I - A)(I - A) = I - AI - IA + AA = I - A - A + A = I - A + 0 = I - A$$

en donde I y 0 denotan la matriz identidad y la matriz nula respectivamente.

En segundo lugar

$$\begin{aligned} AB &= A(I - A) = AI - AA = A - A = 0 \\ BA &= (I - A)A = IA - AA = A - A = 0 \end{aligned}$$

Solución 13 (i) El general dada una matriz A de orden $m \times n$ y una matriz B de $p \times k$ entonces la matriz producto AB solamente tiene sentido si $n = p$ y en dichos su orden sería $m \times k$. Para el caso particular del apartado se tiene $m = 5$, $n = 3$, $k = 7$ entonces necesariamente $p = 3$ y por tanto la matriz B es de orden 3×7.

(ii) En general no es cierto, se ve buscando un contraejemplo. Tomemos por ejemplo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, Entonces

$$\begin{aligned} (AB)^T &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ A^T B^T &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y evidentemente en este caso $(AB)^T \neq A^T B^T$. En cambio hay que tener en cuenta que la identidad $(AB)^T = B^T A^T$ es correcta(véase p. 25 libro de texto).

(iii) En general

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 5k-10 \\ -9 & k+15 \end{pmatrix} \\ BA &= \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 15 \\ 6-3k & k+15 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

:

Luego para que se cumpla $AB = BA$ se tiene que verificar

$$\begin{pmatrix} 23 & 5k-10 \\ -9 & k+15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 15 \\ 6-3k & k+15 \end{pmatrix}$$

Omitiendo las dos igualdades evidentes de la diagonal, la igualdad de matrices es equivalente a que se cumpla

$$\begin{aligned} 5k-10 &= 15, \\ 6-3k &= -9, \end{aligned}$$

Como $k = 5$ resuelve las dos ecuaciones, se tiene que

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Efectivamente compruébese que se verifica

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 15 \\ -9 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = BA$$

Solución 14 Por la caracterización de la matriz inversa basta ver que el determinante de A es no nulo. Como $\det A = a^2 + b^2$ se deduce inmediatamente que dicho determinante es no nulo si cualquiera de los dos parámetros a o b son distintos de 0.

Para cada vector de parámetros (a, b) denotamos la correspondiente matriz

$$A_{a,b} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

y nos preguntamos si el conjunto de dichas matrices

$$\mathcal{M} = \{A_{a,b} : a, b \in \mathbb{R}\}$$

es un cuerpo con las operaciones de suma y producto de matrices. Los primero que hay que ver es si la suma y el producto efectivamente son operaciones para dicho conjunto, es decir, si la suma y el producto de dos matrices son asimismo elementos de $\mathcal{M}$ respectivamente. Para la suma tenemos que dadas dos matrices $A_{a,b}$, $A_{a',b'}$ asociadas a los parámetros (a, b), (a', b') respectivamente, entonces efectivamente

$$A_{a,b} + A_{a',b'} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & -(b + b') \\ b + b' & a + a' \end{pmatrix} = A_{a+a',b+b'} \in \mathcal{M}$$

es la matriz de $\mathcal{M}$ con vector de parámetros $(a + a', b + b')$.

Asimismo el producto de dichas matrices

$$\begin{aligned} A_{a,b} \times A_{a',b'} &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' - bb' & -ab' - ba' \\ ba' + ab' & aa' - bb' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} aa' - bb' & -(ab' + ba') \\ ab' + ba' & aa' - bb' \end{pmatrix} = A_{aa'-bb',ab'+ba'} \end{aligned}$$

es una matriz de $\mathcal{M}$ con vector de parámetros $(aa' - bb', ab' + ba')$.

Razónese que la operación suma es asociativa y conmutativa debido que la suma de números reales verifica dichas propiedades, asimismo existe elemento neutro (simétrico) para dicha operación ya que la matriz nula pertenece al conjunto ya que coicinde con el elemento de $\mathcal{M}$ con parámetros $(0, 0)$, es decir $0 = A_{(0,0)} \in \mathcal{M}$. Luego $(\mathcal{M}, +)$ es un grupo conmutativo.

De igual modo la operación producto es asociativa y conmutativo por verificarse dichas propiedades en los números reales. El elemento neutro es la matriz unidad que coincide con el elemento de $\mathcal{M}$ con vector de parámetros $(1, 0)$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A_{1,0} \in \mathcal{M}$$

Queda por comprobar que existe inverso para cualquier matriz no nula. Aplicando la fórmula de caracterización de la matriz inversa (p. 39 libro texto) se tiene

$$A_{a,b}^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = A_{(a/(a^2+b^2), b/(a^2+b^2))} \in \mathcal{M}$$

que se corresponde con la matriz de $\mathcal{M}$ con parámetros $(a/(a^2 + b^2), b/(a^2 + b^2))$

Solución 15 Para calcular el determinante de la matriz A podemos mediante operaciones elementales, (es decir aplicando la propiedad 5 de determinantes, véase p. 33 libro texto) llegar a una matriz equivalente con el mismo determinante de la original y que sea más fácilmente calculable. Para ello haremos ceros por debajo del primer elemento de la diagonal El pivote será por tanto el primer elemento de la diagonal de la matriz. Para hallar un cero en la entrada (1,2) multiplicamos la primera fila por $-\frac{1}{2}$ y se la sumamos a la primera lo que denotamos por

$$F_2 \to -\frac{1}{2} F_1 + F_2$$

Siguiendo esta notación y para hacer cero en los siguientes elementos de la columna hacemos las siguientes transformaciones por fila

$$F_3 \to \frac{1}{2} F_1 + F_3, \; F_4 \to -\frac{1}{2} F_1 + F_4$$

Llegamos a la matriz que tiene el mismo determinante

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 5 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Es útil darse cuenta que lo que hemos hecho es equivalente al multiplicar por la izquierda una matriz (las matrices de este tipo se suelen denominar especiales) que es igual a una matriz con todos unos en la diagonal y ceros en el resto de entradas excepto en los elementos de la columna correspondiente al pivote. Los elementos de dicha columna están formados en cada fila por los número (multiplicadores) por lo que hemos multiplicado la fila del pivote para hallar un cero en la correspondiente fila. En este caso

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 5 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Para calcular el matriz de la matriz equivalente basta desarrollar mediante los adjuntos de la primera columna y aplicar la regla de Sarrus para matrices de orden 3

$$\left| \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 5 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix} \right| = 2 \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 5 & \frac{3}{2} & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & -1 \end{vmatrix} = 2 \times \frac{29}{2} = 29$$

Para calcular el determinante de la matriz B seguimos el mismo proceso. En este caso consideramos como pivote el tercer elemento de la diagonal. Para hallar cero por encima y debajo de dicho elemento hacemos las siguientes transformaciones elementales

$$F_2 \to -2F_3 + F_2,\ F_4 \to -3F_3 + F_4,\ F_5 \to -F_3 + F_5$$

Esto es equivalente al siguiente producto de matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -6 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto desarrollando mediante los adjuntos de la tercera columna se tiene que

$$
\begin{aligned}
|B| &= (-1)^{3+3}1\left|\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & -6 & -2 \\ -1 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & -6 & -2 \\ -1 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}\right| \\
&= (-1)^{1+2}1\left|\begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -2 & -6 & -2 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}\right| + (-1)^{3+2}(-1)\left|\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}\right| \\
&= (-1)0 + (-1)(-1)3 = 3
\end{aligned}
$$

en donde el determinante de la matriz de orden 4 lo hemos calculado desarrollando por la segunda columna.

Solución 16 Desarrollando mediante los adjuntos de la fila 2

$$
\begin{aligned}
\left|\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}\right| &= (-1)^{2+1}\times(-1)\left|\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}\right| + (-1)^{2+2}\times 3\left|\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}\right| \\
&+ (-1)^{2+3}\times 2\left|\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right| + (-1)^{2+4}\times 1\left|\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\right| \\
&= 7 + 21 - 28 + 14 = 14
\end{aligned}
$$

Desarrollando mediante los adjuntos de la columna 4

$$\left|\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}\right| = (-1)^{4+1}\times 0\left|\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\right| + (-1)^{4+2}\times 1\left|\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\right|$$
$$+ (-1)^{4+3}\times 1\left|\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\right| + (-1)^{4+4}\times 3\left|\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right|$$
$$= 0 + 14 - 42 + 42 = 14$$

Solución 17 Partimos de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Hacemos ceros por debajo del primer elemento de la diagonal para encontrar una matriz con el mismo determinante. De esta manera por la propiedad 5 (p. 33 libro de texto) si a la segunda fila le podemos sumar la primera fila multiplicada por el factor 1/4 obtenemos la matriz

$$A' = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{7}{4} & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

que tiene el mismo determinante que A. De igual manera sumándole a la tercera fila la primera multiplicada por $1/4$, y si a su vez le sumamos a la cuarta fila la primera multiplicada por el factor $1/2$ obtenemos una matriz con el mismo determinante que A y con todo ceros por debajo del primer elemento de la diagonal

$$A'' = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{7}{4} & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{7}{4} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

De esta manera ahora es directo calcular el determinante desarrollando por los adjuntos de la primera columna

$$|A| = |A''| = 4 \begin{vmatrix} \frac{7}{2} & \frac{7}{4} & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{7}{4} & 1 \\ 1 & \frac{7}{2} & 3 \end{vmatrix} = \frac{4}{2 \times 4} \begin{vmatrix} 7 & 7 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 2 & 14 & 3 \end{vmatrix} = \frac{28}{2} = 14$$

Solución 18 La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene determinante distinto de cero

$$\det A = \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \right| = 12$$

entonces existe la matriz inversa A^{-1}. De esta manera multiplicando por dicha matriz a ambos lados de la iguald $Y = AX$ podemos obtener la relación de X en función de Y

$$X = A^{-1}Y.$$

Cálculemos la inversa por el teorema de caracterización

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 11 & -6 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

ya que

$$A_1^1 = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 11,\ A_1^2 = -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2,\ A_1^3 = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_2^1 = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -6,\ A_2^2 = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0,\ A_2^3 = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_3^1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -1,\ A_3^2 = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2,\ A_3^3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

Luego

$$X = \begin{pmatrix} \frac{11}{12} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} Y$$

Solución 19 De la forma de la matriz se puede ver que el candidato de la matriz inversa es la matriz producto

$$D = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$$

que se puede suponer ya que la matrices inversas existen por hipótesis. De hecho se comprueba

$$\begin{aligned} (ABC)D &= (ABC)C^{-1}B^{-1}A^{-1} = AB(CC^{-1})B^{-1}A^{-1} = ABIB^{-1}A^{-1} \\ &= ABB^{-1}A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I \\ D(ABC) &= C^{-1}B^{-1}A^{-1}(ABC) = C^{-1}B^{-1}(A^{-1}A)BC = C^{-1}B^{-1}IBC \\ &= C^{-1}\left(B^{-1}B\right)C = C^{-1}IC = C^{-1}C = I \end{aligned}$$

que efectivamente es matriz inversa.

Para el caso particular se tiene

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
B^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \\
C^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
C^{-1}B^{-1}A^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 17 & 5 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 56 \\ 10 & 33 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

De hecho como

$$\begin{aligned}
ABC &= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 10 & -23 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & -56 \\ -10 & 17 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

se puede comprobar que efectivamente es la matriz $C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ es la matriz inversa de ABC

$$\begin{pmatrix} 33 & -56 \\ -10 & 17 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 17 & 56 \\ 10 & 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 56 \\ 10 & 33 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 33 & -56 \\ -10 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución 20 Como el orden de la matriz es 4×5 el rango de la matriz solamente puede ser 4 como máximo. Al tener la matriz una fila nula, todos los determinantes de submatrices de orden 4 necesariamente son nulos, ya que cualquier submatriz de dicho orden tendrá a su vez una fila nula y por tanto el determinante será cero. Para ello basta ver que si cálculamos el determinante por lo adjuntos de la fila nula el determinante es nulo. Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto el rango es menor que 4, de hecho es 3 ya que podemos encontrar una submatriz de orden 3 que tiene determinante no nulo. Por ejemplo el determinante de la submatriz correspondiente a los tres primeros elementos de las columnas tercera, quinta y sexta tiene determinante no nulo

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

Por otra parte el sistema

$$AX = C$$

no tiene solución por tener la matriz A una fila no nula. Ya que dicho caso

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 3x_5 - 5x_6 \\ x_3 - x_6 \\ x_5 - 4x_6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y evidentemente el sistema no puede tener solución. Lo podemos razonar por el teorema de Rouche-Fröbenius (véase Curso 0) ya que el rango de la matriz ampliada

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 & 0 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es 4 porque en este caso si podemos encontrar una submatriz con determinante no nulo, la correspondiente a las columnas tercera, quinta, sexta y septima

$$\left| \begin{pmatrix} -2 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 5$$

Por tanto, por no coincidir el rango de la matriz del sistema con el de la ampliada el sistema es incompatible y no tiene solución.

En cambio el rango de la matriz B es cuatro ya que podemos encontrar al menos una submatriz de orden 4 y determinante no nulo. Por ejemplo la correspondiente a las columnas primera, segunda, tercera y sexta

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \right| = 160$$

Por otro lado el sistema $BX = C$ tiene solución. De hecho en este caso la matriz ampliada tiene rango 4 por poseer una submatriz de orden 4 con determinante no nulo y por tanto aplicando el Teorema de Rouche-Frobenius el sistema es compatible indeterminado con $6 - 4 = 2$ parámetros.

Una manera de resolverlo puede ser a través de considerar como parámetros las coordenadas no asociadas a las columnas con el determinante no nulo que hemos encontrado anteriormente, en este caso sería la cuarta y la quinta columna y por tanto las variables x_4, x_5. .De esta manera se puede operar de la siguiente manera partiendo del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 & 0 & 3 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y viendo que el término matricial de la izquierda es equivalente a la combinación lineal en termino de las columnas de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_5 + \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} x_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pasamos las columnas asociados a la variables parámetros

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} x_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_5$$

De esta manera habiendo pasado las variables parámetros al lado derecho de la igualdad llegamos a un sistema compatible determinado en las variables x_1, x_2, x_3, x_6 que nos permiten determinar la expresión de éstas con respectos a los parámetros. Multiplicando por la inversa de la matriz del sistema que sabemos existe por tratarse de aquella que tiene determinante no nulo. Es decir

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_5$$

y resolvemos directamente

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_5 \right)$$

con lo que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{33}{160} & \frac{63}{160} & -\frac{57}{160} & \frac{1}{160} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{11}{160} & -\frac{21}{160} & \frac{19}{160} & \frac{53}{160} \\ -\frac{1}{32} & \frac{1}{32} & -\frac{7}{32} & -\frac{1}{32} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_5 \right)$$

y por tanto

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{80} - \frac{43}{160}x_5 \\ -\frac{1}{4} + \frac{3}{8}x_5 \\ \frac{21}{80} - \frac{39}{160}x_5 \\ -\frac{1}{16} + \frac{11}{32}x_5 \end{pmatrix}$$

Luego considerando denotando las coordenadas parametros $x_4 = \beta$, $x_5 = \lambda$ el conjunto de soluciones viene dado por

$$\left\{ \left(\frac{17}{80} - \frac{43}{160}\lambda, -\frac{1}{4} + \frac{3}{8}\lambda, \frac{21}{80} - \frac{39}{160}\lambda, \beta, \lambda, -\frac{1}{16} + \frac{11}{32}\lambda \right) : \lambda, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

Solución 21 Como el rango de la matriz del sistema y de su ampliada es distinto

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 3 = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

el sistema es incompatible y el sistema no tiene solución.

En cualquier caso podemos estudiar en general si dado un vector columna de terminos independientes Y si el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

tiene solución.

Si multiplicamos por -1 la primera fila y se la sumamos a la tercera tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 - y_1 \end{pmatrix}$$

(compruébese que estamos multiplicar por la izquierda por la

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es decir $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ -y_1 + y_3 \end{pmatrix}$

Razone que estos dos sistemas son equivalentes por ser B regular.)

Sumando a la tercera fila la segunda fila tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 - y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

(compruébese que estamos multiplicando por la izquierda a ambos lados de la igualdad por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

)

Por tanto el sistema original es equivalente a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= y_1 \\ 3x_2 - 2x_3 &= y_2 \\ 0 &= y_3 - y_1 + y_2 \end{aligned}$$

De aquí caben entonces dos posibilidades:

Dado un vector Y

- Si $y_3 - y_1 + y_2 \neq 0$ no existe un vector X tal que $Y = AX$. De hecho compruébese que en nuestro caso ,$Y^T = (1, 0, -1)$ $y_3 - y_1 + y_2 = -2 \neq 0$, y no existe solución.
- Si $y_3 - y_1 + y_2 = 0$ entonces existe infinitos X verificando $Y = AX$ y son aquellos que resuelven el sistema

$$\left.\begin{array}{c} x_1 + 2x_2 - x_3 = y_1 \\ 3x_2 - 2x_3 = y_2 \end{array}\right\}$$

En dicho caso es un sistema lineal indeterminado con un parámetro $x_3 = \lambda$. Su conjunto de soluciones viene dado por

$$\left\{ \left(y_1 - \frac{2}{3}y_2 - \frac{\lambda}{3}, \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}\lambda, \lambda \right) : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Solución 22 Como la matriz A es de orden 3×4, el rango como máximo puede ser 3. De hecho es 3 ya que encontramos una submatriz de orden con determinante distinto de cero

$$\left|\begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & -2 \\ 1 & 6 & -1 \end{pmatrix}\right| \neq 6$$

La matriz B tiene como máximo rango 2. De hecho el rango es 1 ya que todas las submatrices de orden 2 tiene determinante 0

$$\left|\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right| = ... = 0$$

Compruébese que la primera fila es combinación lineal de la segunda, y eso es cierto para todo las submatrices de orden 2 luego por la propiedades de los determinantes los determinantes de toda submatriz de orden 2 es cero.

Solución 23 Calculamos la matriz aplicando la caracterización de la matriz inversa. En primer lugar calculamos el determinante por la regla de Cramer

$$|A| = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & -\cos x & 0 \\ \cos x & \operatorname{sen} x & 0 \\ \operatorname{sen} x + \cos x & \operatorname{sen} x - \cos x & 1 \end{vmatrix} = \operatorname{sen}^2 x + 0 + 0 - 0 + \cos^2 x = 1$$

Como el determinante es distinto de cero existe matriz inversa. A continuación los elementos de la matriz adjunta

$$A_1^1 = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & 0 \\ \operatorname{sen} x - \cos x & 1 \end{vmatrix} = \operatorname{sen} x$$
$$A_1^2 = -\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ \operatorname{sen} x + \cos x & 1 \end{vmatrix} = -\cos x$$
$$A_1^3 = \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x + \cos x & \operatorname{sen} x - \cos x \end{vmatrix} = \cos x(\operatorname{sen} x - \cos x) - \operatorname{sen} x\,(\operatorname{sen} x + \cos x) =$$
$$= -\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = -1$$
$$A_2^1 = -\begin{vmatrix} -\cos x & 0 \\ \operatorname{sen} x - \cos x & 1 \end{vmatrix} = \cos x$$
$$A_2^2 = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & 0 \\ \operatorname{sen} x + \cos x & 1 \end{vmatrix} = \operatorname{sen} x$$
$$A_2^3 = -\begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & -\cos x \\ \operatorname{sen} x + \cos x & \operatorname{sen} x - \cos x \end{vmatrix} = -\operatorname{sen} x(\operatorname{sen} x - \cos x) - \cos x\,(\operatorname{sen} x + \cos x)$$
$$= -\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = -1$$
$$A_3^1 = \begin{vmatrix} -\cos x & 0 \\ \operatorname{sen} x & 0 \end{vmatrix} = 0$$
$$A_3^2 = -\begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & 0 \\ \cos x & 1 \end{vmatrix} = 0$$
$$A_3^3 = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & -\cos x \\ \cos x & \operatorname{sen} x \end{vmatrix} = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

Aplicando finalmente la fórmula

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & -\cos x & -1 \\ \cos x & \operatorname{sen} x & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x & 0 \\ -\cos x & \operatorname{sen} x & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución 24 En este caso la fórmula del producto de matrices es la misma que en el caso general de matrices de números reales (correspondiente a $n = 1$) respectando en este caso el orden del producto al no verificarse a priori la propiedad conmutativa

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}$$
$$= \tag{3}$$
$$\begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + A_{13}B_{31} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} + A_{13}B_{32} & A_{11}B_{13} + A_{12}B_{23} + A_{13}B_{33} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} + A_{23}B_{31} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} + A_{23}B_{32} & A_{21}B_{13} + A_{22}B_{23} + A_{23}B_{33} \\ A_{31}B_{11} + A_{32}B_{21} + A_{33}B_{31} & A_{31}B_{12} + A_{32}B_{22} + A_{33}B_{32} & A_{31}B_{13} + A_{32}B_{23} + A_{33}B_{33} \end{pmatrix}$$

La matriz unidad $I_{3n} \in M_{3n}$ se puede descomponer por bloques

$$I_{3n} = \begin{pmatrix} I_n & O_n & O_n \\ O_n & I_n & O_n \\ O_n & O_n & I_n \end{pmatrix}$$

en donde I_n, $O_n \in M_n$ son las matrices unidad y nula de orden n respectivamente. Por definición de matriz inversa se tiene que verifica

$$\Lambda\Lambda^{-1} = \Lambda^{-1}\Lambda = I$$

Se busca una matriz genérica

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

que verifique

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I & O & O \\ C & I & O \\ A & B & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & O & O \\ O & I & O \\ O & O & I \end{pmatrix}$$

equivalentemente

$$\begin{pmatrix} AA_{13} + A_{12}C + A_{11} & A_{13}B + A_{12} & A_{13} \\ A_{23}A + A_{22}C + A_{21} & A_{23}B + A_{22} & A_{23} \\ A_{33}A + A_{32}C + A_{31} & A_{33}B + A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & O & O \\ O & I & O \\ O & O & I \end{pmatrix}$$

Por tanto, necesariamente se tiene

$$\begin{array}{ccc} A_{13}A + A_{12}C + A_{11} = I & A_{13}B + A_{12} = O & A_{13} = O \\ A_{23}A + A_{22}C + A_{21} = O & A_{23}B + A_{22} = I & A_{23} = O \\ A_{33}A + A_{32}C + A_{31} = O & A_{33}B + A_{32} = O & A_{33} = I \end{array}$$

Directamente de la tercera columna del bloque se obtiene $A_{13} = O$, $A_{23} = O$, $A_{33} = I$. Sustituyendo en la igualdades las submatrices que conocemos, de las segunda columna del bloque podemos determinar otra tres submatrices

$$\begin{aligned} A_{13}B + A_{12} &= O \Leftrightarrow A_{12} = -A_{13}B \Rightarrow A_{12} = O \\ A_{23}B + A_{22} &= O \Leftrightarrow A_{22} = I - A_{23}B \Rightarrow A_{22} = I \\ A_{33}B + A_{32} &= O \Leftrightarrow A_{32} = -A_{33}B \Rightarrow A_{32} = -B \end{aligned}$$

El resto de submatrices se determinan sustituyendo en la primera columna del bloque

$$\begin{array}{l} A_{11} = I \\ C + A_{21} = O \Rightarrow A_{21} = -C \\ A - BC + A_{31} = O \Rightarrow A_{31} = BC - A \end{array}$$

Luego, finalmente la matriz inversa toma la forma

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & O & O \\ -C & I & O \\ BC - A & -B & I \end{pmatrix}$$

Capítulo 3. Espacios vectoriales

ENUNCIADOS

Ejercicio 1 Razónese por qué el subconjunto $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2\}$ no es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 2 Sea $\mathbb{V} = M_2$ el espacio vectorial de matrices cuadradas de orden 2.

(i) Pruebe que espacio vectorial tiene efectivamente dimensión 4 señalando explícitamente una base del mismo.

(ii) Sean $\mathbb{V}_1$ el conjunto de matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} x & -x \\ y & z \end{pmatrix}$$

y $\mathbb{V}_2$ el conjunto de matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -x & z \end{pmatrix}$$

Pruebe que dichos conjuntos son asimismo subespacios vectoriales.

(iii) Señale una base y la dimensión de $\mathbb{V}_1$ y $\mathbb{V}_2$.

(iv) Considerando la base dada en el apartado (i) exprese las ecuaciones parámetricas e implícitas de los subespacios $\mathbb{V}_1$ y $\mathbb{V}_2$.

Ejercicio 3 En el espacio vectorial de los polinomios $(\mathbb{P}(x), +, \times)$ determínense un ejemplo de subespacio de dimensión finita y otro de subespacio de dimensión infinita.

Ejercicio 4 Vamos a determinar el rango del sistema

$$\mathbf{S} = \{(1, -2, 1), (-1, 0, 3), (-1, -4, 11)\}$$

Denotemos en primer lugar $\mathbf{v}^1 = (1, -2, 1)$, $\mathbf{v}^2 = (-1, 0, 3)$ y $\mathbf{v}^3 = (-1, -4, 11)$.

Compruébe en primer lugar si los vectores son linealmente independientes, es decir si existen escalares λ_1, λ_2, λ_3 tal que

$$\lambda_1(1,-2,1)+\lambda_2(-1,0,3)+\lambda_3(-1,-4,11)=\mathbf{0}\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$$

Compruebe que esto es equivalente a que el siguiente sistema matricial tenga como única solución el vector nulo

$$A\lambda=\mathbf{0}$$

en donde A es la matriz que tiene a los vectores del sistema generador como vectores columnas mientras que λ y 0 son las matrices columnas asociadas, es decir

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-2&0&-4\\1&3&11\end{pmatrix},\lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix},0=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

(i) ¿Qué solución tendría el sistema lineal si A tiene inversa?.

(ii) Resuelva dicho sistema por eliminación Gaussiana(es un sistema indeterminado con un parámetro, exprese la solución en términos del parámetro del sistema). Razone como puede determinar el rango del sistema.

(iii) Alternativamente cálcule mediante matrices la dimensión, teniendo en cuenta la siguiente propiedad:

"El rango de un sistema de vectores coincide con el rango de la matriz que tiene como columnas a los vectores de dicho sistema"

(iv) ¿cuál es la dimensión del subespacio E que genera S?

(v) Obténgase una base de E diferente de la proporcionada por S.

Ejercicio 5 Estúdiese si el conjunto $S=\{x,2x^3,x-x^3,x-x^3-x^5\}$ es linealmente independiente. En caso contrario determínese un subsistema minimal $S_{\text{mín}}$ y dos subespacios del espacio $\mathbb{V}$ que genere $S_{\text{mín}}$.

Ejercicio 6 Pruébese que el sistema $B = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$. Si $(2, -1, 4)$ son las coordenadas de un vector v respecto a la base B determínense las coordenadas de v respecto a la base canónica. Tenga en cuenta la siguiente propiedad:

"Una sistema de vectores linealmente independiente de igual número al de la dimensión del espacio forma una base del espacio"

Ejercicio 7 Determine los valores de a para los cuales el sistema

$$S = \{(1, 0, 1, -1), (0, 1, 2, 0), (-1, 0, -1, a), (0, 1, 1, 1)\}$$

constituye una base. Determine la matriz de cambio de base de dicho base a la base canónica e viceversa. Si consideramos el vector con coordenadas v=(1,0,1,-1) respecto de la base canónica señale sus coordenadas con respecto a la nueva base.

Ejercicio 8 Determínese el rango del sistema

$$\mathbf{S} = \{(1, -2, 1), (-1, 0, 3), (-1, -4, 11)\}$$

¿Cuál es la dimensión del subespacio E que genera?. Obténgase una base de E diferente de la proporcionada por S.

Ejercicio 9 Sean las bases

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \{(1, 0), (-1, 1)\} \\ \mathbf{B} &= \{(-1, 1), (0, 1)\} \end{aligned}$$

de $\mathbb{R}^2$. Dado el vector $\mathbf{v}$ de coordenadas $(2, 1)$ en la base $\mathbf{A}$, señale sus coordenadas en la base $\mathbf{B}$.

Ejercicio 10 Dados los conjuntos de matrices

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \\ \mathbf{A}_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \\ \mathbf{A}_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \end{aligned}$$

estudie cuáles de ellos constituye una base del espacio vectorial $\mathbb{M}_2$ de matrices cuadradas de orden 2.

Ejercicio 11 Consideramos el espacio vectorial de polinomios de grado 2,

$$\mathbb{P}_2 = \{\mathbf{p}(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 : a_i \in \mathbb{R}\}$$

y la base de dicho espacio

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{p}_1(x) = 1, \mathbf{p}_2(x) = x^2 - 1,\ \mathbf{p}_3(x) = x - 1\}$$

Dado el polinomio $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = x^2 + x + 1$ señale su vector de coordenadas con respecto a la base $\mathbf{A}$.

Ejercicio 12 Sea $\mathbb{P}_2$ el espacio vectorial de los polinomios de grado igual o menor a 2

$$\mathbf{p}(x) = ax^2 + bx + c.$$

Consideremos las bases

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{p}_1(x) = x^2 - x + 1,\ \mathbf{p}_2(x) = x^2 + 1,\ \mathbf{p}_3(x) = 1\}$$
$$\mathbf{A}' = \{\mathbf{p}_1'(x) = -1,\ \mathbf{p}_2'(x) = -x^2,\ \mathbf{p}_3'(x) = x\}$$

Señale la matriz de cambio de base de $\mathbf{A}$ a $\mathbf{A}'$. Compruebe que ha calculado bien la matriz, utilice para ello el polinomio

$$\mathbf{p}(x) = x^2$$

Ejercicio 13 Dados los sistemas

$$\mathbf{A} = \{(1,1,0),(-1,0,1),(0,-1,1)\}\ \ y\ \mathbf{B} = \{(-1,2,1),(1,1,1),(1,-1,1)\}$$

a) Probar que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son bases de $\mathbb{R}^3$.

b) Señale la matrices de cambio de base de $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$, y de $\mathbf{B}$ a $\mathbf{A}$ respectivamente.

c) Dado el vector v de coordenadas $(1,-1,1)$ en la base $\mathbf{A}$, encontrar sus coordenadas en la base $\mathbf{B}$.

d) Dado el vector w de coordenadas $(1,1,-1)$ en la base $\mathbf{B}$, encontrar sus coordenadas en la base $\mathbf{A}$.

Ejercicio 14 (i) Determínense las ecuaciones paramétricas e implícitas del subespacio generado por $S = \{(1,0,1,1),(-1,0,1,-1)\}$ aplicando directamente el método dado en la página 67 del libro de texto.

(ii) Método matricial para obtener la ecuaciones implícitas mediante eliminación Gaussiana.

Ejercicio 15 Sea $\mathbb{V}$ el espacio de los pólinomios cúbicos $\mathbf{p}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$.

(i) Pruebe que el subconjunto S de polinomios p verificando

$$\int_0^1 \mathbf{p}(s)ds = 0$$

es un subespacio vectorial y señale una base del mismo.

(ii) Exprese las ecuaciones implícitas y paramétricas del subespacio S respecto de la base

$$\{\mathbf{p}_1(x) = 1,\ \mathbf{p}_2(x) = x,\ \mathbf{p}_3(x) = x^2,\ \mathbf{p}_4(x) = x^3\}$$

Ejercicio 16 Complétese el sistema $S = \{(-1,1,0,1), (-1,0,1,-1)\}$ para obtener una base de $\mathbb{R}^4$.

Ejercicio 17 Dado el sistema $S = \{(2,0,1), (-1,1,1), (0,2,3), (-3,1,0)\}$.

a) Determínese un sistema minimal S'.

b) En caso de que S' genere un subespacio propio E, encuéntrense las ecuaciones paramétricas de E.

c) Determínense las ecuaciones implícitas de E.

d) ¿Qué relación existe entre la dimensión del subespacio y el número de sus ecuaciones?

Ejercicio 18 Señale las ecuaciones implícitas del subespacio generado por el sistema

$$S = \{(1,0,0,0,1), (1,-1,0,1,0), (0,0,1,2,0)\}$$

Ejercicio 19 Se consideran el espacio vectorial V de dimensión 4 y dos bases suyas $B = \{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_4\}$ y $B' = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_4\}$ cuyos vectores verifican:

$$\begin{aligned}
\bar{v}_1 &= -\bar{u}_2 + \bar{u}_3 - \bar{u}_4 \\
\bar{v}_2 &= \bar{u}_1 + \bar{u}_2 - \bar{u}_3 + \bar{u}_4 \\
\bar{v}_3 &= -2\bar{u}_1 - \bar{u}_2 + 2\bar{u}_3 - 3\bar{u}_4 \\
\bar{v}_4 &= -2\bar{u}_1 - \bar{u}_2 + \bar{u}_3 - 2\bar{u}_4
\end{aligned}$$

Se pide calcular las coordenadas de los vectores B respecto a los vectores de B' y las coordenadas de B' con respecto de B y la matriz Q asociada a la ecuación matricial del cambio de base de B a B'.

Ejercicio 20 Fijado un valor $a \in \mathbb{R}$ siendo $a \neq 0$, el subespacio vectorial generado por los vectores de la forma $(-a, a, -2a, 3a)$ cumple: A) Tiene dimensión 1; B) Depende del valor de a; C) Tiene dimensión 0; D) Ninguna de las anteriores.

Ejercicio 21 Consideramos en $\mathbb{R}^3$ los subespacios vectoriales:

$$F = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | \quad x_3 = 3x_2, \quad x_1 = 2x_2\right\}$$

y

$$G = \{\lambda(1,1,1), \forall \in \mathbb{R}\}.$$

¿Qué vector de los siguientes no pertenece a $F+G$?: A) $(3,2,5)$; B) $(1,1,1)$; C) $(2,1,3)$; D) $(3,2,4)$.

Ejercicio 22 Se pide calcular las dimensiones y las ecuaciones cartesianas y paramétricas de los subespacios anteriores F y G.

Ejercicio 23 Sean los subespacios $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x+y+z=0\}$ y $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 2x-y=0; x+z=0\}$. Entonces: A) $U+V$ es suma directa; B) $U+V \neq \mathbb{R}^3$; C) $U \cap V \neq \{0\}$.

Ejercicio 24 En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ son subespacios: A) cualquier punto; B) cualquier plano; C) Ninguno de los anteriores.

Ejercicio 25 Consideremos el sistema S_1 de vectores definido por las filas de la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 & -4 & 0 \\ 2 & 4 & -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ y el sistema de vectores S_2 definido por las filas de $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Se pide comprobar que S_1 es una base de $\mathbb{R}^5$ y S_2 es un sistema ligado de $\mathbb{R}^3$.

SOLUCIONES

Solución 1 Dicho conjunto claramente no es un subespacio vectorial ya que no contiene al vector nulo

$$\mathbf{0} = (0,0,0) \notin \left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2\right\}$$

Véase que $2 \times 0 + 3 \times 0 - 0 = 0 \neq 2$.

Solución 2 (i) Una matriz cuadrada de orden 2 general está dada por

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

en donde x, y, z y t son números reales arbitrarios. Dicha matriz se puede desarrollar como

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo que el conjunto

$$\mathbf{S} = \left\{\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

genera todas la matrices de orden 2. Veamos que dichas matrices son linealmente independientes aplicando la definición (véase p. 55 libro texto). Si existen $\lambda_1, ..., \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\lambda_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y necesariamente se tiene $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Por tanto $\mathbf{S}$ es un sistema generador linealmente independiente de $\mathbb{V}$, luego una base. Como la base está formada por 4 elementos entonces el espacio $\mathbb{V}$ tienen dimensión 4.

(ii) Probemos que $\mathbb{V}_1$ es un subespacio vectorial de dimensión finita aplicando la caracterización de subespacio vectorial (véase p. 50 libro de texto). Para dos elementos $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ de $\mathbb{V}_1$ dados por

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} x_1 & -x_1 \\ y_1 & z_1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} x_2 & -x_2 \\ y_2 & z_2 \end{pmatrix}$$

y dos escalares λ, $\mu \in \mathbb{R}$ se tiene que la combinación lineal

$$\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 & -x_1 \\ y_1 & z_1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x_2 & -x_2 \\ y_2 & z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu x_2 & -(\lambda x_1 + \mu x_2) \\ \lambda y_1 + \mu y_2 & \lambda z_1 + \mu z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{V}_1$$

pertenece efectivamente a $\mathbb{V}_1$ ya que la entrada $(1, 2)$ es el opuesto de la entrada $(1, 1)$. De una manera análoga se prueba que $\mathbb{V}_2$ es también subespacio vectorial.

(iii) Cualquier $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x & -x \\ y & z \end{pmatrix} \in \mathbb{V}_1$ se puede desarrollar como

$$\begin{pmatrix} x & -x \\ y & z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

luego

$$\mathbf{S}' = \left\{ \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es un sistema generador de $\mathbb{V}_1$. Por tanto cualquier subsistema minimal de éste será base. De hecho, es fácil ver que este sistema es minimal, ya que para cualquier combinación lineal $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se tiene que necesariamente $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Luego el sistema es linealmente independiente y por tanto $\mathbf{S}'$ es una base de $\mathbb{V}_1$. Concluímos entonces que $\mathbb{V}_1$ tiene dimensión 3. De igual forma se ve que $\mathbb{V}_2$ tiene dimensión 3 y una base viene dada por el conjunto

$$\mathbf{S}' = \left\{ \mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{q}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(iv) Consideraremos la base dada en el apartado (i), y consideremos una matriz genérica

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathbb{V}_1$$

en donde x, y, z, t son las coordenadas respecto de dicha base. Desarrollando en termino de la base $\mathbf{S}'$ se tiene

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y por tanto

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_1 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Luego las ecuaciones paramétricas son

$$x = \lambda_1, \; y = -\lambda_1, \, z = \lambda_2, \, t = \lambda_3$$

El subespacio tiene dimensión $m = 3$ entonces el número de ecuaciones implícitas viene dado por el número

$$n - m = 4 - 3 = 1$$

(véase p.67 libro de texto). La ecuación implícita se obtiene fácilmente eliminando el parámetro λ_1 de las dos primeras ecuaciones, de esta manera

$$x + y = 0.$$

es la ecuación implícita en términos de las coordenadas respecto de la base $\mathbf{S}$.

De igual forma, si consideramos cualquier matriz
$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathbb{V}_2$$

se tiene que la las ecuaciones paramétricas de $\mathbb{V}_2$ son

$$x = \lambda_1,\ y = \lambda_2,\ z = -\lambda_1,\ t = \lambda_3$$

y la ecuación implícita viene dada por
$$x + z = 0$$

Solución 3 Consideramos el espacio vectorial de los polinomios

$$\mathbb{P}(x) = \{p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0, a_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$$

Como subespacios de dimensión finita podemos considerar los subespacios de polinomios de 1 (polinomio lineales),

$$\mathbb{P}_1(x) = \{\mathbf{p} \in \mathbb{P}{:}a_i = 0 \text{ para todo } i \geq 2\} = \{\mathbf{p}(x) = a_1 x + a_0 : a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$$

Es fácil ver que toda combinación lineal de $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$ con $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{P}_1,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vuelve a ser un polinomio lineal, luego $\mathbb{P}_1$ es efectivamente un subespacio

Como subespacios de dimensión infinita podemos considerar el subespacios de coeficientes pares no nulos

$$\mathbb{P}_2(x) = \{\mathbf{p} \in \mathbb{P}{:}a_{2i} = 0 \text{ para todo } i \in \mathbb{N}\}$$

Dado dos $\mathbf{a}(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, $\mathbf{b}(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0$ tal que $a_{2i} = b_{2i} = 0$ para todo i. Entonces los coeficientes pares de una combinación lineal

$$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}(x) = (\lambda a_n + \mu b_n)x^n + (\lambda a_{n-1} + \mu b_{n-1})x^{n-1} + ... + (\lambda a_1 + \mu b_1)x + (\lambda a_0 + \mu b_0)$$

son siempre 0 ya que

$$\lambda a_{2i} + \mu b_{2i} = 0 \text{ para todo } i \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, $\mathbb{P}_2$ es efectivamente un subespacio vectorial.

Solución 4 (i) Si A tuviese matriz inversa, que no es el caso, la solución sería única y sería trivialemte el vector nulo ya que

$$A\lambda = \mathit{0} \Rightarrow A^{-1}A\lambda = \mathit{0} \Rightarrow I\lambda = \mathit{0} \Rightarrow \lambda = \mathit{0}$$

con lo que el subespacio que genera sería el subespacio trivial nulo, es decir aquel formado únicamente por el vector nulo.

(ii) Resolvamos por eliminacion Gaussiana (recordemos A^* matriz ampliada)

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 11 & 0 \end{pmatrix}$$

Sumando a la segunda fila la primera fila multiplicada por el factor 2, y asimismo sumando a la tercera fila la primera fila multiplicada por el factor -1 se obtiene la matriz ampliada de un sistema equivalente

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

De igual forma sumando a la tercera fila la segunda multiplicada por el factor -2 obtenemos la matriz ampliada equivalente

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego es sistema escalonado equivalente viene dado por

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 + \lambda_3,\ \lambda_2 = -3\lambda_3.$$

Es un sistema compatible indeterminado con un parametro cuyo conjunto de soluciones es

$$\{(-2\alpha, -3\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Tomando $\alpha = -1$, se tiene que $(2, 3, -1)$ resuelve el sistema (**??**) y que por tanto

$$2\mathbf{v}^1 + 3\mathbf{v}^2 - \mathbf{v}^3 = \mathbf{0}$$

Compruebese que de hecho

$$2(1, -2, 1) + 3(-1, 0, 3) - (-1, -4, 11) = (0, 0, 0)$$

Por tanto $\mathbf{v}^3$ depende linealmente de $\{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2\}$ y podemos descartarlo ya que el sistema $\{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2\}$ genera el mismo subespacio que $\{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3\}$. Los vectores $\mathbf{v}^1$, $\mathbf{v}^2$ son linealmente independientes entre si ya que es fácil ver que no existe un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{v}^1 = \alpha\mathbf{v}^2$. Con lo que el rango del sistema es 2.

(iii) En este caso $\det A = 0$ y por tanto la matriz no tiene rango 3 (véase que en dicho caso existiría su inversa y por tanto el vector $\mathbf{0}$ sería la unica solución de la ecuación). Pero como existe una submatriz de A de orden 2 con determinante distinto de cero

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right| = -2 \neq 0$$

su rango es 2.

(iv) La dimensión del subespacio es por tanto 2.

(v) Para hallar una base diferente del subespacio que genera basta hallar dos vectores del subespacio que sean linealmente independientes. El subespacio que genera es

$$\mathbb{E} = \{\alpha\mathbf{v}^1 + \beta\mathbf{v}^2 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Tomando $(\alpha, \beta) = (2, 0)$ tenemos el vector $\mathbf{w}_1 = 2\mathbf{v}^1 = 2(1, -2, 1) = (2, -4, 2)$; y asimismo tomando $(\alpha, \beta) = (0, 3)$ tenemos el vector $\mathbf{w}_2 = 3(-1, 0, 3) = (-3, 0, 9)$. $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ son claramente dos vectores linealmente independientes del subespacio $\mathbb{E}$ por lo que constituyen una base.

Solución 5 Denotemos $\mathbf{p}_1(x) = x$, $\mathbf{p}_2(x) = 2x^3$, $\mathbf{p}_3(x) = x - x^3$, $\mathbf{p}_4(x) = x - x^3 - x^5$. Claramente $\mathbf{p}_3$ es combinación lineal de los otros polinomios ya que

$$\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{p}_2$$

Luego $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_4\}$ genera el mismo espacio que $\mathbb{V}$. Estos polinomios son linealmente independientes ya que si existen λ_1, λ_2, λ_4 tales que

$$\begin{aligned} \lambda_1\mathbf{p}_1 + \lambda_2\mathbf{p}_2 + \lambda_4\mathbf{p}_4 &= 0 \Leftrightarrow (\lambda_1 + \lambda_4)x + (2\lambda_2 - \lambda_4)x^3 - \lambda_4 x^5 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda_1 + \lambda_4 = 0,\ 2\lambda_2 - \lambda_4 = 0,\ \lambda_4 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = 0 \end{aligned}$$

Luego el sistema minimal es el formado por dichos vectores, es decir

$$\mathbf{S}' = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_4\}$$

Siendo $\mathbb{V}$ el espacio vectorial generado por $\mathbf{S}'$, $\mathbb{V} = G[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_4]$, dos subespacios vectoriales contenidos en él pueden ser por ejemplo $\mathbb{V}_1$ el espacio generado por $\mathbf{p}_1$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_1 &= \{\lambda p_1 : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\lambda p_1 : \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

, que coincide con los monomios de grado 1, y $\mathbb{V}_2$ el espacio generado por $\mathbf{p}_2$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_2 &= \{\lambda p_2 : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\lambda 2x^3 : \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\lambda x^3 : \lambda \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

que coincide con los monomios de grado 3.

Solución 6 Tres vectores de $\mathbb{R}^3$ forman una base si son linealmente independientes. Esto es equivalente a que la matriz que tiene como vectores columnas a los vectores del sistema tiene rango 3, o lo que es lo mismo, que su determinante es distinto de 0. En este caso se cumple, ya que

$$\det \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Denotando por $X^T = (x_1\ x_2\ x_3)$ las coordenadas respecto de la base canónica y por $Y = (y_1\ y_2\ y_3)^T$ las coordenadas respecto de la base $\mathbf{B}$, $X = BY$ en donde $\mathbf{B}$ es la matriz de cambio de base que en este caso tiene como columnas las coordenadas de la base $\mathbf{B}$ respecto de la base canonica, es decir

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y por tanto las coordenadas X respecto de la base canónica del vector, que tiene coordenadas $Y = (2\ 1\ -4)^T$ respecto de la base $\mathbf{B}$, vienen dada por

$$X = BY = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

De hecho, compruébese que

$$(-1, 6, 3) = 2(-1, 1, 0) - 1(-1, 0, 1) + 4(0, 1, 1)$$

Solución 7 Denotemos $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 2, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (-1, 0, -1, a)$, $\mathbf{v}_4 = (0, 1, 1, 1)$. El sistema es linealmente independiente, y por tanto base por estar formado por cuatro vectores en un espacio de dimensión 4, si toda combinación lineal

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 + \lambda_4 \mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$$

cumple $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. En forma matricial quiere decir que el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuya matriz tiene por columnas los vectores tiene la solución nula como única solución. Por Rouche-Frobenius se tiene esto cuando el sistema es compatible determinado, es decir cuando la matriz del sistema tiene rango 4 y por tanto el determinante

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & a & 1 \end{pmatrix} \right| = a - 1$$

es no nulo. Luego para que $\mathbf{S}$ sea base se debe verficar que $a \neq 1$.

Por otro lado denotemos la base canónica de $\mathbb{R}^4$ por

$$\mathbf{A} = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$$

La matriz de cambio de base de la base $\mathbf{S}$ a $\mathbf{A}$ es aquella matriz cuyas columnas vienen dadas por las coordenadas de los vectores de la base $\mathbf{S}$ con respecto a la base $\mathbf{A}$, es decir es la propia matriz

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Denotando por $Y^T = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix}^T$, $X^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}^T$ las coordenadas de un vector genérico $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^4$ con respecto de de la bases **A** y **S** respectivamente, se tiene la relación

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Y por tanto

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & a & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

en donde la matriz inversa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & a & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{a-1} & \frac{1}{a-1} & \frac{1}{a-1} \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{a-1} & \frac{1}{a-1} & \frac{1}{a-1} \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

es la matriz de cambio de la base **A** a la **S** (véase p. 63 del libro de texto). Vèase que para qué esta matriz tenga sentido necesariamente se tiene que cumplir $a \neq 1$, en caso contrario el sistema **S** no es base y no tiene sentido considerar un cambio de base . Es fácil ver por otro lado que la coordenadas del vector $\mathbf{v} = (1, 0, 1, -1)$ con respecto de la base $\mathbb{S}$ es el vector $X^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ por coincidir $\mathbf{v}$ con el primer elemento de la base $\mathbb{S}$. De hecho se verifica lo dicho anteriormente ya que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{a-1} & \frac{1}{a-1} & \frac{1}{a-1} \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{a-1} & \frac{1}{a-1} & \frac{1}{a-1} \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución 8 Denotemos en primer lugar $v^1 = (1, -2, 1)$, $v^2 = (-1, 0, 3)$ y $v^2 = (-1, -4, 11)$.

Veamos que si los vectores son linealmente independientes, es decir si existen escalares λ_1, λ_2, λ_3 tal que

$$\lambda_1(1,-2,1)+\lambda_2(-1,0,3)+\lambda_3(-1,-4,11)=\mathbf{0}\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$$

Esto es equivalente a que el siguiente sistema matricial tenga como unica solucion el vector nulo

$$A\lambda=\mathbf{0} \tag{4}$$

en donde A es la matriz que tiene a los vectores del sistema generador como vectores columnas mientras que λ y 0 son las matrices columnas asociadas, es decir

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -4 \\ 1 & 3 & 11 \end{pmatrix}, \lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}, 0=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El sistema podemos resolverlo por eliminacion Gaussiana (recordemos A^* matriz ampliada)

$$A^*=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 11 & 0 \end{pmatrix}$$

Sumando a la segunda fila la primera fila multiplicada por el factor -2, y asimismo sumando a la tercera fila la primera fila multiplicada por el factor -1 se obtiene la matriz ampliada de un sistema equivalente

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

De igual forma sumando a la tercera fila la segunda multiplicada por el factor -2 obtenemos la matriz ampliada equivalente

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego es sistema escalonado equivalente viene dado por

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 + \lambda_3,\ \lambda_2 = -3\lambda_3.$$

Es un sistema compatible indeterminado con un parametro cuyo conjunto de soluciones es

$$\{(-2\alpha, -3\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Tomando $\alpha = -1$, se tiene que $(2, 3, -1)$ resuelve el sistema (**??**) y que por tanto

$$2v^1 + 3v^2 - v^3 = 0$$

Compruebese que de hecho

$$2(1, -2, 1) + 3(-1, 0, 3) - (-1, -4, 11) = (0, 0, 0)$$

Por tanto v^3 depende linealmente de $\{v^1, v^2\}$ y podemos descartarlo ya que el sistema $\{v^1, v^2\}$ genera el mismo subespacio que $\{v^1, v^2, v^3\}$. Los vectores v^1, v^2 son linealmente independientes entre si ya que es facil ver que no existe un escalar $\alpha \in R$ tal que $v^1 = \alpha v^2$. Con lo que el rango del sistema es 2.

De como hemos resuelto el ejercicio se puede verificar la propiedad de que el rango de un sistema de vectores coincide con el rango de la matriz que tiene como columnas a los vectores de dicho sistema

En este caso $\det A = 0$ y por tanto la matriz no tiene rango 3 (vease que en dicho caso existiris su inversa y por tantl el vector 0 seria la unica solucion de la ecuacion (**??**)). Pero como existe una submatriz de A con determinante distinto de cero

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right| = -2 \neq 0$$

su rango es 2.

Para hallar una base diferente del subespacio que genera basta hallar dos vectores diferentes que sean linealmente independientes. El subespacio que genera es

$$\mathbb{E} = \{\alpha v^1 + \beta v^2 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Tomando $(\alpha, \beta) = (2, 0)$ tenemos el vector $w_1 = 2v^1 = 2(1, -2, 1) = (2, -4, 2)$; y asimismo tomando $(\alpha, \beta) = (0, 3)$ tenemos el vector $w_2 = 3(-1, 0, 3) = (-3, 0, 9)$. $\{w_1, w_2\}$ son claramente dos vectores linealmente independientes del subespacio E por lo que constituyen una base.

Solución 9 Lo haremos cambiando primeramente de **A** a la base canónica y posteriormente a la base **B**. Con respecto de la base canónica el vector tiene por coordenadas

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de cambio de base de la canónica a la base **B** es directamente

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego el vector toma las coordenadas

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución 10 Basta comprobar que las matrices que tienen por columnas las coordenadas de los vectores de lo conjuntos con respecto a la base canónica

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

tiene rango 4, equivalentemente que dicha matriz tiene determinante no nulo.

- Para el caso de $\mathbf{A}_1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

  por tanto los vectores son linealmente dependientes y no constituyen una base.

- Para el caso de $\mathbf{A}_2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

  y por tanto constituye una base.

- De igual forma para el caso de $\mathbf{A}_3$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

  los vectores son linealmente dependientes, y por tanto no es una base.

Solución 11 Consideremos la base canónica $\mathbf{B} = \{\mathbf{p}_1(x) = 1, \mathbf{p}_2(x) = x,\ \mathbf{p}_3(x) = x^2\}$. Con respecto a dicha base el polinomio $\mathbf{p}$ tiene por coordenadas el vector $(1, 1, 1)$. La matriz de cambio de la base $\mathbf{A}$ a la base $\mathbf{B}$ es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

en donde recordemos las columnas no son más que las coordenadas de los elementos de la base $\mathbf{A}$ con respecto a $\mathbf{B}$. La matriz de cambio de **B** a **A** es la inversa de dicha matriz

$$B = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Las coordenadas de **p** se obtienen multiplicando la matriz de cambio de base por el correspondiente vector de coordenadas

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego $(3, 1, 1)$ es el vector de coordenadas pedido, de hecho podemos comprobarlo directamente

$$3\mathbf{p}_1(x) + 1\mathbf{p}_2(x) + 1\mathbf{p}_3(x) = 3 \cdot 1 + 1 \cdot (x^2 - 1) + 1 \cdot (x - 1) = x^2 + x + 1 = \mathbf{p}$$

Solución 12 Consideremos las bases

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{p}_1(x) = x^2 - x + 1,\ \mathbf{p}_2(x) = x^2 + 1,\ \mathbf{p}_3(x) = 1\}$$
$$\mathbf{A}' = \{\mathbf{p}'_1(x) = -1,\ \mathbf{p}'_2(x) = -x^2,\ \mathbf{p}'_3(x) = x\}$$

Para simplificar el razonamiento consideremos la base canónica

$$\mathbf{A}'' = \left\{\mathbf{p}_1(x) = 1,\ \mathbf{p}_2(x) = x,\ \mathbf{p}_3(x) = x^2\right\}$$

y denotemos por X, X', $X'' \in \mathbf{R}^3$ los vectores columnas de coordenadas de un vector genérico **p** respecto de **A**, **A**$'$ y **A**$''$ respectivamente. La matriz de cambio de base de **A** a **A**$''$ viene dada por la matriz que tiene por columnas las coordenadas de los elementos de la base **A** con respecto a la base **A**$'$(véase p. 63 libro de texto). En este caso se puede calcular directamente dicha matriz y por tanto la ecuación matricial de cambio de base

$$X'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} X$$

Del mismo modo podemos considerar el cambio de coordenadas de $\mathbf{A}'$ a $\mathbf{A}''$

$$X' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} X'$$

Igualando ambas expresiones

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} X$$

y por tanto

$$X' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} X.$$

Luego la matriz buscada es

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\mathbf{A} = \{\mathbf{p}_1(x) = x^2 - x + 1,\ \mathbf{p}_2(x) = x^2 + 1,\ \mathbf{p}_3(x) = 1\}$

El polinomio $\mathbf{p}(x) = x^2$ se puede expresar fácilmente combinación lineal de elementos de $\mathbf{A}$

$$\mathbf{p}(x) = x^2 = (x^2+1) - 1 = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3,$$

y por tanto el vector

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

nos dan las coordenadas de $\mathbf{p}$ con respecto a $\mathbf{A}$. Obtenemos las coordenadas de $\mathbf{p}$ con respecto a $\mathbf{A}$ multiplicando por la matriz de cambio de base

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y efectivamente se verifica que vector

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

no dan las coordenadas de $\mathbf{p}$ con respecto a $\mathbf{A}$, ya que

$$\mathbf{p}(x) = -\mathbf{p}'_2(x) = -(-x^2) = x^2$$

$$\begin{array}{l} \mathbf{A} = \{\mathbf{p}_1(x) = x^2 - x + 1,\ \mathbf{p}_2(x) = x^2 + 1,\ \mathbf{p}_3(x) = 1\} \\ \mathbf{A}' = \{\mathbf{p}'_1(x) = -1,\ \mathbf{p}'_2(x) = -x^2,\ \mathbf{p}'_3(x) = x\} \end{array}$$

Solución 13 (a) Basta ver que el determinante de las matrices que tienen los vectores por columnas es no nulo

$$\begin{array}{rcl} \left|\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right| & = & 2 \\ \left|\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right| & = & -4 \end{array}$$

(b) Denotemos por $X^T = (x_1\ x_2\ x_3)$ las coordenadas respecto de la base **A** y por $Y = (y_1\ y_2\ y_3)^T$ las coordenadas respecto de la base **B**. Sabemos que

$$Y = AX \tag{5}$$

en A es la matriz que tiene por columnas a las coordenadas de la base **A** respecto de la base **B**. Luego en primer lugar tenemos que hallar las coordenadas de **A** con respecto a **B**. Empezando por el primer vector $(1,1,0)$ esto es equivalente a encontrar escalares $(a_{11}, a_{21}, a_{31}) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$(1,1,0) = a_{11}(-1,2,1) + a_{21}(1,1,1) + a_{31}(1,-1,1)$$

Dicha ecuacion lineal se puede expresar matricialmente de manera comoda

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$$

Luego

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

De igual manera las coordenadas $(a_{12}, a_{22}, a_{32}) \in \mathbb{R}^3$ del vector $(-1,0,1)$ respecto de **B** verifican

$$\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y las coordenadas del vector $(a_{13}, a_{23}, a_{33}) \in \mathbb{R}^3$ del vector $(0,-1,1)$ respecto de **B** verifican

$$\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

Luego

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{4} & -1 & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & 1 & \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

De la expresión (**??**) multiplicando por la matriz inversa a ambos lado de la igualdad se tiene

$$X = A^{-1}Y$$

por tanto la matriz de cambio de base la base $\mathbf{B}$ a la base $\mathbf{A}$ viene dada por

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{4} & -1 & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & 1 & \frac{5}{4} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

(c) Dado un vector con coordenadas $(1, -1, 1)$ con respecto a la base **A** entonces basta multiplicar la coordenadas por la matriz de cambio de base

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{4} & -1 & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & 1 & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

para hallar las coordenadas del vector $\mathbf{v}$ con respecto a la base **B**. Podemos comprobar que estamos ante el mismo vector si tienen las mismas coordenadas respecto de la base canónica

$$(2, 0, 0) = -1(-1, 2, 1) + \frac{3}{2}(1, 1, 1) - \frac{1}{2}(1, -1, 1) = 1(1, 1, 0) - 1(-1, 0, 1) + 1(0, -1, 1)$$

(d) Recíprocamente dado un vector con coordenadas $(1, 1, -1)$ con respecto a la base **B** entonces basta multiplicar

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Comprobemos que estamos ante el mismo vector comparando las coordenadas con respecto de la base canónica

$$(-1,4,1)=1(-1,2,1)+1(1,1,1)-1(1,-1,1)=2(1,1,0)+3(-1,0,1)-2(0,-1,1)$$

Solución 14 Compruebe que las ecuaciones paramétricas se puede escribir matricialmente como

$$A\lambda = X \approx \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \tag{6}$$

en donde A es la matriz que tiene como columnas los vectores del sistema, $\lambda^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $X^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ las correspondientes matrices columnas de los parámetros y coordenadas del vector.

Mediante eliminación Gaussiana restándole a la cuarta fila la primera llegamos a un sistema equivalente

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 - x_1 \end{pmatrix}$$

Continue hasta llegar a un sistema equivalente $A'\lambda = X'$ en donde $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. ¿Como obtenemos en dicho caso las ecuaciones implícitas del sistema?

(i) Las ecuaciones parámetricas se determinan directamente

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x4 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

lo que implica

$$\begin{aligned}
x_1 &= \lambda_1 - \lambda_2 \\
x_2 &= 0 \\
x_3 &= \lambda_1 + \lambda_2 \\
x_4 &= \lambda_1 - \lambda_2
\end{aligned}$$

Eliminando los parámetros λ_1, λ_2 llegamos a la ecuaciones implícitas

$$\begin{aligned}
x_2 &= 0 \\
x_1 - x_4 &= 0
\end{aligned}$$

(ii) Partimos del sistema equivalente

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 - x_1 \end{pmatrix}$$

Sumando a la primera fila la cuarta se obtiene el sistema equivalente

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 - x_1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando por 1/2 la primera fila

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_1 + x_3) \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Restándole a la tercera la primera fila

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_1 + x_3) \\ x_2 \\ x_3 - \frac{1}{2}(x_1 + x_3) \\ x_4 - x_1 \end{pmatrix}$$

Luego obtenemos $\lambda_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_3)$, $\lambda_2 = x_3 - \frac{1}{2}(x_1 + x_3)$ y las ecuaciones implícitas vienen dadas por las filas nulas, en este caso la segunda y tercera, ya que los parámetros desaparecen. En este caso

$$x_2 = 0, \;\; x_4 - x_1 = 0.$$

Solución 15 (i) Apliquemos el teorema de caracterización de subespacios vectoriales. Para dos números reales λ, $\mu \in \mathbb{R}$ y dos polinomios cúbicos

$$\mathbf{a}(x){=}a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, \;\; \mathbf{b}(\mathbf{x}) {=} b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$$

con integral nula

$$\int_0^1 a(s)ds = 0,$$

Por ser de $\mathbb{V}$. se tiene que la combinación lineal $\lambda\mathbf{a}{+}\mu\mathbf{b}$

$$\int_0^1 \lambda\mathbf{a}(s){+}\mu\mathbf{b}(s)ds = \lambda \int_0^1 \mathbf{a}(s){+}\mu \int_0^1 \mathbf{b}(s) = 0 + 0 = 0$$

también tiene integral nula sin más que aplicar propiedades básicas de la integral (véase p. 200). Luego $\mathbb{V}$ es un subespacio vectorial.

Para estudiar una posible base consideremos en primer lugar un elemento génerico

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = a_0 p_1(x) + a_1 p_2(x) + a_2 p_3(x) + a_3 p_4(x)$$

del espacio en donde $X = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}^T$ es el vector columna de coordenadas de $\mathbf{p}$ con respecto a la base dada

$$\mathbf{A} = \{p_1(x) = 1,\ p_2(x) = x, p_3(x) = x^2,\ p_4(x) = x^3\}$$

Veamos que condiciones se debe dar para que el vector pertenezca al subespacio. Para ello su integral debe ser nula, luego

$$\begin{aligned}
\int_0^1 p(s)ds &= 0 \Leftrightarrow \\
\int_0^1 (a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3) ds &= 0 \Leftrightarrow \\
a_0 \int_0^1 ds + a_1 \int_0^1 s ds + a_2 \int_0^1 s^2 ds + a_3 \int_0^1 s^3 ds &= 0 \Leftrightarrow \\
a_0 + a_1 \left[\frac{s^2}{2}\right]_{s=0}^{s=1} + a_2 \left[\frac{s^3}{3}\right]_{s=0}^{s=1} + a_3 \left[\frac{s^4}{4}\right]_{s=0}^{s=1} &= 0 \Leftrightarrow \\
a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{4}a_3 &= 0
\end{aligned}$$

Luego $a_0 = -\frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{3}a_2 - \frac{1}{4}a_3$ y por tanto

$$\mathbf{p}(x) = -\frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{3}a_2 - \frac{1}{4}a_3 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = a_1(x - \frac{1}{2}) + a_2(x^2 - \frac{1}{3}) + a_3(x^3 - \frac{1}{4})$$

El sistema de polinomios

$$\mathbf{E} = \left\{ \mathbf{w}_1(x) = x - \frac{1}{2},\ \mathbf{w}_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}, \mathbf{w}_3(x) = x^3 - \frac{1}{4} \right\}$$

constituye un sistema generador de $\mathbf{S}$. De hecho es una base por ser linealmente independientes, para ello solamente basta observar que toda combinación lineal

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \left(x - \frac{1}{2}\right) + \lambda_2 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) + \lambda_3 \left(x^3 - \frac{1}{4}\right) &= 0 \Leftrightarrow \\
\left(-\frac{1}{2}\lambda_1 - \frac{1}{3}\lambda_2 - \frac{1}{4}\lambda_3\right) + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 &= 0
\end{aligned}$$

es nula ya que necesariamente $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Luego $\mathbf{S}$ es una base de $\mathbb{V}$ que tiene dimensión 3 por estar formada por tres elementos.

(ii) Consideremos la base $\mathbf{A}$ y tomemos un polinomio

$$p(x) = a_0\mathbf{p}_1(x) + a_1\mathbf{p}_2(x) + a_2\mathbf{p}_3(x) + a_4\mathbf{p}_3(x)$$

desarrollando en términos de la base $\mathbf{E}$ del subespacio $\mathbf{S}$ se tiene

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = \lambda_1(x - \frac{1}{2}) + \lambda_2(x^2 - \frac{1}{3}) + \lambda_3(x^3 - \frac{1}{4})$$

en donde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son los parámetros. Desarrollando e igualando término a término llegamos a que

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{1}{2}\lambda_1 - \frac{1}{3}\lambda_2 - \frac{1}{4}\lambda_3 \\ a_1 &= \lambda_1 \\ a_2 &= \lambda_2 \\ a_3 &= \lambda_3 \end{aligned}$$

que nos dan las ecuaciones paramétricas con respecto a los coordenadas. Solamente existe una única ecuación implçicita por ser la dimensión del espacio 4 y la del subespacio 3, se obtiene sustituyendo los valores de los parámetros en la primera ecuación

$$a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{4}a_3 = 0$$

De hecho vemos que ya obtuvimos la ecuación parámetricas del subespacio $\mathbf{S}$ en el apartado anterior cuando estabamos caracterizando a los elementos de dicho subespacio.

Solución 16 Como

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

el sistema ampliado $\mathbf{S}' = \{(-1,1,0,1),(-1,0,1,-1),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ constituye una base de $\mathbb{R}^4$.

Solución 17 a) Denotemos $\mathbf{S} = \{(2,0,1),(-1,1,1),(0,2,3),(-3,1,0)\} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$

Seguimos dos métodos:

Matricialmente

Si partimos de los dos primeros vectores del sistema, tenemos que son linealmente independiente y su rango por tanto es 2, rango $\{(2,0,1),(-1,1,1)\} = 2$. Matricialmente

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

ya que podemos encontrar una submatriz de determinante no nulo, por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Adjuntamos el tercer vector al sistema, éste continua siendo de rango 2 ya que el determinante de la matriz

$$\det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

y por tanto

$$\text{rango}\{(2,0,1),(-1,1,1)\} = \text{rango}\{(2,0,1),(-1,1,1),(0,2,3)\} = 2$$

lo que equivale a decir que $(0,2,3)$ es combinación lineal de los otros dos vectores. Por tanto el subespacio generado por $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ coincide con el subespacio generador por $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Del mismo modo $\mathbf{v}_4$ es combinación lineal de $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ ya que

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Resolviendo el sistema indeterminado

Planteamos el sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que denotamos matricialmente como $A\lambda = \mathbf{0}$.

Podemos reducirlo a una matriz escalonada mediante transformaciones elementales a su matriz ampliada

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Multiplicando la primera fila por $-1/2$ y sumandosela a la tercera

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 3 & 3/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Multiplicando la segunda fila por el factor $-3/2$ y sumandosela a la tercera

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Llegamos a un sistema equivalente

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Este sistema es compatible determinado con dos parametros. Su conjunto de soluciones viene dado por

$$\{(\beta - \alpha, -2\alpha - \beta, \alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Luego si tomamos $\alpha = -1$, $\beta = 0$ tenemos que $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$, y si tomamos $(\alpha, \beta) = (0, -1)$ tenemos $\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$. Luego $\mathbf{S}' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es un sistema minimal de $\mathbf{S}$.

b) Dado $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}$ la ecuaciones paramétricas son $\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2$en donde λ_1, λ_2 son los coeficientes de $\mathbf{x}$ respecto la base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ calculada anteriormente. Luego $(x_1, x_2, x_3) =\lambda_1(2, 0, 1) + \lambda_2(-1, 1, 1)$ y por tanto las ecuaciones paramétricas vienen dadas por

$$\left.\begin{array}{c} x_1 = 2\lambda_1 - \lambda_2 \\ x_2 = \lambda_2 \\ x_3 = \lambda_1 + \lambda_2 \end{array}\right\} \tag{7}$$

c) Para hallar las ecuaciones implícitas debemos eliminar los parámetros en el sistema (**??**). Como hay dos parámetros y la dimensión del espacio es 3 solamente habrá una ecuación implícita. De la segunda y tercera ecuación $\lambda_2 = x_2$, $\lambda_1 = x_3 - x_2$, sustituyendo en la primera se tiene

$$x_1 = 2(x_3 - x_2) - x_2 = 2x_3 - 3x_2 \Rightarrow x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0$$

Es la ecuación de un plano en $\mathbb{R}^3$ compruébese que las coordenadas de $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ verifican dicha ecuación.

d) En general si n es la dimensión del espacio y m' el numero de ecuaciones implícitas sabemos que $m' = n - m$ en donde m es el número de parámetros. El número de parámetros nos da el número de elementos de la base del subespacio y por tanto la dimensión de dicho subespacio. Por tanto $m = n - m'$, es decir la dimensión del subespacio es la diferencia entre la dimensión del espacio y el número de ecuaciones implícita. En este caso

$$\dim \mathbb{E} = \dim \mathbb{R}^3 - 1 = 3 - 1 = 2$$

Solución 18 En primer lugar el sistema es linealmente independiente ya la matriz asociada cuya columnas son los vectores del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tiene rango 3. Para ver este hecho basta tomar el deteminante de la submatriz

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

que es no nulo. Por tanto podemos expresar las ecuaciones paramétricas de manera matricial de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

en donde $X^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}^T$ es el vector columna de coordenadas de un elemento genérico del subespacio generado por el sistema. Como el subespacio generado tiene dimensión 3 y estamos es un espacio de dimensión 5 las ecuaciones parámetricas están formadas por 2 ecuaciones. Se puede hallar haciendo mediante transformaciones elementales dos filas nula. Sumando a la primera fila la segunda tenemos el sistema equivalente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

y restando a la quinta fila la primera llegamos a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 - x_2 - x_1 \end{pmatrix}$$

Véase que lo que hemos hecho no es más que multiplicar a ambos lados de la igualdad por el producto de matrices espaciales (véase pruebas de autoevaluación del capítulo anterior)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego ya tenemos que la primera ecuación implícita es $x_5 - x_2 - x_1 = 0$. La segunda se puede obtener haciendo ceros en la fila 4, para ello en primer lugar sumamos a la fila 4 la fila 2 y obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_2 + x_4 \\ x_5 - x_2 - x_1 \end{pmatrix}$$

y posteriormenta sumamos a la fila cuarta la tercera multiplicada por -2 obteniendo el sistema equivalente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 \\ x_5 - x_2 - x_1 \end{pmatrix}$$

Luego las ecuaciones implícitas vienen dadas por

$$\begin{aligned} x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0, \\ x_5 - x_2 - x_1 &= 0 \end{aligned}$$

Solución 19 Las coordenadas de los vectores de B' respecto a B son las más directas:

$$\begin{aligned} (\bar{v}_1)_B &= (0, -1, 1, -1) \\ (\bar{v}_2)_B &= (1, 1, -1, 1) \\ (\bar{v}_3)_B &= (-2, -1, 2, -3) \\ (\bar{v}_4)_B &= (-2, -1, 1, -2) \end{aligned}$$

Para hallar las coordenadas de los vectores de B respecto de los vectores de B' hay que hacer más operaciones, se trata de despejar cada $\bar{u}_i$ como combinación lineal de $\bar{v}_i$. Por ejemplo, como $\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = \bar{u}_1$ se tiene que: $(\bar{u}_1)_{B'} = (1, 1, 0, 0)$. De esta forma, tras realizar operaciones entre los vectores a partir de las ecuaciones iniciales, se obtiene:

$$\begin{aligned} (\bar{u}_1)_{B'} &= (1, 1, 0, 0) \\ (\bar{u}_2)_{B'} &= (-1, 0, 1, -1) \\ (\bar{u}_3)_{B'} &= (-1, -2, 1, -2) \\ (\bar{u}_4)_{B'} &= (-1, -2, 0, -1) \end{aligned} .$$

El ejercicio está pensado para razonar entre las coordenadas de un vector respecto a distintas bases. Las últimas operaciones (de cálculo de coordenadas de vectores de B respecto de B') pueden resultar tediosas.
Considerando las nociones que aparecen en el capítulo 3, *ecuación matricial del cambio de base*, el producto de matrices permite pasar las coordenadas de un vector respecto de una base a las coordenadas del mismo vector respecto de otra base. En concreto la matriz que permite dicho cambios es la *matriz de cambio de base*, se verá que las cuentas y operaciones anteriores para hallar la matriz de cambio de base de B' a B se simplifican. En concreto, tras estudiar, el módulo 3, se comprobará que, en este ejercicio,

la matriz de cambio de base de B' a B es $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ y la matriz de cambio de base de B a B' es

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Solución 20 Nótese que $(-a, a, -2a, 3a) = a(-1, 1, -2, 3)$ y como $a \neq 0$, el subespacio generado siempre es $\langle(-1, 1, -2, 3)\rangle$ (de dimensión 1). Por lo tanto, NO depende de a, es decir, B) es falso. Es cierto A).

Solución 21 Un vector de $F + G$ será de la forma, $\lambda(1, 1, 1) + \beta(2, 1, 3)$. Por tanto comprobaremos para cada uno de los vectores propuestos como solución si se verifica:
$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda + 2\beta & = & u \\ \lambda + \beta & = & v \\ \lambda + 3\beta & = & w \end{array}\right.$, si sustituimos la terna (u, v, w) respectivamente por cada una de las ternas dadas como posibles soluciones resulta que la única que no cumple es la opción A).

Solución 22 Se pide calcular las dimensiones y ecuaciones paramétricas y cartesianas de $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x_3 = 3x_2, \quad x_1 = 2x_2\}$ y $G = \{\lambda(1, 1, 1), \forall \in \mathbb{R}\}$.

F está expresado en ecuaciones cartesianas: $x_3 = 3x_2$, $x_1 = 2x_2$. Como F es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ definido por dos ecuaciones cartesianas, la dimensión de F es 1. Unas ecuaciones paramétricas son: $\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & 2\alpha \\ x_2 & = & \alpha \\ x_3 & = & 3\alpha \end{array}\right.$ siendo $\alpha \in \mathbb{R}$.

G está definido por un sistema generador: $\{(1, 1, 1)\}$. Luego la dimensión de G es 1. Una ecuaciones paramétricas se obtienen fácilemnte: $\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & \alpha \\ x_2 & = & \alpha \\ x_3 & = & \alpha \end{array}\right.$ siendo $\alpha \in \mathbb{R}$. Para obtener unas ecuaciones cartesianas desde las ecuaciones paramétricas, se elimina el parámetro. Además, se tiene en cuenta que las ecuaciones cartesianas son 2, (por ser un subespacio de dimensión 1 de un espacio de dimensión 3) resulta: $x_1 = x_2, \ x_2 = x_3$ o equivalentemente $x_1 = x_2 = x_3$.

Solución 23 La dimensión de U es dos, la dimensión de V es 1 y la intersección sólo es el elemento neutro. Es correcta A).

Solución 24 Es cierta la opción C) ya que los subespacios deben contener el origen de coordenadas $\{(0,0,0)\}$.

Solución 25 El rango de la matriz dada es 5 por lo que las columnas forman una base de $\mathbb{R}^5$. Por ser A una matriz cuadrada, otra vía para decidir que S_1 es una base de $\mathbb{R}^5$ es calcular el determinante de A.
Como S_2 tiene cuatro vectores y tiene rango menor que 4, S_2 es ligado. El rango de la matriz B es 3. Nótese que S_2 es linealmente dependiente porque son cuatro vectores de $\mathbb{R}^3$. Por lo tanto, no habría hecho falta calcular el rango de la matriz.

Capítulos 4-5. Aplicaciones entre espacios vectoriales

ENUNCIADOS

Ejercicio 1 De las siguientes aplicaciones determinar si son o no aplicaciones lineales:
A) $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(a,b) = (a^2 + b, a - b)$$

B) en el espacio de las matrices de orden 2 sobre $\mathbb{R}$, $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, la aplicación g que a cada matriz A le hace corresponder el valor del determinante,

$$g(A) = \det(A).$$

Ejercicio 2 Sea la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3, x_3 - x_1, x_1 + 2x_2).$$

a) Pruébese por la definición que f es una aplicación lineal.

b) Encuéntrese la matriz que determina f.

Ejercicio 3 De las siguientes funciones de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^4$ señale cuáles de ellas son aplicaciones lineales

$$\begin{aligned} T_1(x_1, x_2, x_3) &= (x_1^2, x_1 - x_2 + x_3, x_1, x_2 - x_3) \\ T_2(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 - x_3, x_1 - x_2 + x_3, x_1, x_2 - x_3) \\ T_3(x_1, x_2, x_3) &= (-x_3, x_2 - x_1 + x_3, x_2 - x_1, x_1 - x_3) \end{aligned}$$

y en caso afirmativo determine sus matrices asociadas.

Ejercicio 4 Sea $E = \wp_1(x)$ el espacio vectorial de los polinomios en una indeterminada x, con coeficientes reales y grado menor o igual que 1. Se define una aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow E$ mediante $f(1,0) = 1 - x$; $\quad f(0,1) = 1$. Se pide calcular el subespacio imagen de f, $\mathrm{Im}(f)$, y el subespacio núcleo de f, $\mathrm{Ker}(f)$, así como sus dimensiones.

Ejercicio 5 Sea $\mathbb{R}^3$ con la base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ y $\mathbb{R}^4$ con la base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$.

a) Determínese la matriz de la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}_1) &= 2\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 - 3\mathbf{w}_3 \\ f(\mathbf{u}_2) &= -\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_3 + \mathbf{w}_4 \\ f(\mathbf{u}_3) &= \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_4 \end{aligned}$$

b) Determínense las ecuaciones de $\operatorname{Ker} f$, su dimensión y una base.

c) Determínense las ecuaciones de $\operatorname{Im} f$, su dimensión y una base.

Ejercicio 6 Sean f una aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$, ambos espacios con la base canónica, en donde f esta definida como definida por

$$f(1,0,0) = (2,1); f(0,1,0) = (0,-1);\ f(0,0,1) = (-1,1)$$

a) Determínese la matriz asociada a f.

b) Determínese $f(-1,2,1)$.

c) Determínese un vector de R^3 cuya imagen es $(1,-3)$. ¿Cuántos vectores de R^3 lo cumplen?. ¿Constituyen un subespacio vectorial?.

d) Determínense las ecuaciones de $Ker\, f$, su dimensión y una base.

e) Determínense las ecuaciones de Imf, su dimensión y una base.

Ejercicio 7 Si $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ definida como $f(x_1, x_2) = (2x_1, -x_1)$, calcular el determinante de la matriz asociada en la base $\{(1,2),(1,0)\}$ (en ambos espacios). ¿Qué conclusión podemos obtener de este ejercicio?

Ejercicio 8 Sea $\mathbf{A} = \{(1,0,-1),(0,1,1),(-1,1,-1)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathbf{B}$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Si la matriz asociada a una aplicación lineal $f : R^3 \to R^2$ es

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

determinar la matriz Q asociada a f en las bases

$$\mathbf{A}' = \{(0,0,-1),(2,-1,1),)(1,0,2)\}\,,\ \mathbf{B}' = \{(-2,1),(1,3)\}\,.$$

Compuébese que el rango de las matrices P y Q es el mismo.

Ejercicio 9 Sea $\mathbb{P}_2 = \{\mathbf{p}(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 : a_i \in \mathbb{R}\ \}$ el espacio vectorial de polinomios de grado igual o menor a 2. Considere la base $\mathbf{A} = \{\mathbf{p}_0(x) = 1,\ \mathbf{p}_1(x) = x,\ \mathbf{p}_2(x) = x^2\}$, Sea $F : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ la aplicación lineal que a cada $\mathbf{p} = a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathbb{P}_2$ le asocia el polinomio $F(p) = a_0(x-1)^2 + a_1(x-1) + a_2$. Señale la matriz asociada a la aplicación si tanto en el espacio del dominio como en el espacio imagen consideramos la base $\mathbf{A}$.

Ejercicio 10 Si $AX = B$ es una expresión matricial de un sistema de ecuaciones y A es la matriz asociada a una aplicación lineal f, la solución del sistema verifica:

A) Siempre existe.

B) Es el núcleo.

C) Es el original de B.

D) Ninguna de las anteriores.

Ejercicio 11 Encuentre los subespacios asociados a los autovalores de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Señale si es diagonalizable.

Ejercicio 12 Considere el espacio de las matrices $\mathbb{M}_2$ de orden 2. Considerando la base

$$\mathbf{A} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

sea $f : \mathbb{M}_2 \to \mathbb{M}_2$ la aplicación lineal definida por

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}_1) &= \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \\ f(\mathbf{v}_2) &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_4 \\ f(\mathbf{v}_3) &= -\mathbf{v}_4 \\ f(\mathbf{v}_4) &= -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \end{aligned}$$

(i) Determine el valor de $f\begin{pmatrix} 2 & 12 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(ii) Señale la matriz asociada a la aplicación si consideramos tanto en el espacio de salida como en el imagen la base A.

(iii) Señale la matriz asociada a la aplicación si consideramos tanto en el espacio dominio como en el imagen la base B

$$\mathbf{B} = \left\{ \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

(iv) Señale la matriz asociada a la aplicación si consideramos en el espacio dominio la base A y en el espacio imagen la base B

(v) Determine el subespacio imagen $f(\mathbb{V}_1)$ en donde

$$\mathbf{V}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ b & a \end{pmatrix} : a,\, b \in \mathbf{R} \right\}$$

Señale su dimensión y una base de dicho subespacio. Encuentre ecuaciones implícitas en término de las coordenadas con respecto de la base A. ¿Es la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

un elemento de dicho espacio imagen?

Ejercicio 13 Si $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una aplicación lineal tal que $f(1,1) = (1,4)$ y $f(2,-1) = (-2,3)$ se pide calcular la imagen de $(3,-1)$.

Ejercicio 14 Estudiar si la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por la matriz

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

en la base canónica es diagonalizable. En caso afirmativo encontrar la matriz diagonal D y la base a la que está referida.

Ejercicio 15 Determine los subespacios asociados a los autovalores de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Señale si es diagonalizable, y en dicho caso encuentre la matriz diagonal D y la base a la que está referida.

Ejercicio 16 Si la ecuación característica de A es $(\lambda - 3)^2(\lambda + 1) = 0$ e I es la matriz unidad del mismo orden que A, se verifica que:

A) $|A - I| = |A - 3I|$.

B) $|A + I| = |A - 3I|$.

C) $|A + I| = |A + 3I|$

D) Ninguna de las anteriores.

Ejercicio 17 Aplicar el teorema de caracterización para estudiar si son diagonalizables las matrices.

a) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

c) $H = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

Ejercicio 18 Señale una matriz de orden 5 que no sea diagonalizable

Ejercicio 19 *Dos matrices A y B de orden n son semejantes si y sólo si existe una matriz regular P tal que $A = P^{-1}BP$. A P, se le llama matriz de paso.* Si la matriz A es una matriz cuadrada de orden 2, semejante a la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ decidir si es posible calcular el determinante de A.

Ejercicio 20 Sea la matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

referida a la base

$$\mathbf{A} = \{(1,0,1),(2,-1,1),(1,0,-2)\}$$

a) Determínese la matriz Q respecto a la base canónica.

b) Estúdiese si Q es diagonalizable y en caso afirmativo hállese la matriz diagonal D y la base a la que está referida.

Ejercicio 21 Si $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ y $B' = \{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2\}$ son bases de $\mathbb{R}^2$, tales que $\bar{e}'_1 = \bar{e}_1$ y $\bar{e}'_2 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2$ y la matriz de una forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en la base B, es cierto que la matriz de Q en B' es:

A) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

D) Ninguna de las anteriores.

Ejercicio 22 Sea la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}_1) &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3 \\ f(\mathbf{u}_2) &= \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \\ f(\mathbf{u}_3) &= 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_3 \end{aligned}$$

en donde $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$

(a) Señale la matriz de la aplicación. (0.5 ptos)

(b) Determínense las ecuaciones implícitas del Ker f, su dimensión y una base. (0.75 ptos)

(c) Determínense las ecuaciones implícitas de $Im\, f$, su dimensión y una base. (0.75 ptos)

Ejercicio 23 Sea $f(x_1, x_2) = (-7x_1 + 6x_2, -9x_1 + 8x_2)$ una aplicación lineal referida a la base canónica. Se pregunta:

(i) Halle la matriz asociada de f con respecto a la base $\mathbf{B} = \{(1, -1), (1, 1)\}$.

(ii) Estudiar si es diagonalizable, y en caso afirmativo encontrar la matriz diagonal D y la base a la que está referida.

Ejercicio 24 Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - x_3, -x_1 + 2x_2 - x_3, x_1 - x_2 + 2x_3)$$

en la base canónica.

(i) Determinar los valores propios y las ecuaciones de los subespacios propios asociados a ellos.

(ii) Estudiar si es diagonalizable. En caso afirmativo encontrar la matriz diagonal D y la base a la que está referida.

Ejercicio 25 Decidir si son bilineales las siguientes aplicaciones: A) $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 + y_2$; B) $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_2$.

Ejercicio 26 Rázonese que en el espacio $F[0, 1]$ de las funciones reales y continuas en el intervalo $[0, 1]$ la aplicación

$$\varphi(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

es bilineal.

Ejercicio 27 Considere en este caso el espacio vectorial $\mathbb{P}_2 = \{\mathbf{p}(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 : a_i \in \mathbb{R}\}$ de polinomios de grado igual o menor a 2 y considere su base natural

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{p}_0(x) = 1,\ \mathbf{p}_1(x) = x,\ \mathbf{p}_2(x) = x^2\}$$

(i) Para este subespacio pruebe que la forma bilineal φ del ejercicio anterior tambien es una aplicación bilineal y encuente la matriz de dicha aplicación bilineal con respecto a dicha base.

(ii) Encuentre la matriz de φ con respecto a una nueva base

$$\mathbf{B} = \{\mathbf{p}'_0(x) = x - 1,\ \mathbf{p}'_1(x) = x^2,\ \mathbf{p}'_2(x) = 2\}$$

Ejercicio 28 Considere la forma bilineal φ en $\mathbb{R}^3$ definida como

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$$

en donde los vectores $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ están referidos a la base canónica

$$\mathbf{A} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}.$$

(i) Señale la matriz asociada con respecto a dicha base.

(ii) Señale la matriz con respecto a una nueva base

$$\mathbf{B} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, -1, 0)\}$$

Ejercicio 29 Sea $\mathbf{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática cuya expresión matricial es

$$w(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

en donde $v = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3$.

Encuéntrese una expresión matricial de la forma bilineal φ de la que procede w.

Ejercicio 30 Sea $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. La matriz P que define una forma bilineal φ en $\mathbb{R}^3$ viene determinada por $\varphi(u_i, u_j) = i - 2j$.

a) Hállese P y $\varphi(v, w)$, en donde $v = 2u_1 - u_3$ y $w = u_1 - u_2 - u_3$.

b) ¿Es φ degenerada?, ¿es simétrica?.

c) Si $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ es una nueva base tal que $b_1 = u_1 + u_2$, $b_2 = u_2 - u_3$, $b_3 = u_3 - u_1$, calcúlese la matriz Q de φ respecto a esta base.

Ejercicio 31 Sea $\mathbf{A} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una forma bilineal simétrica que satisface $\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = -1$, $\varphi(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = 0$, $\varphi(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) = -2$, $\varphi(\mathbf{e}_1, 3\mathbf{e}_2) = 6$, $\varphi(\mathbf{e}_1, -2\mathbf{e}_3) = -2$, $\varphi(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 4$. Determínese la matriz de la aplicación.

Ejercicio 32 Si $\mathbf{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ tal que sus coordenadas respecto a la base $\mathbf{A}$ del ejercicio anterior son $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 2, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (0, 0, 1)$, determínese la matriz de φ en esta base.

Ejercicio 33 La matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ define una forma bilineal φ_P en $\mathbb{R}^3$ con la base canónica.

a) Determinar cuál es el polinomio asociado de segundo grado del vector $\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3)$ de la forma cuadrática asociadas w_P

b) Determinar la forma polar.

c) Si $\mathbf{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es una nueva base tal que sus coordenadas en la base canónica son $u_1 = (1, -1, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1)$ y $u_3 = (-1, 2, 0)$, determinar la matriz de φ_P en la base $\mathbf{B}$.

d) Encontrar la forma polar de w_P en la base $\mathbf{B}$.

Ejercicio 34 Determínense los valores de λ para los que la forma cuadrática

$$w(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4\lambda x_2x_3$$

es definida positiva.

Ejercicio 35 Sea $\mathbb{P}_k$ el espacio vectorial de los polinomios de grado igual o menor a k. Consideramos la aplicación $F : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_1$ que a cada polinomio $\mathbf{p} = ax^2 + bx + c$ le hace corresponder el polinomio

$$F(\mathbf{p}) = bx + a.$$

Se pide:

(i) Demostrar que F es una aplicación lineal.

(ii) Hallar la matriz asociada de F con respecto de la bases

$$\begin{array}{l} \mathbf{A} = \{\mathbf{p}_1(x) = -1, \mathbf{p}_2(x) = x - 1, \mathbf{p}_3(x) = (x+3)^2\}, \\ \mathbf{B} = \{\mathbf{q}_1(x) = -x, \mathbf{q}_2(x) = 2\}. \end{array}$$

Ejercicio 36 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Estudiar si es diagonalizable. En caso afirmativo encontrar la matriz diagonal D y la base a la que está referida.

(ii) Calcule razonadamente la matriz potencia A^{11}. (Notación: $A^n = A \times A^{n-1}$ para todo $n = 2, 3, ...$)

Ejercicio 37 Sea $\mathbb{P}_2$ el espacio vectorial de los polinomios de grado igual o menor a 2

$$\mathbf{p}(x) = ax^2 + bx + c.$$

Consideramos el siguientes subconjunto

$$\mathbf{A} = \left\{ \mathbf{p}_1(x) = x^2 + x + 1,\ \mathbf{p}_2(x) = 1,\ \mathbf{p}_3(x) = 1 - x \right\}$$

Sea asimismo $\varphi : \mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}$ la aplicación definida por

$$\varphi(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int_0^1 \mathbf{p}(x)\mathbf{q}(x)x dx \text{ para todo } \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{P}_2.$$

Responda razonadamente a las siguientes preguntas:

(i) Demuestre que $\mathbf{A}$ es una base de $\mathbb{P}_2$.

(ii) Demuestre que φ es una aplicación bilineal simétrica.

(iii) Señale la matriz de φ con respecto de la base $\mathbf{A}$.

SOLUCIONES

Solución 1 Si $f\colon E \to V$ es lineal debe cumplirse que para todo x, $y \in E$ y α, $\beta \in \mathbb{R}$:

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

La aplicación f definida en A) no cumple la propiedad de linealidad como es sencillo comprobar ya que

$$f((a,b)+(c,d)) \neq f(a,b) + f(c,d).$$

En efecto, tomemos $(a,b) = (1,0)$, $(c,d) = (-1,0)$, entonces

$$\begin{array}{l} f(a,b) = f(1,0) = (1^2+0, 1-0) = (1,1) \\ f(c,d) = f(-1,0) = ((-1)^2+0, -1-0) = (1,-1) \\ f((a,b)+(c,d)) = f((1,0)+(-1,0)) = f(0,0) = (0,0) \end{array}$$

Por tanto

$$f((1,0)+(-1,0)) = f(0,0) = (0,0) \neq (2,0) = (1,1)+(1,-1) = f((1,0)) + f(-1,0)$$

y por tanto la función no es lineal.
La aplicación g tampoco es lineal porque el determinante de la suma de dos matrices no es la suma de los determinantes de los sumandos, es decir, $g(A+B) \neq g(A) + g(B)$.
Ninguna es lineal.

Solución 2 a) Sean $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$ cualesquiera. Operando

$$\begin{array}{rcl} f(\mathbf{v}+\mathbf{w}) & = & f(v_1+w_1, v_2+w_2, v_3+w_3) = \\ & = & ((v_2+w_2)+(v_3+w_3), (v_3+w_3)-(v_1+w_1), (v_1+w_1)+2(v_2+w_2)) \\ & = & ((v_2+v_3)+(w_2+w_3), v_3-v_1+(w_3-w_1), (v_1+2v_2)+(w_1+2w_2)) \\ & = & (v_2+v_3, v_3-v_1, v_1+2v_2)+(w_2+w_3, w_3-w_1, w_1+2w_2) \\ & = & f(\mathbf{v})+f(\mathbf{w}) \end{array}$$

$$\begin{aligned}
f(\lambda\mathbf{v}) &= f(\lambda(v_1,v_2,v_3)) = f(\lambda v_1,\lambda v_2,\lambda v_3)\\
&= (\lambda v_2+\lambda v_3,\lambda v_3-\lambda v_1,\lambda v_1+2\lambda v_2)\\
&= (\lambda(v_2+v_3),\lambda\left(v_3-v_1\right),\lambda\left(v_1+2v_2\right))\\
&= \lambda(v_2+v_3,v_3-v_1,v_1+2v_2)\\
&= \lambda f(\mathbf{v})
\end{aligned}$$

Por tanto la aplicación es lineal.

b) Utilizamos notación matricial. Denotando $X^T=(x_1\ x_2\ x_3)^T$, $Y^T=(y_1\ y_2\ y_3)$ los vector de coordenadas del $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$ y de vector imagen $\mathbf{y}=f(v)=(y_1,y_2,y_3)$, basta ver que

$$Y=\begin{pmatrix} x_2+x_3\\ x_3-x_1\\ x_1+2x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=AX$$

Luego

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

es la matriz que define a la aplicación lineal.

Solución 3 T_1 no es una aplicación lineal por el término cuadrático de la primera coordenada. De hecho se puede comprobar fácilmente, tomando el vector $v_1=(1,0,0)$ y el escalar $\lambda=2$ entonces $\lambda v_1=(2,0,0)$ pero

$$T(\lambda\mathbf{v}_1)=T(2,0,0)=(4,2,2,0)\neq(2,2,2,0)=2(1,1,1,0)=\lambda T(\mathbf{v}_1)$$

lo que viola la definición de aplicacion lineal (véase p. 74).

T_2,T_3 son claramente lineales ya que las funciones coordenadas de la función imagen $f(x_1,x_2,x_3)$ son combinaciones lineales de las coordenadas (x_1,x_2,x_3) del vector origen. De hecho si utilizamos la notación matricial podemos obtener de una manera natural la matriz asociada lo que prueba que efectivamente son aplicaciones lineales. Denotamos por $X^T = (x_1\ x_2\ x_3)^T$, $Y^T = (y_1\ y_2\ y_3\ y_4)$ los vectores de coordenadas de un vector genérico $v = (x_1, x_2, x_3)$ y de su vector imagen $y = f(v) = (y_1\ y_2\ y_3\ y_4)$ Para la aplicación lineal T_2 basta ver que

$$Y = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A_2 X$$

en donde

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

es la matriz asociada a la aplicación T_2. Del mismo modo para la aplicación T_3 se tiene

$$Y = \begin{pmatrix} -x_3 \\ x_2 - x_1 + x_3 \\ x_2 - x_1 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A_3 X$$

en donde

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

es la matriz asociada a la aplicación T_3.

Solución 4 Como $f(1,0) = 1 - x$ y $f(0,1) = 1$, por ser f lineal,

$$f(a,b) = f(a(1,0) + b(0,1)) = af(1,0) + bf(0,1) = a(1-x) + b(1) = a - ax + b = -ax + a + b.$$

Luego,

$$\mathrm{Ker}(f) = \{(a,b)\colon f(a,b) = 0\} = \{(a,b)\colon f(a,b) = -ax + a + b = 0\} = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2\colon a = 0,\ a+b = 0\} = \{(0,0)\}$$

y

$$\mathrm{Dim}\,\mathrm{Ker}(f) = ,0$$

Por otro lado, es claro que, por ser $(1,0)$ y $(0,1)$ una base de $\mathbb{R}^2$ resulta que: $\mathrm{Im}(f) = G[f(1,0), f(0,1)] = G[1-x, 1]$. Como $\{1-x, 1\}$ es una base de E, se tiene que $\mathrm{Im}(f) = E$ y $\mathrm{Dim}\,\mathrm{Im}(f) = 2$ (lo cual ya sabíamos). *Nótese que* $\mathrm{Dim}\,\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Dim}\,\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Dim}\,\mathbb{R}^2$.

Solución 5 Denotamos $X^T = (x_1\ x_2\ x_3)$, $Y^T = (y_1\ y_2\ y_3\ y_4)$ los vectores de coordenadas del vector $v = (x_1, x_2, x_3) = x_1u_1 + ... + x_3u_3$ y de su vector imagen $f(v) = (y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1w_1 + ... + y_4w_4$. Sabemos que

$$Y = AX$$

en donde A, la matriz de la aplicación tiene como columnas las coordenadas de la imágenes de la base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ con respecto de $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$. Como $f(u_1) = 2w_1 - w_2 - 3w_3$ el vector columna correspondiente es $(2\ {-1}\ {-3}\ 0)^T$ que será el primer vector columna de la matriz A. De igual manera como $f(u_2) = -w_1 + w_2 - w_3 + w_4$ el vector de coordenadas $(-1\ 1\ {-1}\ 1)^T$ será el segundo vector columna y como $f(u_3) = w_2 + w_4$ entonces $(0\ 1\ 0\ 1)^T$ será el tercer vector columna. Luego

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $Ker\ f = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : AX = 0 \right\}$.

Luego se trata de resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como coinciden los rangos de la matriz A y de su ampliada ampliada y además coincide con la dimensión del espacio

$$\text{rango}\, A = \text{ rango}\, A^* = 3 = \dim \mathbb{R}^3$$

el sistema es compatible determinado por el Teorema de Rouché-Frobenius y tiene al vector $0 = (0,0,0)$ como única solución. Luego $Ker\, f = \{0\}$ se reduce al subespacio nulo y no tiene por tanto base.

c) Las ecuaciones paramétricas de f son las imágenes de la aplicación

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

es decir

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 - \lambda_2 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ -3\lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_2 + \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Luego como hemos visto en el libro el subespacio $Im\, f$ no es más que es el sistema generado por los vectores columna de A. Como la dimensión del espacio es 4 y el rango de los sistema, rango de A, es 3 solamente habrá una ecuación implícita. Se puede hallar dicha ecuación a través de eliminar directamente los parámetros manipulando las ecuaciones paramétricas. Otra manera más sistemática de hacerlo es mediante eliminación Gaussiana (véase ejercicios de autoevaluación del capítulo anterior). Como el rango de A es 3 y el número de filas es 4 podemos hacer ceros todos los elementos de una fila mediante eliminación Gausssiana. De hecho partiendo del sistema

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

si multiplicamos la primera fila por $1/2$ obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{pmatrix} y_1/2 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Sumando la primera fila a la segunda, y de igual modo la primera fila multiplicada por el factor 3 a la tercera fila se tiene el sistema equivalente

$$\begin{pmatrix} \frac{y_1}{2} \\ y_2 + \frac{y_1}{2} \\ y_3 + \frac{3y_1}{2} \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & -5/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Sumándole a la cuarta fila la tercera multiplicando la tercera fila por el factor $2/5$ se obtiene el sistema equivalente

$$\begin{pmatrix} \frac{y_1}{2} \\ y_2 + \frac{y_1}{2} \\ y_3 + \frac{3y_1}{2} \\ y_4 + \frac{2}{5}(y_3 + \frac{3y_1}{2}) = \frac{3}{5}y_1 + \frac{2}{5}y_3 + y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & -5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

De igual manera restando a la cuarta fila la segunda fila tenemos

$$\begin{pmatrix} \frac{y_1}{2} \\ y_2 + \frac{y_1}{2} - \left[\frac{3}{5}y_1 + \frac{2}{5}y_3 + y_4\right] = -\frac{1}{10}y_1 + y_2 - \frac{2}{5}y_3 - y_4 \\ y_3 + \frac{3y_1}{2} \\ y_4 + \frac{2}{5}(y_3 + \frac{3y_1}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Finalmente sumándole a la tercera fila la segunda multiplicada por el factor 5 obtenemos

$$\begin{pmatrix} \frac{y_1}{2} \\ -\frac{1}{10}y_1 + y_2 - \frac{2}{5}y_3 - y_4 \\ y_3 + \frac{3y_1}{2} + 5(-\frac{1}{10}y_1 + y_2 - \frac{2}{5}y_3 - y_4) = y_1 + 5y_2 - y_3 - 5y_4 \\ y_4 + \frac{2}{5}(y_3 + \frac{3y_1}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Luego

$$\begin{aligned} \frac{y_1}{2} &= \lambda_1 - \frac{\lambda_2}{2} \\ -\frac{1}{10}y_1 + y_2 - \frac{2}{5}y_3 - y_4 &= \frac{\lambda_2}{2} \\ y_1 + 5y_2 - y_3 - 5y_4 &= 0 \\ y_4 + \frac{2}{5}(y_3 + \frac{3y_1}{2}) &= \lambda_3 \end{aligned}$$

y es precisamente la tercera igualdad, asociada a fila con todos cero, la ecuación implícita buscada

$$y_1 + 5y_2 - y_3 - 5y_4 = 0$$

Compruébese que de hecho como

$$(y_1, y_2, y_3, y_4) = (2\lambda_1 - \lambda_2, -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, -3\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 + \lambda_3)$$

se tiene que

$$2\lambda_1 - \lambda_2 + 5(-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - (-3\lambda_1 - \lambda_2) - 5(\lambda_2 + \lambda_3) = 0$$

Por el teorema de la dimensión $\dim V$=dimKer$f + \dim\ Im\, f$, y como en este caso $\dim V = 3$, dim $Ker\, f = 0$ entonces necesariamente dim $Im\, f = 3$. Luego para hallar una base de $Im\, f$ basta hallar tres vectores de $Im\, f$ que sean linealmente independientes. Los vectores columna de A constituyen dicha base ya que son linealmente independientes y por definición generan $Im\, f$ (véase a este respecto página 77 del libro texto).

Solución 6 a) Denotamos $X^T = (x_1\ x_2\ x_3)^T$, $Y^T = (y_1\ y_2)$ los vectores de coordenadas del vector $v = (x_1, x_2, x_3)$ y del vector imagen $y = f(v) = (y_1, y_2)$. Luego $v = x_1(1,0,0)+\ x_2(0,1,0)+\ x_3(0,0,1)$ por la linealidad de f

$$\begin{aligned} f(v) &= x_1 f(1,0,0) + x_2 f(0,1,0) + x_3(0,0,1) \\ &= x_1(2,1) + x_2(0,-1) + x_3(-1,1) \\ &= (2x_1 - x_3, x_1 - x_2 + x_3) \end{aligned}$$

Luego

$$(y_1, y_2) = (2x_1 - x_3, x_1 - x_2 + x_3$$

Matricialmente

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

b) Como

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

entonces $f(-1,2,1) = (-3,-2)$.

c) Hay que buscar un vector $w = (w_1, w_2, w_3) \in R^3$ verificando $f(w_1, w_2, w_3) = (1, -3)$. Matricialmente es equivalente a resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Es un sistema lineal compatible indeterminado con un parámetro, su conjunto de soluciones viene dado por

$$S = \{(\lambda, 3\lambda + 2, 2\lambda - 1) = \{(0, 2, -1) + \lambda(1, 3, 2) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Como $(0, 2, -1)$ es una solución, el vector con coordenadas $w = (0, 2, -1)$ verifica la ecuación pedida. De hecho compruébese que

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

S no es un subespacio vectorial. Por ejemplo el vector $0 = (0, 0, 0)$ no verifica (**??**), recordemos que el vector nulo pertenece a cualquier subespacio vectorial.

d) $Ker\, f = \{v \in E : f(v) = 0\}$. Matricialmente denotando $V = (v_1\ v_2\ v_3)^T$ las coordenadas de $v = (v_1, v_2, v_3)$, entonces

$$\operatorname{Ker} f = \left\{ V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : AX = 0 \right\}$$

Luego se trata de resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es un sistema lineal compatible determinado cuyo conjunto de soluciones viene dado por $\{(\lambda, \lambda 3, 2\lambda) : \lambda \in R\}$. Luego

$$\operatorname{Ker} f = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Deducimos asimismo de la expresión anterior que una base de $\operatorname{Ker} f$ está formada por el vector $v = (1, 3, 2)$, luego $\operatorname{Ker} f$ es un espacio de dimensión 1.

e) Por definición $\operatorname{Im} f = f(V)$, luego la imagen de una base del espacio de salida V constituye un sistema generador del subespacio $Im\, f$. En este caso el sistema

$$T = \{f(1, 0, 0), f(0, 1, 0), f(1, 0, 0)\} = \{(2, 1), (0, -1), (-1, 1)\}$$

constituye un sistema generador de $\operatorname{Im} f$ por ser la imagen de la base canónica. Luego hay que encontrar un subconjunto T de vectores linealmente independiente. En este caso es secillo que el rango del sistema es 2, ya que no puede ser tres porque llegaríamos al absurdo de que la dimensión de la imagen es mayor que el espacio $\mathbb{R}^2$ en donde está contenido. Por otro lado los dos primero vectores son claramente linealmente independientes. Por tanto $\{(2, 1), (0, -1)\}$ constituye un posible base de $\operatorname{Im} f$ que tiene por tanto dimensión 2.

Solución 7 El determinante de la aplicación, fijadas ambas bases, es el determinante de la matriz asociada. La matriz asociada respecto de la base canónica $\mathbf{A} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ es directamente

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ya que

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

en donde $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = (y_1, y_2)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ son las coordenadas de un vector genérico $\mathbf{x}$ y su imagen $f(\mathbf{x})$. En vectores columnas $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ esto se expresa como

$$Y = PX \tag{9}$$

en donde $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. La matriz de cambio de la base $\mathbf{B} = \{(1, 2), (1, 0)\}$ a la base canónica $\mathbf{A} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ viene dada por la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

en donde recordemos que su columnas no son más que las coordenadas de la base **B** respecto de la base **A** (véase p. 63 libro de texto) . Luego en general si denotamos por X' el vector columnas las coordenadas de **x** respecto de **B**

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} X' \tag{10}$$

y de igual manera para los vectores de coordenadas de la imagen

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} Y' \tag{11}$$

Sustituyendo (**??**), (**??**) en (**??**) tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} Y' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} X'$$

luego

$$Y' = X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} X'$$

Por tanto la matriz de cambio de base es

$$P' = B^{-1} P B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

y su determinante es el producto

$$|P'| = \frac{1}{|B|} |P| \, |B| = |P| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

De hecho esto prueba que el determinante de la matriz asociada es el mismo para cualquier referencia y por tanto cabe hablar de determinante de la aplicación.

Solución 8 En primer lugar el rango de P es 2 ya que como mucho puede ser 2 y encontramos una submatriz de dicho orden con determinante no nulo

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Denotemos la base $A = \{(1,0,-1),(0,1,1),(-1,1,-1)\} = \{v_1, v_2, v_3\}$ y la base canónica $B = \{(1,0),(0,1)\} = \{w_1, w_2\}$. Asimismo denotemos por $X^T = (x_1\ x_2\ x_3)$ las coordenadas respecto de la base A de un vector $v = \sum_{i=1}^{3} x_i v_i$ y por $Y = (y_1\ y_2)^T$ las coordenadas respecto del vector imagen $f(v)$ de la base canónica $f(v) = \sum_{i=1}^{2} y_i w_i$. Por hipótesis

$$Y = PX$$

Si denotamos ahora por $X'^T = (x'_1\ x'_2\ x'_3)$ las coordenadas con respecto de la base A' sabemos que $X' = AX$ y por tanto

$$X = A^{-1}X' \tag{12}$$

en donde A es la matriz de cambio de base. Dicha matriz la podemos calcular directamente como un producto de matrices (véase ejercicio 9 de la autoevaluación del capítulo anterior)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

luego

$$
\begin{aligned}
A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Del mismo por $Y'^T = (y_1' \; y_2')$ las coordenadas con respecto de la base B' sabemos que

$$Y' = BY \tag{13}$$

en donde B es la matriz de cambio de base B a B'

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

Por tanto de (**??**), (**??**)

$$B^{-1}Y^{'} = PA^{-1}X \;\Rightarrow Y^{'} = BPA^{-1}X'$$

Luego la matriz Q asociada las bases A' y B' está dada por

$$
\begin{aligned}
Q &= BPA^{-1} = \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{2}{7} & -\frac{5}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{5}{7} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Compruébese que por ejemplo el vector de R^3 que tiene a $X^T = (1,0,0)$ (coordenadas respecto de la base A) y cuyo vector imagen tiene como coordenadas con respecto a la base canónica al vector

$$PX = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Con respecto de la base B' el vector imagen tiene que tener el siguiente vector de coordenadas

$$QX' = \begin{pmatrix} -\frac{2}{7} & -\frac{5}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{5}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

en donde $X' = (3\ 0\ 1)$ son las correspondientes coordenadas de dicho vector respecto de A'. Dicho vectores son iguales ya que si pasamos esta últimas coordenadas a la base canónica

$$-\frac{5}{7}(-2,1) + \frac{4}{7}(1,3) = (2,1)$$

éstas coinciden.

Por otro lado de igual forma que P la matriz Q su rango es 2 ya que encontramos una submatriz de dicho orden con determinante no nulo, en este caso

$$\begin{vmatrix} -\frac{2}{7} & -\frac{5}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{3}{7} \end{vmatrix} = \frac{3}{7}$$

Solución 9 Tal como dijimos en el ejercicio anterior, la matriz asociada de la aplicación tiene como columnas las coordenadas de las imágenes de los vectores de la base de la imagen del espacio de salida con los del espacio imagen (véase p. 79 libro de texto). En este caso la base es coincidente en el espacio de salida e imagen, y además por ser un aplicación lineal entre espacios de dimensión 3 la matriz asociada será de orden 3. Luego la primera columa será las coordenadas de la imagen del vector $f(\mathbf{p}_0)$ con respecto de

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{p}_0(x) = 1,\ \mathbf{p}_1(x) = x,\ \mathbf{p}_2(x) = x^2\}$$

Como
$$f(\mathbf{p}_0) = f(1) = 1(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 = \mathbf{p}_2(x) - 2\mathbf{p}_1(x) + 1\mathbf{p}_0(x)$$
se tiene que la primera columna de la matriz viene dada por el vector
$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
De la misma manera
$$f(\mathbf{p}_1) = f(x) = 1(x-1) = x - 1 = \mathbf{p}_1(x) - \mathbf{p}_0(x)$$
y la segunda columna viene dada por
$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
Finalmente
$$f(p_2) = f(x^2) = 1 = \mathbf{p}_0(x)$$
y la tercera columna viene dada por
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
Luego la matriz asociada viene dada por
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Compruebe que por ejemplo si consideramos polinomio $\widehat{\mathbf{p}} = x^2 + x + 1$ con vector de coordenas $\widehat{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ respecto de la base A y se tiene que su polinomio imagen

$$f(\widehat{\mathbf{p}}) = (x-1)^2 + (x-1) + 1 = x^2 - x + 1$$

tiene como vector de coordenas $\widehat{Y} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T$ con respecto de la misma base. Y que efectivamente se verifica

y que

$$\widehat{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución 10 La opción A) es falsa porque un sistema de ecuaciones puede no tener solución, en este caso sería un sistema incompatible. La solución del sistema $AX = B$ representa el original del vector $(b_1, \ldots, b_n)$. Luego la opción C) es cierta. La opción B) es falsa porque B no tiene porque ser el vector columna 0, es decir, el sistema no tiene por qué ser homogéneo.

Solución 11 Denotemos

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico viene dado por

$$p(\lambda) = |P - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3$$

Dicho polinomio tiene $\lambda_1 = 1$ como raíz de multiplicidad 3. Las ecuaciones del espacio E_1 asociado al autovalor son

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Luego el subespacio asociado al autovalor $\lambda_1 = 1$ es

$$E_1 = \{(x_1, 0, x_3) : x_1, x_3 \in R\}$$

Claramente es el subespacio generado por los vectores $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 0, 1)$

$$\mathbb{E}_1 = G[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$$

y por tanto es un subespacio de dimensión 2. La matriz no es diagonalizable ya que la dimensión de dicho subespacio, 2 en este caso, no coincide con la multiplicidad de la ráiz del autovalor que es 3.

Solución 12 (i), (ii). Como el espacio es de dimensión 4 denotemos por $X^T = (x_1\ x_2\ x_3\ x_4)$, $Y^T = (y_1\ y_2\ y_3\ y_4)$ los vectores de coordenadas de un vector (o matriz) genérica v y de su vector imagen $y = f(v) = (y_1\ y_2\ y_3\ y_4)$ respecto de la base A. Eso quiere decir que

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y respectivamente

$$f(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$$

Por otro lado la matriz asociada a la aplicación viene dada por

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para el caso particular $\widehat{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ que tiene como vector de coordenadas $\widehat{X}^T = \begin{pmatrix} 2 & 12 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ se tiene que su imagen

$f(\widehat{\mathbf{v}})$ tiene como coordenadas al vector

$$\begin{pmatrix} \widehat{y}_1 \\ \widehat{y}_2 \\ \widehat{y}_3 \\ \widehat{y}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 0 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Luego en notación matricial se corresponde con lo siguiente

$$f\left(\begin{pmatrix} 2 & 12 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 12 & 12 \\ 0 & -11 \end{pmatrix}$$

(iii) En este caso tenemos la base

$$\mathbf{B} = \left\{\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\},$$

Como

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= -\mathbf{v}_2 \\ \mathbf{w}_2 &= -\mathbf{v}_1 \\ \mathbf{w}_3 &= \mathbf{v}_4 \\ \mathbf{w}_1 &= -\mathbf{v}_3 \end{aligned}$$

La matriz de cambio de la base B a la base A viene dada por la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(recuérdese del capítulo anterior la matriz de cambio de base es aquella que tiene como columnas las coordenas de los elementos de la base B con respecto de la base A, véase p. 63 libro texto). Por tanto la matriz de cambio de base de la base A a la base B es su inversa que denotamos por

$$A = B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Denotando en este caso por $X'^T = (x'_1\ x'_2\ x'_3\ x'_4)$, $Y'^T = (y'_1\ y'_2\ y'_3\ y'_4)$ los vectores de coordenadas del un vector (o matríz) genérica v y de su vector imagen $y = f(v) = (y_1\ y_2\ y_3\ y_4)$ respecto de la base B. Por un lado sabemos que la aplicación lineal viene dada como

$$Y = PX \tag{14}$$

y por otro por el cambio de base

$$Y = BY',\ X = BX' \tag{15}$$

Luego de (**??**) y (**??**) se tiene

$$BY' = PBX'$$

y por tanto

$$Y = B^{-1}PBX' = APBX'$$

Luego la matriz asociada vendrá dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo el vector $\widehat{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ tiene como vector de coordenadas

$$X'^{T} = \begin{pmatrix} -12 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

con respecto de la base B y por tanto la coordenadas de su imagen $f(\widehat{\mathbf{v}})$ con respecto de la base B vendrán dadas por

$$\begin{pmatrix} -12 \\ -12 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -12 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -12 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que se corresponde con la matriz

$$-12\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 12\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 11\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 12 \\ 0 & -11 \end{pmatrix}$$

tal como vimos en el apartado anterior.

(iv) En este caso tendríamos que

$$Y' = APX$$

luego la matriz asociada en dicha referencia sería

$$AP = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para el mismo ejemplo de la matriz

$$\widehat{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

se tiene que la aplicación de la matriz a las coordenadas de $\widehat{\mathbf{v}}$ con respecto de A nos devuelve las coordenadas de su imagen con respecto de B ya que

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -12 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tal como hemos visto en los apartado anteriores.

(v) Partimos del subespacio

$$\mathbf{V}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ b & a \end{pmatrix} : a,\, b \in \mathbf{R} \right\}$$

e utilizaremos siempre coordenadas con respecto de la base A. Por definición

$$f(\mathbb{V}_1) = \{f(\mathbf{v}_1) : \mathbf{v}_1 \in \mathbf{V}_1\}$$

Luego como

$$\begin{pmatrix} a & a \\ b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El subespacio está generado por el sistema

$$\left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(de hecho es una base por ser vectores linealmente independientes) y por tanto un sistema generador de $f(V_1)$ está dado por la imagen de dichas matrices (véase p. 77 libro de texto). En coordenadas con respecto de la base A se corresponde con el sistema generado por los vectores $w_1 = f(v_1)$, $w_2 = f(v_2)$ de coordenadas

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

y

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

respectivamente con respecto de la base A. Los vectores w_1,w_2 son claramente linealmente independientes y por tanto constituyen un base del espacio imagen $f(V_1)$ que tiene por tanto dimensión 2. Las coordenadas paramétricas viene dadas por

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 \\ 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Como estamos en un espacio de dimensión 4, y el subsespacio $f(V_1)$ tiene dimensión 2 debemos buscar dos ecuaciones implícitas. Se obtiene facilmente despejando los parámetros en la ecuaciones parámetricas (véase capítulo anterior)

$$\begin{aligned} y_3 &= 0, \\ y_1 - y_2 &= 0 \end{aligned}$$

Para que la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

pertenezca al subespacio $f(V_1)$ debe verificar las ecuaciones implícitas que caracterizan al mismo. Pero en este caso se ve que claramente no las cumplen ya que $y_3 = 1 \neq 0$

Solución 13 Sabemos que f es lineal y conocemos las imágenes de $(1,1)$ y $(2,-1)$, basta con escribir $(3,-1)$ como combinación lineal de $(1,1)$ y $(2,-1)$, si es posible, para calcular $f(3,-1)$. Si se resuelve el sistema que resulta de: $(3,-1) = \alpha(1,1) + \beta(2,-1)$ resulta $\alpha = \frac{1}{3}$ y $\beta = \frac{4}{3}$ luego $f(3,-1) = \frac{1}{3}f(1,1) + \frac{4}{3}f(2,-1) = \frac{1}{3}(1,4) + \frac{4}{3}(-2,3) = (\frac{-7}{3}, \frac{16}{3})$.

Solución 14 En este caso el polinomio característico viene dado por

$$\begin{aligned}
p(\lambda) &= |P-\lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)^3 - 4(2-\lambda) = (2-\lambda)((2-\lambda)^2-4) \\
&= (2-\lambda)(-4\lambda+\lambda^2)
\end{aligned}$$

cuyas raíces $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 4$ son los autovalores. Por tener tres autovalores distinto la matriz es diagonalizable por el teorema de caracterización. Calculemos los subespacios asociados.

El subespacio asociado $\mathbb{E}_1 = \{X \in \mathbb{R}^{3\times 1} : (P-2I)X = 0\}$ al autovalor $\lambda_1 = 2$ está determinado por la ecuación

$$\begin{aligned}
(P-2I)X &= 0 \Leftrightarrow \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Este último sistema es un sistema compatible indeterminado con un parámetro cuyo conjunto de soluciones viene dado por $\{(0,\alpha,0) = \alpha(0,1,0) : \alpha \in \mathbb{R}\}$, luego

$$\mathbb{E}_1 = G[(0,1,0)]$$

y por tanto $v_1 = (0,1,0)$ es un autovector asociado.

El subespacio asociado $\mathbb{E}_2 = \{X \in \mathbb{R}^{3\times 1} : (P-0I)X = 0\}$ al autovalor $\lambda_2 = 0$ está determinado por la ecuación

$$\begin{aligned}
(P-0I)X &= 0 \Leftrightarrow \\
\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Este sistema es también un sistema compatible indeterminado con un parámetro cuya conjunto de soluciones viene dado por $\{(\alpha, -\alpha, \alpha) = \alpha(1, -1, 1) : \alpha \in \mathbb{R}\}$, luego

$$\mathbb{E}_2 = G[(1, -1, 1)]$$

y por tanto $v_1 = (1, -1, 1)$ es un autovector asociado.

El subespacio asociado $\mathbb{E}_3 = \{X \in \mathbb{R}^{3\times 1} : (P - 4I)X = 0\}$ al autovalor $\lambda_3 = 4$ está determinado por la ecuación

$$\begin{aligned} (P - 4I)X &= 0 \Leftrightarrow \\ \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es un sistema compatible indeterminado con un parámetro cuya conjunto de soluciones viene dado por $\{(-\alpha, 0, \alpha) = \alpha(-1, 0, 1) : \alpha \in \mathbb{R}\}$, luego

$$\mathbb{E}_3 = G[(-1, 0, 1)]$$

y por tanto $v_1 = (-1, 0, 1)$ es un autovector asociado.

Luego la base de autovectores es $\mathbf{B} = \{(0, 1, 0), (1, -1, 1), (-1, 0, 1)\}$ y la matriz de paso correspondiente, matriz de cambio de base de $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$, es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

luego su matriz diagonal asociada es $D = APA^{-1}$, es decir

$$\begin{aligned} D &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Solución 15 En este caso el polinomio característico viene dado por

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= |A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -2-\lambda & 2 \\ 2 & -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= -\lambda \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -\lambda\left(\lambda^2+2\right) - 1(-2\lambda) \\
&= -\lambda^3
\end{aligned}
$$

cuya raíz $\lambda_1 = 0$ tiene multiplicidad 3. El subespacio asociado

$$\mathbb{E}_1 = \{X \in \mathbb{R}^{3\times 1} : (A-0I)X = 0\}$$

al autovalor $\lambda_1 = 0$ está determinado por la ecuación

$$
\begin{aligned}
(A-0)X &= 0 \Leftrightarrow \\
AX &= 0 \Leftrightarrow \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Recordemos que para que la matriz sea diagonalizable el espacio tiene que tener dimensión igual a la multiplicidad del autovalor, en este caso 3. Esto implicaría que E_1 es todo el espacio R^3 lo que sería solamente posible si A fuese la matriz nula. De hecho como el rango de la matriz del sistema A es 2 por Rouche-Frobenius el sistema es compatible indeterminado con un parámetro, luego el espacio E_1 tiene dimensión 1. Resolviendo el sistema

$$\mathbb{E}_1 = \{((\alpha, 0, -\alpha) = \alpha(0,1,0) : \alpha \in \mathbb{R})\} = G[(1,0,-1)]$$

Por tanto el teorema de caracterización (véase p.99 libro texto) nos asegura que la matriz no es diagonalizable.

Solución 16 Dada una matriz A cuadrada, su ecuación característica es $|A - \lambda I| = 0$.

Las soluciones de la ecuación característica de A son sus valores propios o autovalores. La ecuación característica de A es $|A - \lambda I| = (\lambda - 3)^2(\lambda + 1) = 0$ lo que nos lleva a que los valores propios son $\lambda_1 = 3$ (con multiplicidad doble) y $\lambda_2 = -1$. Sustituyendo los valores propios encontrados se tiene: $|A - 3I| = 0$ y $|A + I| = 0$. Lo que nos lleva a que $|A - 3I| = |A + I| = 0$. Por tanto es correcta la opción B).

Las opciones A) y C) son falsas porque en cada una de ellas un término sí es 0 (el correspondiente al autovalor) y el otro no.

Solución 17 a) El polinomio característico viene dado por

$$p(\lambda) = |P - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 2 + \lambda - \lambda^2 - \lambda^3$$

Razonando graficamente el polinomio tiene una única raíz real que podemos denotar por c. Si dicha raíz tuviese multiplicidad 3 entonces necesariamente

$$p(\lambda) = -(\lambda - c)^3 = -\lambda^3 + 3\lambda^2 c - 3\lambda c + c^3 = 2 + \lambda - \lambda^2 - \lambda^3$$

lo que implicaría el absurdo $c^3 = 2$, $3c = -1$, $-3c = 1$. Luego la raíz no tiene multiplicidad 3 y la matriz no es diagonalizable por el teorema de caracterización.

b) El polinomio característico viene dado por

$$p(\lambda) = |Q - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda + 2$$

Razonando graficamente el polinomio tiene una única raíz real que podemos denotar por c. Si dicha raíz fuese de multiplicidad 3 entonces necesariamente

$$p(\lambda) = -(\lambda - c)^3 = -\lambda^3 + 3\lambda^2 c - 3\lambda c + c^3 = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda + 2$$

lo que implica que $3c = 4$, $-3c = 4$, $c^3 = 2$ que es un absurdo. Luego la raíz no tiene multiplicidad 3 y la matriz no es diagonalizable.

c) El polinomio característico viene dado por

$$p(\lambda) = |H - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 8 \\ 3 & -1-\lambda & 6 \\ -2 & 0 & -5-\lambda \end{vmatrix} = -1 - 3\lambda - 3\lambda^2 - \lambda^3$$

El polinomio $p(\lambda) = -1 - 3\lambda - 3\lambda^2 - \lambda^3$ tiene a $\lambda_1 = -1$ como raíz triple. Luego para que sea diagonalizable su subespacio asociado $E_1 = \{X \in \mathbb{R}^{3\times 1} : (H+I)X = 0\}$ debe tener dimensión 3.

$$(H+I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_3 - 2x_1 = 0$$

$\mathbb{E}_1$, por tanto, está dado por una ecuación implícita en $\mathbb{R}^3$ luego tiene dimensión 2. Luego concluimos que la matriz no es diagonalizable.

Solución 18 Pensando en terminos de la matriz dada en un ejercicio anterior que sabemos no diagonalizable, podemos construir la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cuyo polinomio carateristico viene dado por

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= |B-\lambda I| = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2-\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^{5+5}(-\lambda)(-1)^{4+4}(-\lambda) \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -2-\lambda & 2 \\ 2 & -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{5+1}(-\lambda)(-1)^{4+4}(-\lambda)(-\lambda^3) = -\lambda^5 \end{aligned}$$

Este polinomio tiene a $\lambda_1 = 5$ como raíz con multiplicidad 5. Por el teorema de caracterización para que la matriz fuese diagonalizable necesariamente el espacio asociado al autovalor $\lambda_1 = 5$ tendría que tener dimensión 5 lo que solamente es posible si la matriz B es nula, por tanto dicha matriz no es diagonalizable.

Solución 19 Con las condiciones del problema, tenemos:
$A = P^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P \Rightarrow \det(A) = \det(P^{-1})\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\det P.$
Como $\det(P^{-1}) = \dfrac{1}{\det(P)}$, entonces $\det(A) = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -2.$

Solución 20 Sean $X^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$, $Y^T = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$ lo vectores columnas de coordenadas de un vector v y su imagen $f(v)$ respectivamente con respecto de la base A. Por hipótesis

$$Y = PX$$

Por otro lado denotemos la base canónica $\mathbf{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ y sea $\mathbf{A}$ la matriz de cambio de de la base $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

que nos da las coordenadas $X' = AX$, $Y' = AY$ del vector v y su imagen $f(v)$ respectivamente con respecto de la base canónica $\mathbf{B}$. De todo esto por tanto $Y' = APA^{-1}X'$ con lo que $Q = APA^{-1}$. Como

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

entonces

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 45 & 0 \\ -3 & -11 & 0 \\ -6 & -18 & -2 \end{pmatrix}$$

es la matriz asociada a la aplicacion con respecto a la base canónica.

b) Estudiemos ahora si la matriz Q es diagonalizable. El polinomio característico viene dado por

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= |Q - \lambda I| = \begin{vmatrix} 13-\lambda & 45 & 0 \\ -3 & -11-\lambda & 0 \\ -6 & -18 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= -(2+\lambda) \begin{vmatrix} 13-\lambda & 45 \\ -3 & -11-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(\lambda+2)\left(-8 - 2\lambda + \lambda^2\right) \end{aligned}$$

cuyos autovalores son $\lambda_1 = -2$ con multiplicidad doble y $\lambda_3 = 4$ con multiplicidad simple.

Calculemos los subespacios asociados.

El subespacio asociado $E_1 = \{X \in R^{3\times 1} : (Q + (-2)I)X = 0\}$ al autovalor $\lambda_1 = -2$ está determinado por la ecuación

$$\begin{aligned} (Q+2I)X &= 0 \Leftrightarrow \\ \begin{pmatrix} 15 & 45 & 0 \\ -3 & -9 & 0 \\ -6 & -18 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ \begin{pmatrix} -3 & -9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= 0 \Leftrightarrow \\ -3x_1 - 9x_2 &= 0 \end{aligned}$$

en donde hemos eliminado la primera fila y tercera fila del sistema ya que son combinación de la segunda. Este último sistema es un sistema compatible indeterminado con dos parámetros cuyo conjunto de soluciones viene dado por $\{(-3\beta, \beta, \alpha) = \beta(-3, 1, 0) + \alpha(0, 0, 1) : \alpha, \beta \in R\}$, luego E_1 es el subespacio generado por el sistema $\{(-3, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ que constituye una base del mismo por ser los vectores linealmente independientes

$$\mathbb{E}_1 = G[(-3, 1, 0), (0, 0, 1)]$$

Por tanto $v_1^1 = (-3, 1, 0)$ y $v_1^2 = (0, 0, 1)$ son los autovectores asociados al autovalor $\lambda_1 = -2$.

El subespacio asociado $E_2 = \{X \in R^{3\times 1} : (Q - 4I)X = 0\}$ al autovalor $\lambda_2 = 4$ está determinado por la ecuación

$$\begin{aligned} (Q-4I)X &= 0 \Leftrightarrow \\ \begin{pmatrix} 9 & 45 & 0 \\ -3 & -15 & 0 \\ -6 & -18 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ \begin{pmatrix} -3 & -15 & 0 \\ -6 & -18 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

en donde en el sistema final hemos descartamos la primera fila por ser combinación lineal de la segunda. Es un sistema compatible indeterminado con un parámetro cuyo conjunto de soluciones viene dado por $\{(-5\alpha, \alpha, 2\alpha) = \alpha(-5, 1, 2) : \alpha \in R\}$. E_2 es el subespacio generado por el sistema $\{(-5, 1, 2)\}$

$$\mathbb{E}_2 = G[(-5,1,2)]$$

$v_2 = (-5,1,2)$ es un autovector asociado al autovalor $\lambda_2 = 4.$.

La base de autovectores es $C = \{(-3,1,0),(0,0,1),(-5,1,2)\}$ y la matriz de paso, matriz de cambio de base de B a C es

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

luego su matriz diagonal asociada es $D = AQA^{-1}$. Sean $X^T = (x_{1,}..., x_n)$, $Y^T = (y_1, ..., y_n)$ lo vectores columnas de coordenadas de un vector v y su imagen $f(v)$ respectivamente con respecto de la base A. Por hipótesis

$$Y = PX$$

Por otro lado denotemos la base canónica $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ y sea A la matriz de cambio de base de A a B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

que nos da las coordenadas $X' = AX$, $Y' = AY$ del vector v y su imagen $f(v)$ respectivamente con respecto de la base canónica B. De todo esto por tanto $Y' = APA^{-1}X'$ con lo que $Q = APA^{-1}$. Como

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

entonces

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 45 & 0 \\ -3 & -11 & 0 \\ -6 & -18 & -2 \end{pmatrix}$$

es la matriz asociada a la aplicacion con respecto a la base canónica.

b) Estudiemos ahora si la matriz Q es diagonalizable. El polinomio característico viene dado por

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= |Q-\lambda I| = \begin{vmatrix} 13-\lambda & 45 & 0 \\ -3 & -11-\lambda & 0 \\ -6 & -18 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= -(2+\lambda)\begin{vmatrix} 13-\lambda & 45 \\ -3 & -11-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(\lambda+2)\left(-8-2\lambda+\lambda^2\right) \end{aligned}$$

cuyos autovalores son $\lambda_1 = -2$ con multiplicidad doble y $\lambda_3 = 4$ con multiplicidad simple.

Calculemos los subespacios asociados.

El subespacio asociado $E_1 = \{X \in R^{3\times 1} : (Q+(-2)I)X = 0\}$ al autovalor $\lambda_1 = -2$ está determinado por la ecuación

$$\begin{aligned} (Q+2I)X &= 0 \Leftrightarrow \\ \begin{pmatrix} 15 & 45 & 0 \\ -3 & -9 & 0 \\ -6 & -18 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ \begin{pmatrix} -3 & -9 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= 0 \Leftrightarrow \\ -3x_1 - 9x_2 &= 0 \end{aligned}$$

en donde hemos eliminado la primera fila y tercera fila del sistema ya que son combinación de la segunda. Este último sistema es un sistema compatible indeterminado con dos parámetros cuyo conjunto de soluciones viene dado por

$$\{(-3\beta, \beta, \alpha) = \beta(-3,1,0) + \alpha(0,0,1) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

luego E_1 es el subespacio generado por el sistema $\{(-3,1,0),(0,0,1)\}$ que constituye una base del mismo por ser los vectores linealmente independientes

$$\mathbb{E}_1 = G[(-3,1,0),(0,0,1)]$$

y por tanto $v_1^1 = (-3, 1, 0)$ y $v_1^2 = (0, 0, 1)$ son los autovectores asociados al autovalor $\lambda_1 = -2$.

El subespacio asociado $E_2 = \{X \in R^{3\times 1} : (Q - 4I)X = 0\}$ al autovalor $\lambda_2 = 4$ está determinado por la ecuación

$$\begin{aligned}
(Q-4I)X &= 0 \Leftrightarrow \\
\begin{pmatrix} 9 & 45 & 0 \\ -3 & -15 & 0 \\ -6 & -18 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\
\begin{pmatrix} -3 & -15 & 0 \\ -6 & -18 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

en donde en el sistema final hemos descartamos la primera fila por ser combinación lineal de la segunda. Es un sistema compatible indeterminado con un parámetro cuyo conjunto de soluciones viene dado por

$$\{(-5\alpha, \alpha, 2\alpha) = \alpha(-5, 1, 2) : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

E_2 es el subespacio generado por el sistema $\{(-5, 1, 2)\}$

$$\mathbb{E}_2 = G[(-5, 1, 2)]$$

por tanto $v_2 = (-5, 1, 2)$ es un autovector asociado al autovalor $\lambda_2 = 4$. .

La base de autovectores es $C = \{(-3, 1, 0), (0, 0, 1), (-5, 1, 2)\}$, la matriz de paso, matriz de cambio de base de B a C es

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

luego su matriz diagonal asociada es $D = AQA^{-1}$, es decir

$$\begin{aligned} D &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & 45 & 0 \\ -3 & -11 & 0 \\ -6 & -18 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Solución 21 La Expresión matricial de Q en la base $\mathbf{B}$ es:

$$Q_{\mathbf{B}}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

La matriz P del cambio de la base $\mathbf{B}'$ en la base $\mathbf{B}$ será

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La expresión matricial de Q en la nueva base $\mathbf{B}'$ será

$$\begin{aligned} Q_{\mathbf{B}'}(\bar{x}) &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 \end{aligned}$$

Por tanto la respuesta correcta es la opción C).

Solución 22 (a) La matriz A de la aplicación tiene como columnas las coordenadas de la imágenes de la base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ con respecto de la misma base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$. Directamente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) $\text{Ker } f = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : AX = 0 \right\}$.El sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es compatible indeterminado con un parámetro. De hecho considerando $x_3 = \lambda$ como parámetro, la solucion del sistema viene dada por

$$\text{Ker } f = \{(-\lambda, -\lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

De aquí directamente obtenemos que Ker f tiene dimensión 1 y $\{(-1, -1, 1)\}$ es una base. Como

$$\dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Ker } f = 3 - 1 = 2,$$

necesariamente tiene que haber dos ecuaciones implícitas. De

$$\begin{aligned} x_1 &= -\lambda \\ x_2 &= -\lambda \\ x_3 &= \lambda \end{aligned}$$

sumando las dos primeras ecuaciones y restando la tercera multiplicada por el factor 2 eliminamos el parámetro y obtenemos la primera ecuación implícita

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = -\lambda - \lambda + 2\lambda = 0$$

Del mismo modo restando las dos primeras ecuaciones obtenemos una segunda ecuación implícita linealmente independiente a la anterior

$$x_1 - x_2 = -\lambda - (-\lambda) = 0$$

Luego las ecuaciones implícitas vienen dadas por

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

(c) Por el teorema de la dimensión, $\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim Ker\, f = 3 - 1 = 2$. Las ecuaciones parámetricas viene dadas directamente por

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2 + 2x_3 \\ y_2 &= x_1 - x_2 \\ y_3 &= -x_1 - x_3 \end{aligned}$$

Sumando la dos primeras ecuaciones y la tercera multiplicada por el factor 2 eliminamos parámetros y obtenemos la única ecuación implícita

$$y_1 + y_2 + 2y_3 = x_1 + x_2 + 2x_3 + x_1 - x_2 + 2(-x_1 - x_3) = 0$$

Una base viene dada por dos vectores linealmente independiente que verifiquen la ecuación, por ejemplo

$$\{(1, 1, -1), (2, 0, -1)\}$$

Solución 23 (i) Matricialmente la aplicación lineal se puede expresar como

$$Y = PX = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ -9 & 8 \end{pmatrix} X$$

en donde $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ vectores columna de coordenadas respecto de la base canónica. Denotado por Y', X' la coordenadas respecto de la nueva base $\mathbf{B} = \{(1, -1), (1, 1)\}$ la matriz de cambio de la base $\mathbf{B}$ a la base canónica viene dada por

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

luego

$$Y = BY' \Rightarrow Y' = B^{-1}Y = B^{-1}PX = B^{-1}PBX'$$

y la matriz asociado respecto de la base B viene dada por

$$
\begin{aligned}
B^{-1}PB &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ -9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ -9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -15 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(ii) El polinomio característico viene dado por

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = |A - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} -7-\lambda & 6 \\ -9 & 8-\lambda \end{pmatrix} \right| = \lambda^2 - \lambda - 2$$

y los valores propios las raíces de la ecuació $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$. Por ser diferentes ya sabemos que la matriz es diagonalizable por el teorema de caracterización. Los subespacios propios vienen dados por

- Subespacio propio asociado al autovalor $\lambda_1 = 2$.

$$\mathbb{E}_1 = \left\{ (x_1, x_2) : \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{(x_1, x_2) : -3x_1 + 2x_2 = 0\}$$

  Es claramente de dimensión uno, siendo el vector $\{(2,3)\}$ una posible base.

- Subespacio propio asociado al autovalor $\lambda_2 = -1$.

$$\mathbb{E}_2 = \left\{ (x_1, x_2) : \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -9 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{(x_1, x_2) : x_1 = x_2\}$$

  En este caso también de dimensión 1, siendo el vector $\{(1,1)\}$ otra posible base.

La matriz de paso sería

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

y la matriz diagonal correspondiente

$$D = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ -9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución 24 La matriz viene dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico asociado

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = -(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2$$

cuya raíces son $\lambda_1 = 1$ (doble), $\lambda_2 = 2$

El subespacio vectorial

$$\mathbb{E}_1 = \{X \in \mathbb{R}^3 : (A - I) X = 0\}$$

asociado al autovalor $\lambda_1 = 1$ viene determinado por las ecuaciones

$$\begin{aligned} (A - I) X &= 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad x_3 = x_2 - x_1 \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_1 &= \{(x_1, x_2, -x_1 + x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \{x_1(1, 0, -1) + x_2(0, 1, 1) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= G[(1, 0, -1), (0, 1, 1)]\end{aligned}$$

$\{\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1), \mathbf{v}_2 = (0, 1, 1)\}$ es un sistema linealmente independiente y generador, luego constituye una base de autovectores de $\mathbb{E}_1$.

Por otra parte el subespacio vectorial

$$\mathbb{E}_2 = \{X \in \mathbb{R}^3 : (A - 2I)\, X = 0\}$$

asociado al autovalor $\lambda_2 = 2$ viene dado por

$$\begin{aligned}(A - 2I)\, X &= 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad x_2 - 2x_1 - x_3 = 0, \ \ -x_1 - x_3 = 0,\ x_1 - x_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \ x_2 = x_1,\ x_3 = -x_1\end{aligned}$$

Luego

$$\mathbb{E}_2 = \{(x_1, x_1, -x_1) : x_1 \in \mathbb{R}\} = \{x_1(1, 1, -1) : x_1 \in \mathbb{R}\} = G[(1, 1, -1)]$$

y directamente $\{\mathbf{v}_3 = (1, -1, 1)\}$ es la otra base buscada.

Como la dimensión de los subespacios coincide con la multiplicidad de los autovalores en cada caso por el Teorema de caracterización podemos concluir que la matriz es diagonalizable con una posible base de autovectores dada por

$$\{\mathbf{v}_1 = (1, 0, -1),\ \mathbf{v}_2 = (0, 1, 1),\ \mathbf{v}_3 = (1, 1, -1)\}$$

cuya matriz diagonal asociada es

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

De hecho compruébese que la matriz de paso viene dada por

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

y que

$$D = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución 25 Teniendo en cuenta la definición de aplicación bilineal de la pág. 113 de *Temas de Matemáticas*, solo es bilineal la aplicación definida en B).

Solución 26 Para demostrar que la función es bilineal basta demostrar que es lineal con respecto del primer argumento ya que la función es simétrica, es decir $\varphi(f,g) = \varphi(g,f)$ para todo f, g elementos de $F\,[0,1]$. La linealidad es inmediata (vea Capítulo 7 libro de texto) por la propiedades de la integral. Para todos $f, g,\, h \in F\,[0,1]$, $\lambda, \mu \in R$ se tiene

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda f + \mu g, h) &= \int_0^1 (\lambda f(x) + \mu g(x))\, h(x)dx \\ &= \lambda \int_0^1 f(x)h(x)dx + \mu \int_0^1 g(x)h(x)dx \\ &= \lambda\varphi(f,h) + \mu\varphi(g,h). \end{aligned}$$

Solución 27 (i) Como los polinomios de $\mathbb{P}_2$ son funciones continuas el argumento del ejercicio anterior es valido para probar que la aplicación φ es bilineal. Hallamos directamente la matriz evaluando la aplicación en los elementos de la base **A** siguiendo lo visto en la página 114 del libro de texto

$$
\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_0) &= \varphi(1,1)=\int_0^1 1dx = 1\\
\varphi(\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_1) &= \varphi(1,x)=\int_0^1 1xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{2}\\
\varphi(\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_2) &= \varphi(1,x^2)=\int_0^1 1x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{3}\\
\varphi(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_1) &= \varphi(x,x)=\int_0^1 x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{3}\\
\varphi(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2) &= \varphi(x,x^2)=\int_0^1 x^3dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{4}\\
\varphi(\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_2) &= \varphi(x^2,x^2)=\int_0^1 x^4dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{5}
\end{aligned}
$$

Por tanto la matriz asociada a φ es

$$P=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

Si denotamos por $X^T=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2\end{pmatrix}$, $Y^T=\begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2\end{pmatrix}$ las coordenadas de dos vectores (polinomios) $p=a_0+a_1x+a_2x^2$ y $q=b_0+b_1x+b_2x^2$ respecto de la base A entonces se tiene

$$\varphi(\mathbf{p},\mathbf{q})=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_0\\ b_1\\ b_2\end{pmatrix}$$

(ii) Como la matriz de cambio de la base **B** a **A** (recuerde la matriz que tiene como columnas las coordenadas de la base B

respecto de la base A) es

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces la matriz asociada a φ respecto de la base B viene dada por

$$B^T P B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} & -1 \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{5} & \frac{2}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & 4 \end{pmatrix}$$

Como ejemplo el polinomio $\widehat{\mathbf{p}} = x - 1$ que tiene como vector de coordenadas respecto de la base B el vector

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

por coincidir con el primer elemento de la base. Por otro lado

$$\varphi(\widehat{\mathbf{p}}, \widehat{\mathbf{p}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} & -1 \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{5} & \frac{2}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}$$

Lo que coincide si los calculamos directamente

$$\varphi(1 - x, 1 - x) = \int_0^1 (1 - x)(1 - x)dx = \frac{1}{3}$$

Solución 28 (i) Denotando los elementos de la base $\mathbf{A} = \{\mathbf{u}_1 = (1,0,0), \mathbf{u}_2 = (0,1,0), \mathbf{u}_3 = (0,0,1)\}$. Como

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_1) &= \varphi((1,0,0),(1,0,0)) = 1\\
\varphi(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) &= \varphi((1,0,0),(0,1,0)) = 0\\
\varphi(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_3) &= \varphi((1,0,0),(0,0,1)) = 0\\
\varphi(\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_2) &= \varphi((0,1,0),(0,1,0)) = 2\\
\varphi(\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3) &= \varphi((0,1,0),(0,0,1)) = 0\\
\varphi(\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_3) &= \varphi((0,0,1),(0,0,1)) = 3
\end{aligned}$$

Por tanto la matriz asociada a la aplicación es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(ii) La matriz de cambio de la base $\mathbf{B}$ a la base $\mathbf{A}$ es

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto la matriz asociada a φ respecto de la base $\mathbf{B}$ viene dada por

$$B^T P B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1\\ 2 & 5 & -2\\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Como ejemplo el vector

$$\widehat{\mathbf{v}} = (1,1,0) + (0,1,1) + (1,-1,0) = (2,1,1)$$

tiene como vector de coordenadas respecto de la base **B**

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\varphi(\widehat{\mathbf{v}}, \widehat{\mathbf{v}}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 9$$

lo que coincide si calculamos directamente

$$\varphi((2,1,1),(2,1,1)) = 4 + 2 + 3 = 9$$

Solución 29 Es inmediato que

$$\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

(en donde $X^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$, $Y^T = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$ denotan en este caso las coordenadas de los vectores v, w respecto de la base B) es una forma bilineal tal que $w(v) = \varphi(v, v)$.

Solución 30 a) Por definición

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) & \varphi(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) & \varphi(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3) \\ \varphi(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1) & \varphi(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2) & \varphi(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) \\ \varphi(\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1) & \varphi(\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_2) & \varphi(\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & 1-4 & 1-6 \\ 2-2 & 2-4 & 2-6 \\ 3-2 & 3-4 & 3-6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como las coordenadas de los vectores v y w respecto de la base son respectivamente $X^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $Y^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ entonces

$$\varphi(v,w) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 9$$

b) El determinante de la matriz asociada

$$\begin{vmatrix} -1 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

es 0 y por tanto la matriz no tiene rango 3(de hecho el rango es 2), luego la matriz es degenerada. Además como no coincide con su traspuesta

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ -5 & -4 & -3 \end{pmatrix} = P^T$$

no es simétrica.

c) Denotemos las bases $A = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$, y por X'^T, Y'^T las coordenadas de los vectores v, w respecto de la base B respectivamente. Las matriz de cambio de base de B a A viene dada por la matriz que tiene por columnas las coordenadas de los vectores de B con respecto a A

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$X = BX'$, $Y = BY'$. Luego $\varphi(u,w) = X^T PY = (BX')^T P(BY') = X'^T \left(B^T PB\right) Y'$ y

$$\begin{aligned}
Q &= B^T PB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -6 & 4 & -8 \\ -2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

es la matriz de φ con respecto a la base B. Compruébese que por ejemplo las coordenadas de los vectores v, w respecto a B son $X'^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$, $Y'^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ y que

$$\begin{aligned}
X'^T QY' &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 4 & -8 \\ -2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \\
&= 9
\end{aligned}$$

Solución 31 Tenemos que determinar los elementos $\varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ para $i, j = 1, ..., 3$. Por hipótesis sabemos que $\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = -1$, $\varphi(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = 0$, $\varphi(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) = -2$. Además sabemos que $\varphi(\mathbf{e}_1, 3\mathbf{e}_2) = 3\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ luego

$$\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \frac{\varphi(\mathbf{e}_1, 3\mathbf{e}_2)}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

Del mismo modo

$$\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = \frac{\varphi(\mathbf{e}_1, -2\mathbf{e}_3)}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

Por otro lado $\varphi(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)=\varphi(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_3)+\varphi(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$ y por tanto

$$\varphi(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)=\varphi(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)-\varphi(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_3)=4-1=3$$

El resto de elementos se obtiene por simetría de φ, $\varphi(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1)=\varphi(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)=2$, $\varphi(\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1)=\varphi(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_3)=1$, $\varphi(\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_2)=\varphi(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)=3$. Luego la matriz asociada a φ viene dada por

$$P=\begin{pmatrix}\varphi(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1) & \varphi(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2) & \varphi(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_3)\\ \varphi(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1) & \varphi(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2) & \varphi(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)\\ \varphi(\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1) & \varphi(\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_2) & \varphi(\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 3\\ 1 & 3 & -2\end{pmatrix}$$

Solución 32 La matriz de cambio de base de la base $\mathbf{B}$ a la $\mathbf{A}$ es

$$B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

y por tanto la matriz Q asociada a φ respecto de la base $\mathbf{B}$ viene dada por

$$\begin{aligned} B^TPB &= \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 3\\ 1 & 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}3 & 7 & 4\\ 7 & -1 & 3\\ 4 & 3 & -2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Solución 33 a) Denotando $X^T=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} w_P(v) &= X^T P X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix} \\ &= x_1 (x_1 + x_3) + x_2 (x_1 - x_2) + x_3 (x_2 - x_3) \\ &= x_1^2 + x_1 x_2 - x_2^2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 - x_3^2 \end{aligned}$$

b) La forma polar de w_P es la forma bilineal simétrica $\overline{\varphi}_P$ determinada por la matriz $\frac{1}{2}(P + P^T)$, es decir

$$\frac{1}{2}(P + P^T) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T\right) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

la matriz asociada a la forma bilineal simétrica

$$\overline{\varphi}_P(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Compruébese que efectivamente $w(\mathbf{v}) = \overline{\varphi}(\mathbf{v}, \mathbf{v})$.

c) Sabemos que la matriz Q asociada a la forma bilineal φ_P respecto de la nueva base $\mathbf{B}$ tiene asimismo como matriz asociada a $B^T P B$ es donde B es la matriz de cambio de la base de $\mathbf{B}$ a la base canónica. En este caso como

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

se tiene

$$\begin{aligned} Q &= B^T P B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego

$$\varphi_P(v,w) = \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix}$$

en donde $X'^T = \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \end{pmatrix}$, $Y'^T = \begin{pmatrix} y'_1 & y'_2 & y'_3 \end{pmatrix}$ denotan en este caso las coordenadas de los vectores $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ respecto de la base $\mathbf{B}$.

d) La forma polar de w_P en la base $\mathbf{B}$ sera la forma bilineal simétrica $\overline{\varphi}$ asociada la matriz $B^T[\frac{1}{2}(P+P^T)]B$ en donde B es la matriz de cambio de base del apartado anterior. En este caso, recordando que ya hemos calculado la matriz $\frac{1}{2}(P+P^T)$ en el apartado b) se tiene

$$\begin{aligned} B^T[\frac{1}{2}(P+P^T)]B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego

$$\overline{\varphi}_P(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix}$$

en donde $X'^T = \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \end{pmatrix}$, $Y'^T = \begin{pmatrix} y'_1 & y'_2 & y'_3 \end{pmatrix}$ denotan las coordenadas respecto de la base $\mathbf{B}$ de los vectores $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ respectivamente.

Solución 34 Aplicando el criterio de Silvester

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \det P_1 = 1 > 0 \\
\Delta_2 &= \det P_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 1 > 0 \\
\Delta_3 &= \det P_3 = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2\lambda \\ 1 & 2\lambda & \lambda \end{pmatrix} = -4\lambda^2 + 9\lambda - 5
\end{aligned}$$

Por el criterio de Silvester sabemos que la forma cuadrática no puede ser definida negativa ya que $\Delta_1 > 0$, y como los dos primeros determinantes Δ_1, Δ_2 son estrictamente positivos la forma cuadrática será positiva si $\Delta_3 > 0$. Por tanto debemos estudiar los intervalos en los que la función $f(\lambda) = -4\lambda^2 + 9\lambda - 5 = \Delta_3$ sea positiva, que nos darán los parámetros λ para los que la forma cuadrática sea definida positiva. La función se anula en las raices del polinomio $-4\lambda^2 + 9\lambda - 5 = 0$ que son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5/4$, luego es en dichos puntos en donde la función cambia de signo. Luego basta estudiar la positividad de la función en los intervalos $I_1 = (-\infty, 1)$, $I_2 = (1, 5/4)$, $I_3 = (5/4, \infty)$. En I_1 como por ejemplo $f(0) = -5$ la funcion es estrictamente negativa, en I_2 la función es estrictamente positiva por ejemplo en su punto medio

$$f\left(\frac{1 + \frac{5}{4}}{2} = \frac{9}{8}\right) = \frac{1}{16} > 0$$

Mientras que en I_3 al función es negativa ya que por ejemplo $f(2) = -3$.

Luego la forma cuadrática es definida positiva solamente si $\lambda \in (1, 5/4)$ ya que $\Delta_3 > 0$.

Solución 35 (i) Dados λ, $\mu \in \mathbb{R}$, $\mathbf{p}_1 = a_1x^2 + b_1x + c_1$, $\mathbf{p}_2 = a_2x^2 + b_2x + c_2$ operando y aplicando la definición de F se tiene

$$\begin{aligned}
F(\lambda\mathbf{p}_1 + \mu\mathbf{p}_2) &= F((\lambda a_1 + \mu a_2)\, x^2 + (\lambda b_1 + \mu b_2)\, x + \lambda c_1 + \mu c_2) \\
&= (\lambda b_1 + \mu b_2)\, x + \lambda c_1 + \mu c_2 \\
&= \lambda\, (b_1 x + c_1) + \mu\, (b_2 x + c_2) \\
&= \lambda F(\mathbf{p}_1) + \mu F(\mathbf{p}_2),
\end{aligned}$$

lo que prueba que F es una aplicación lineal.

(ii) Consideremos un vector genérico $\mathbf{p} = ax^2 + bx + c$ sus coordenadas respecto de la base

$$\mathbf{A}' = \left\{\mathbf{p}'_1(x) = x^2, \mathbf{p}'_2(x) = x,\ \mathbf{p}'_3(x) = 1\right\}$$

viene dadas por el vector columna

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Del mismo modo las coordenadas de su imagen $F(\mathbf{p}) = bx + a$ respecto de la base

$$\mathbf{B}' = \{\mathbf{q}'_1(x) = x,\ \mathbf{q}'_2(x) = 1\}$$

es el vector

$$\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}.$$

Como directamente vemos

$$\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \tag{16}$$

la matriz asociada respecto de las bases $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Denotemos por X, Y los vectores columnas de coordenadas de los polinomios $\mathbf{p}$ y $F(\mathbf{p})$ respecto de las bases $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ respectivamente. La matriz de cambio de la base $\mathbf{A}'$ a $\mathbf{A}$ viene dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & 9 \end{pmatrix} X \tag{17}$$

en donde las columnas no son más que las coordenadas de los elementos de la base $\mathbf{A}$ respecto de la base $\mathbf{A}'$ (p. 63 libro de texto)

$$\begin{aligned}
&\mathbf{p}_1 = -1 = -1 = -\mathbf{p}_3',\\
&\mathbf{p}_2 = x - 1 = \mathbf{p}_2' - \mathbf{p}_3',\\
&\mathbf{p}_3 = (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9 = \mathbf{p}_1' + 6\mathbf{p}_2' + 9.
\end{aligned}$$

Del mismo modo

$$\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y \tag{18}$$

en donde en este caso

$$\begin{aligned}
&\mathbf{q}_1 = -x = -\mathbf{q}_1',\\
&\mathbf{q}_2 = 2 = 2\mathbf{q}_2',
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (**??**), (**??**), (**??**) se tiene

$$\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & 9 \end{pmatrix} X$$

$$Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & 9 \end{pmatrix} X$$

y por tanto

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

es la matriz asociada de F respecto de la bases $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$.

Solución 36 El polinomio característico viene dado por

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$$

que tiene por raíces (autovalores) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Calculamos los subespacios de autovectores asociados:

- Para $\lambda_1 = 1$

$$\begin{array}{l} \mathbb{E}_1 = \left\{ (x_1, x_2) : \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Leftrightarrow \\ \mathbb{E}_1 = \{(x_1, x_2) : -x - y = 0\} \Leftrightarrow \\ \mathbb{E}_1 = G\left[(1, -1)\right]. \end{array}$$

- Para $\lambda_2 = -1$

$$\begin{array}{l} \mathbb{E}_2 = \left\{ (x_1, x_2) : \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Leftrightarrow \\ \mathbb{E}_2 = \{(x_1, x_2) : x - y = 0\} \Leftrightarrow \\ \mathbb{E}_2 = G\left[(1, 1)\right]. \end{array}$$

La base de autovalores es por tanto $\mathbf{B} = \{(1, -1), (1, 1)\}$, con matriz diagonal y de paso

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

De hecho compruébese

$$\begin{aligned} D &= QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(ii) Como $A = Q^{-1}DQ$ las potencias sucesivas se calculan iterativamente de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
&A^2 = Q^{-1}DQQ^{-1}DQ = Q^{-1}D^2Q\\
&A^3 = Q^{-1}DQA^2 = Q^{-1}DQQ^{-1}D^2Q = Q^{-1}D^3Q\\
&\vdots\\
&A^n = Q^{-1}DQA^{n-1} = Q^{-1}DQQ^{-1}D^{n-1}Q = Q^{-1}D^nQ
\end{aligned}$$

Luego

$$A^{11} = Q^{-1}D^{11}Q \tag{19}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
A^{11} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^{11} & 0 \\ 0 & -1^{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Solución 37 (i) Como la dimensión de $\mathbb{P}_2$ es 3, todo sistema linealmente independiente de tres vectores constituye una base. Veamos aplicando la definición que el sistema $\mathbf{A}$ es linealmente independiente (véase p. 55 libro de texto). Tomamos λ_1, λ_2, $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ escalares tales que

$$\lambda_1\mathbf{p}_1 + \lambda_2\mathbf{p}_2 + \lambda_3\mathbf{p}_3 = \mathbf{0}.$$

Equivalentemente

$$\begin{aligned}
\lambda_1\left(x^2+x+1\right) + \lambda_2\cdot 1 + \lambda_3\cdot(1-x) &= 0 \Leftrightarrow\\
\lambda_1 x^2 + (\lambda_1-\lambda_3)x + \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 &= 0
\end{aligned}$$

y por tanto

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_1-\lambda_3 = 0,\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 0.$$

De esto último necesariamente deducimos que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, lo que prueba que **A** es linealmente independiente y por tanto base.

(ii) En primer lugar, es evidente por su definición que la aplicación φ es simétrica en el siguiente sentido

$$\varphi(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \int_0^1 \mathbf{p}(x)\mathbf{q}(x)x dx = \int_0^1 \mathbf{q}(x)\mathbf{p}(x)x dx = \varphi(\mathbf{q},\mathbf{p})$$

para todos $\mathbf{p},\mathbf{q} \in \mathbb{P}_2$ cualesquiera.

Para probar que la aplicación es bilineal simétrica basta comprobar que se cumple la definicion (pp 112-113 libro de texto). Por la propiedad de simetría anterior basta comprobar que se cumple la linealidad con respecto de la primera componente. En este sentido dados vectores $\mathbf{p},\mathbf{p}'$, $\mathbf{q} \in \mathbb{P}_2$ y escalares λ, $\mu \in \mathbb{R}$ arbitrarios, aplicando propiedades elementales de la integral (p. 200 libro de texto) se tiene

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda\mathbf{p}+\mu\mathbf{p}',\mathbf{q}) &= \int_0^1 \left(\lambda\mathbf{p}+\mu\mathbf{p}'\right)(x)\mathbf{q}(x)x dx \\
&= \lambda\int_0^1 \mathbf{p}(\mathbf{x})\mathbf{q}(x)x dx + \mu\int_0^1 \mathbf{p}'(\mathbf{x})\mathbf{q}(x)x dx \\
&= \lambda\varphi(\mathbf{p},\mathbf{q}) + \mu\varphi(\mathbf{p}',\mathbf{q}).
\end{aligned}$$

(iii) Por definición, la matriz asociada a la base **A** viene dada por

$$A = \begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_1) & \varphi(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2) & \varphi(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_3) \\ \varphi(\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_1) & \varphi(\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_2) & \varphi(\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3) \\ \varphi(\mathbf{p}_3,\mathbf{p}_1) & \varphi(\mathbf{p}_3,\mathbf{p}_2) & \varphi(\mathbf{p}_3,\mathbf{p}_3) \end{pmatrix}$$

Por simetría, basta calcular los elementos que están por encima de la diagonal. Luego se trata de calcular las siguientes integrales

$$\varphi(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1) = \int_0^1 (x^2+x+1)(x^2+x+1)\, xdx$$
$$= \int_0^1 (x^5+2x^4+3x^3+2x^2+x)\, dx$$
$$= \frac{1}{6}+\frac{2}{5}+\frac{3}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{149}{60}$$
$$\varphi(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \int_0^1 (x^2+x+1)\cdot 1 \cdot xdx$$
$$= \int_0^1 (x^3+x^2+x)\, dx$$
$$= \frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{13}{12}$$
$$\varphi(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_3) = \int_0^1 (x^2+x+1)(1-x)\, xdx$$
$$= \int_0^1 (x^3+x^2+x)\, dx - \int_0^1 (x^4+x^3+x^2)\, dx$$
$$= \frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=\frac{3}{10}$$
$$\varphi(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_2) = \int_0^1 1\cdot 1xdx = \frac{1}{2}$$
$$\varphi(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) = \int_0^1 1\cdot (1-x)xdx = \frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$
$$\varphi(\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_3) = \int_0^1 (1-x)^2 xdx$$
$$= \int_0^1 (x+x^3-2x^2)dx$$
$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{2}{3}=\frac{1}{12}$$

Finalmente, aplicando simetría, la matriz asociada está dada por

$$A = \begin{pmatrix} \frac{149}{60} & \frac{13}{12} & \frac{3}{10} \\ \frac{13}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

Capítulo 6. Funciónes reales de una variable real

ENUNCIADOS

Ejercicio 1 Verifique, usando la definición de límite (p. 142 libro de texto), el siguiente límite de sucesiones

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{6n^2+1} = 0$$

Lo que se pide es fijado $\varepsilon > 0$, determinar el número $n_0 \in \mathbb{N}$ para el que se cumple

$$\left|\frac{1}{6n^2+1}\right| \leq \varepsilon \text{ para } n \geq n_0$$

Ejercicio 2 Encuentre una fórmula para la función inversa f^{-1} de $f(x) = \dfrac{4x-1}{2x+3}$. Calcular la derivada de la función f^{-1} en el punto $y = 1$, y verifique que se cumple la regla de derivación de la función inversa.

Ejercicio 3 Aplicando la definición de derivada, calcule la derivada de la función $f(x) = \sqrt{3x+1}$ en un punto genérico $x = a$. Compruebe que coincide con la regla de cálculo habitual.

Ejercicio 4 Evalúe los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 0} (1+2x)^{\frac{1}{2x}}$$

Ejercicio 5 Sea la función $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, encuentre los máximos y mínimos absolutos de f en el intervalo $[1,3]$.

Ejercicio 6 Exprese el polinomio $f(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2$ en función de potencias de $x - 1$.

Ejercicio 7 Una pieza rectangular de cartón tiene 20 y 30 cm de lados. En cada una de sus esquinas se corta un cuadrado de lado x para fabricar una caja. ¿Qué valor debe tener x para que la caja tenga la máxima capacidad?.

Ejercicio 8 Pruébese que las función $f(x) = \cos\dfrac{1}{x}, x \neq 0$ no tienen límite en $x = 0$.

Ejercicio 9 Considere la sucesión $(a_n) \subset \mathbb{R}$ definida recursivamente como

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_{n+1} &= \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} \text{ para todo } n \geq 1 \end{aligned}$$

(i) Pruebe, aplicando inducción, que la sucesión (a_n^2) está acotada inferiormente por 2. .

(ii) Pruebe, aplicando inducción, que la sucesión (a_n) es decreciente.

(iii) Razone que existe límite de dicha sucesión.

(iv) Calcule el límite de dicha sucesión.

Ejercicio 10 Dada la función $f(x) = xe^x$. Determine

(i) Máximos y mínimos. Intervalos de crecimiento y decrecimiento

(ii) Puntos de inflexión.

(iii) Intervalos de convexidad.

Ejercicio 11 Demostrar que si (a_n) y (b_n) son dos sucesiones tales que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ entonces se verifica $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = e^{\lim(a_n-1)b_n}$.

Ejercicio 12 Determínese el siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3n-5}{n^2-4n+2}\right)^{\dfrac{n^2+5}{n+2}}$$

Ejercicio 13 Sabiendo que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1$ (Equivalencia de Stirling) señale el valor del siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}[(2n)!]}$$

Ejercicio 14 Dado un número real positivo a construimos recursivamente una sucesión (x_n) de número reales definida como

$$x_1 = \sqrt{a},\ x_2 = \sqrt{a + x_1},\ldots,\ x_n = \sqrt{a + x_{n-1}}$$

(i) Probar que la sucesión (x_n) es monótona creciente.

(ii) Probar que $\sqrt{a} + 1$ es una cota superior.

(iii) Probar que el límite de la sucesión existe y calcularlo en función del parámetro a.

Ejercicio 15 Determínense, en su caso, la suma de las series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^2 - 1}{3n^2 + 1}$

b) $1 - a + a^2 - a^3 + ... + (-1)^n a^n + ...$ en donde $|a| < 1$

Ejercicio 16 Respóndase a las siguientes cuestiones:

a) ¿Cuál es el témino general de las sucesiones

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, ...\right\};\left\{\frac{2}{4}, \frac{5}{7}, \frac{10}{10}, \frac{17}{13}, \frac{26}{16}, \frac{37}{19} ....\right\}?$$

b) Si $l \leq a_n \leq b_n$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$, ¿es cierto qué $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$?.

c) Pruébese que si $b_n = |a_n|$ y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = |l|$. ¿Es cierto qué si $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = |l|$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$?

d) Pónganse ejemplos para probar en cada uno de los casos que aunque existan $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$, $\lim_{n\to\infty} a_n b_n$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ no tiene que existir necesariamente $\lim_{n\to\infty} a_n$ y $\lim_{n\to\infty} b_n$.

e) Sea (a_n) una sucesión que cumple, $a_1 = 0$, $a_{n-1} = \sqrt{a_n + 2}$. ¿ Es (a_n) una sucesión creciente?, ¿está acotada superiormente?, en caso afirmativo, ¿es 2 una cota superior?.

Ejercicio 17 Calcúlense, si existen, los límites de las sucesiones

a) $\dfrac{n}{n+1} - \dfrac{n+1}{n}$

b) $\dfrac{1}{n!}$

c) $(2 + (-1)^n)$

d) $\dfrac{4^n - (-3)^n}{4^{n+2} + (-3)^n}$

e) $\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\cos n!}{2n-1}$

f) $\sqrt{n^3 + 2n^2} - \sqrt{n^3 + 1}$

g) $\left(\dfrac{1 + 2 + 3 + ... + n}{n^2}\right)$.

Ejercicio 18 Sea la sucesión $(a_n) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

a) Pruébese que (a_n) es monótona creciente y acotada. (Por tanto posee límite al cual llamamos número e).

b) Pruébese del mismo modo que la sucesión $(a'_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$ es monótona decreciente y acotada.

c) Pruébese que (a_n) y (a'_n) tienen el mismo límite.

d) De la misma manera que en a), b) y c), razónese que si $(b_n) \to \infty$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{b_n} = e.$$

e) Determínense los límites de las sucesiones $\left(\frac{n^2+2}{n^2+3}\right)^{2n^2}$ y $\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2}\right)^{n}$

Ejercicio 19 Detemínense, en su caso, la suma de las series :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3^{n-1}}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Ejercicio 20 Pruébese que las funciones $f(x) = \cos\frac{1}{x}, x \neq 0$ y $g(x) = x^2 + sen\frac{1}{x}, x \neq 0$ no tienen límite en $x = 0$.

Ejercicio 21 En el intervalo $[0, 2]$ qué hipótesis del teorema de Bolzano no cumple la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}(x^2 + x + 3) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ e^x & \text{si } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Ejercicio 22 Aplíquense las propiedades de la derivada para calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \arccos \sqrt{x},\ x > 0$

b) $f(x) = \ln \mathit{arcsen} \sqrt{x}$ en $x = 1/2$

c) $f(x) = \ln \dfrac{1 - \ln x}{1 + \ln x},\ \dfrac{1}{e} < x < e$

Ejercicio 23 Calcúlense los siguientes límites aplicando la regla de L'Hôpital:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$

b) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln \cos 2x}{x^2}$

Ejercicio 24 Detemínense la expresión de los polinomios en función de las potencias $(x + 1)$ del polinomio $p(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$.

Ejercicio 25 Determínese el polinomio de Taylor de orden cuatro de la función $f(x) = \mathit{sen}\, x - \cos 2x$ en un entorno de $x = 0$ y hállese una cota del error en el intervalo $[-1, 1]$.

Ejercicio 26 Hállense los extremos relativos, los intervalos de crecimiento, los puntos de inflexión y los intervalos de convexidad de las función

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$$

Ejercicio 27 Determinar la ecuación de la recta que pasa por $(2, 3)$ y forma un triángulo de área mínima con los ejes.

Ejercicio 28 Estudie la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} xe^{\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 29 Estudiar la derivabilidad en el punto $x = 2$ de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{1+e^{\frac{1}{x-2}}} & \text{si} \quad x \neq 2 \\ 0 & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$$

Ejercicio 30 Determine en potencia de $x + 2$ el polinomio $p(x) = x^3 - 2x^2 + x - 12$.

Ejercicio 31 Señale el valor del siguiente límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \text{ sen } x - \text{ sen }^3 x}{x^5}$$

Ejercicio 32 Sea p_2 el polinomio de Taylor de orden 2 de la función $f(x) = \cos(xe^x)$ en el punto $x = 0$. Señale la respuesta correcta.

Ejercicio 33 Señale el valor del siguiente límite

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{e^x - e^y}{e^{x-y} - 1}$$

Ejercicio 34 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} (e^x - 1)/x & si \quad x \neq 0, \\ 1 & si \quad x = 0. \end{cases}$$

Señale el valor de su derivada en el punto $x = 0$.

Ejercicio 35 Responda razonamente a las siguientes preguntas:

(i) Exprese el polinomio $p(x) = x^4 - 1$ en potencias de $x + 1$.

(ii) Calcule el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{3 - \sqrt{2x + 9}}{2x}$$

(iii) Señale el valor, si existe, del siguiente límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\cos(\frac{x+1}{x})}{1 + x}$$

(iv) Dada la función $f(x) = x\,|x|$, señale su derivada en el punto $x = 0$.

SOLUCIONES

Solución 1 Partiendo de la expresión, basta operar convenientemente para hallar la cota sobre n. De esta manera

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{6n^2+1}\right| &\leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{6n^2+1} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} \leq 6n^2+1 \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon}-1 \leq 6n^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{6}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right) \leq n^2 \Leftrightarrow \frac{1}{6}\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right) \leq n^2\end{aligned}$$

A partir de esta desigualdad

$$\frac{1}{6}\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right) \leq n^2 \tag{20}$$

podemos considerar dos casos:

- Si $\varepsilon > 1$ entonces $\frac{1}{6}\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right) < 0$, y cualquier número natural $n \geq 1$ verifica (**??**). Luego $n_0 = 1$.
- Si $\varepsilon \leq 1$ entonces $\frac{1}{6}\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right) \geq 0$, y podemos considerar su raíz cuadrado. Por tanto

$$0 \leq \frac{1}{6}\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right) \leq n^2 \Leftrightarrow n \geq \sqrt{\frac{1}{6}\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)}$$

Por tanto n_0 se toma como el primer entero más grande que la ráiz anterior, es decir

$$n_0 = \left\lceil \sqrt{\frac{1}{6}\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)} \right\rceil$$

en donde usamos la siguiente notación

$$\lceil r \rceil = \min\{a \in \mathbb{N} : a \geq r\}$$

Solución 2 Por definición, la función inversa $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se define como aquella que verifica

$$f^{-1}(f(x)) = f\left(f^{-1}(x)\right) = x$$

En la práctica si denotamos $y = f(x)$, tenemos que

$$y = \frac{4x-1}{2x+3} \tag{21}$$

Se trata de hallar la expresión de la función $x = x(y) = f^{-1}(y)$ verificando (**??**)

$$\begin{aligned} y &= \frac{4x-1}{2x+3} \Leftrightarrow (2x+3)y = 4x-1 \Leftrightarrow (2x+3)y - 4x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3y - 4x + 2xy + 1 = 0 \Leftrightarrow x(C) = 4x - 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-1-3y}{2y-4} \Leftrightarrow x = \frac{3y+1}{4-2y} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$f^{-1}(y) = \frac{3y+1}{4-2y}$$

y su derivada viene dada por

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{3(4-2y)+2(3y+1)}{(4-2y)^2} = \frac{14}{(2y-4)^2}$$

De hecho verifíquese que se cumple la regla de derivación de la función inversa, ya que por un lado

$$f'(x) = \frac{4(2x+3)-2(4x-1)}{(2x+3)^2} = \frac{14}{(2x+3)^2}$$

y por otro se tiene que

$$\begin{aligned}\left(f^{-1}\right)'(f(x)) &= \left(f^{-1}\right)'\left(\frac{4x-1}{2x+3}\right) = \frac{14}{\left(2\frac{4x-1}{2x+3}-4\right)^2} = \frac{14}{\left(\frac{2(4x-1)-4(2x+3)}{2x+3}\right)^2} \\ &= \frac{14}{\frac{14^2}{(2x+3)^2}} = \frac{(2x+3)^2}{14} = \frac{1}{f'(x)}\end{aligned}$$

Solución 3 Siguiendo la definición

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3(a+h)+1}-\sqrt{3a+1}}{h}$$

Se trata de calcular el límite del cociente

$$\frac{\sqrt{3(a+h)+1}-\sqrt{3a+1}}{h}$$

cuando $h \to 0$. El límite es una indeterminación $\frac{0}{0}$, de hecho todo cociente diferencial lo es. Tenemos, por tanto, que manipular la expresión para poder computar el límite. Para ello, se racionaliza el numerador

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3(a+h)+1}-\sqrt{3a+1}}{h} &= \frac{\left(\sqrt{3(a+h)+1}-\sqrt{3a+1}\right)\left(\sqrt{3(a+h)+1}+\sqrt{3a+1}\right)}{h\left(\sqrt{3(a+h)+1}+\sqrt{3a+1}\right)} \\ &= \frac{(\sqrt{3(a+h)+1})^2-\left(\sqrt{3a+1}\right)^2}{h\left(\sqrt{3(a+h)+1}+\sqrt{3a+1}\right)} = \frac{(3(a+h)+1)-(3a+1)}{h\left(\sqrt{3(a+h)+1}+\sqrt{3a+1}\right)} \\ &= \frac{3h}{h\left(\sqrt{3a+3h+1}+\sqrt{3x+1}\right)} = \frac{3}{\sqrt{3a+3h+1}+\sqrt{3a+1}}\end{aligned}$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{3}{\sqrt{3a+3h+1}+\sqrt{3x+1}} = \frac{3}{\sqrt{3a+3\times 0+1}+\sqrt{3a+1}} \\ &= \frac{3}{2\sqrt{3a+1}}, \end{aligned}$$

que coincide con la regla de derivación conocida.

Solución 4 El primer caso es una indeterminación $\frac{0}{0}$, que se resuelven aplicando la regla de L'Hopital directamente

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(\ln x)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1$$

El segundo límite también se resuelve aplicando una regla de L'Hopital. En dicho caso tenemos que hacer una manipulación previa. Como

$$(1+2x)^{\frac{1}{2x}} = e^{\frac{1}{2x}\ln(1+2x)},$$

entonces

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\ln(1+2x)} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{(2x)'}\ln(1+2x)'} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{1+2x}}{2}} = e^1 = e$$

Solución 5 La función derivada viene dada por

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

Por tanto, sus puntos críticos son

$$f'(c) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln c}{c^2} = 0 \Leftrightarrow \ln c = 1 \Leftrightarrow c = e$$

El punto crítico $c = e$ cae dentro del intervalo $[1, 3]$, y determina un cambio de signo de la derivada. Ya que $f'(x) > 0$ si $1 \leq x \leq e$, $f'(x) \geq 0$ si $x \geq e$. Por tanto la función es creciente en el intervalo $[1, e]$, y decreciente en el intervalo $[e, 3]$. Luego en el punto $x = e$ la función alcanza un máximo absoluto. Del mismo modo se deduce que el mínimo absoluto se alcanzará en los extremos

$$\min_{x\in[1,3]} \frac{\ln x}{x} = \min\{f(1), f(3)\} = \min\{0, \frac{\ln 3}{3}\} = 0 = f(1)$$

Por tanto el mínimo de la función se alcanza en $x = 1$.

Solución 6 Por ser un polinomio de grado 4, cualquier polinomio de Taylor del mismo orden, independientemente del punto escogido, coincidirá con él. En particular el centrado en el punto $x = 1$, que está expresado en potencias de $x-1$. Luego se trata de calcular el polinomio de Taylor de orden 4 en el punto $x = 1$. Calculamos, por tanto, las derivadas.

$$\begin{aligned}
&f(1) = [x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2]_{x=1} = 0\\
&f'(1) = [4x^3 - 15x^2 + 18x - 7]_{x=1} = 0\\
&f''(1) = [12x^2 - 30x + 18]_{x=1} = 0\\
&f'''(1) = [24x - 30]_{x=1} = -6\\
&f^{(4}(1) = 24
\end{aligned}$$

Luego

$$f(x) = P_4(x) = \frac{-6}{3!}(x-1)^3 + \frac{24}{4!}(x-1)^4 = (x-1)^4 - (x-1)^3$$

Solución 7 La longitud de los lados es $30 - 2x$ y $20 - 2x$, por tanto el área de la base de la caja es $S = 600 - 100x + 4x^2$ y tenemos que hacer máxima la función

$$V(x) = (600 - 100x + 4x^2)x$$

Igualando la primera derivada a 0, se obtiene

$$\begin{aligned}
V'(x) &= 12x^2 - 200x + 600 = 0 \Rightarrow\\
x_1 &= \frac{25}{3} + \frac{5}{3}\sqrt{7} \simeq 12,743 \text{ y } x_2 = \frac{25}{3} - \frac{5}{3}\sqrt{7} = 3,923
\end{aligned}$$

Es claro que la única solución posible es x_2. Además es un máximo ya que

$$V''(x) = 24x - 200 \text{ y } V''\left(\frac{25}{3} - \frac{5}{3}\sqrt{7}\right) < 0$$

Solución 8 Por el teorema de caracterización del límite por sucesiones, si consideramos las sucesiones $x_n = \dfrac{1}{2\pi n}$ y $x'_n = \dfrac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$ convergentes a 0, resulta que el límite de las imágenes de cada sucesión es distinto y por tanto no existe el límite. En efecto:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f(x_n) &= \lim_{n\to\infty} \cos\frac{1}{1/2\pi n} = \lim_{n\to\infty} \cos 2\pi n = 1 \\
\lim_{n\to\infty} f(x'_n) &= \lim_{n\to\infty} \cos\frac{1}{1/(2\pi n + \frac{\pi}{2})} = \lim_{n\to\infty} \cos(2\pi n + \frac{\pi}{2}) = 0
\end{aligned}$$

Solución 9 (i) Para el caso $n = 1$ se tiene

$$a_1^2 = 2^2 = 4 \geq 2$$

Supuesto que se verifica (hipótesis de inducción)

$$a_n^2 \geq 2,$$

probemos que se verifica para el término siguiente. De hecho, operando convenientemente vemos que

$$\begin{aligned}
a_{n+1}^2 - 2 &= \left(\frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}\right)^2 - 2 = \frac{1}{a_n^2} + \frac{1}{4}a_n^2 + 1 - 2 = \frac{1}{a_n^2} + \frac{1}{4}a_n^2 - 1 \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{4}{a_n^2} + a_n^2 - 4\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{a_n^2 - 2}{a_n}\right)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

en donde hemos aplicado la hipotesis de inducción en la última desigualdad. Por tanto

$$a_{n+1}^2 - 2 \geq 0 \Rightarrow a_{n+1}^2 \geq 2.$$

(ii) Empezamos viendo que $a_1 \geq a_2$, efectivamente

$$a_2 = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \leq a_1 = 2.$$

Para el caso general, supongamos que se verifica

$$a_{n-1} - a_n \geq 0.$$

En este caso

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \left(\frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n^2 - 2}{2a_n}$$

y como por el apartado anterior hemos demostrado que $a_n^2 - 2 \geq 0$, entonces necesariamente

$$a_n - a_{n+1} \geq 0 \Rightarrow a_n \geq a_{n+1}$$

(iii) La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y acotada inferiormente, por tanto es convergente por el teorema de convergencia de sucesiones monótonas (véase p.146 libro de texto). Luego podemos considera su limite $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

(iv) Basta tomar límites en la fórmula de recursión

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}\right) \Longleftrightarrow L = \frac{L}{2} + \frac{1}{L} \Longleftrightarrow \frac{L}{2} = \frac{1}{L} \\ &\Longleftrightarrow L = \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

Tenemos dos posible límites, $L = \sqrt{2}$, $L = -\sqrt{2}$. Descartamos $-\sqrt{2}$, ya que la sucesión (a_n) es positiva. Por tanto

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$$

Solución 10 (i) Calculemos la función derivada

$$f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$$

El punto $x = -1$ es el único punto crítico ya que

$$(1+x)e^x = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Por otro lado la función derivada segunda

$$f''(x) = e^x + (1+x)e^x = (2+x)e^x$$

y en el punto crítico

$$f''(-1) = 1e = e > 0$$

es estrictamente positivo. Luego $x = -1$ es un punto de mínimo local. Por otro lado la función derivada $f'(x)$ en negativa en $I_1 = (-\infty, -1]$ y positiva en $I_2 = [-1, \infty)$, por lo que la función decrece en I_1 y crece en I_2, lo que nos asegura que $x = -1$ es un punto de mínimo global y no posee ningún máximo.

(ii), (iii) Los candidatos a puntos de inflexión son los ceros de la función derivada segunda

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (2+x)e^x \Leftrightarrow x = -2.$$

Por otro lado la función f'' es negativa en $D_1 = (-\infty, -2]$, y positiva en $D_2 = [-2, \infty)$. Con lo que la función es cóncava en D_1 y convexa en D_2, por lo que efectivamente $x = -2$ es un punto de inflexión ya que cambia el signo de la derivada segunda.

Solución 11 En general se tiene que para toda sucesión $(x_n) \to \infty$ se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e \tag{22}$$

(véase prueba de autoevaluación del año pasado). Definiendo una sucesión $c_n = a_n - 1$ que verifica $(c_n) \to 0$ ya que$(a_n) \to 1$ por hipótesis. Manipulando la expresión del límite llegamos a que

$$a_n^{b_n} = (1 + c_n)^{b_n} = \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{c_n}}\right)^{\frac{1}{c_n} c_n b_n} =$$

Por (**??**) tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{c_n}}\right)^{\frac{1}{c_n}} = e$$

y por otro lado $\lim\limits_{n\to\infty} c_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n-1)b_n$. Luego

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{c_n}}\right)^{\frac{1}{c_n}c_n b_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} c_n b_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-1)b_n}$$

Solución 12 Podemos aplicar el resultado del ejercicio anterior, identificando

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n^2+3n-5}{n^2-4n+2} \\ b_n &= \frac{n^2+5}{n+2} \end{aligned}$$

que verifican las hipotésis ya que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n-5}{n^2-4n+2} = 1,\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5}{n+2} = \infty$$

Operando

$$\begin{aligned}
(a_n-1)b_n &= \left(\frac{n^2+3n-5}{n^2-4n+2}-1\right)\frac{n^2+5}{n+2} = \\
&= \left(\frac{n^2+3n-5-(n^2-4n+2)}{n^2-4n+2}\right)\frac{n^2+5}{n+2} \\
&= \left(\frac{7n-7}{n^2-4n+2}\right)\frac{n^2+5}{n+2} = \frac{(7n-7)(n^2+5)}{(n^2-4n+2)(n+2)} \\
&= \frac{7n^3+35n-7n^2-35}{n^3-2n^2-6n+4}
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-1)b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{7n^3+35n-7n^2-35}{n^3-2n^2-6n+4} = 7$$

Luego aplicando la fórmula del ejercicio anterior finalmente tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3n-5}{n^2-4n+2}\right)^{\dfrac{n^2+5}{n+2}} = e^7$$

Solución 13 Como $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1$ entonces también se tiene por la propiedad 6 (p. 145 libro texto) de sucesiones convergentes

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\right)}{n!} = 1$$

y de aquí se deduce también

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\right)^2}{n!^2} = 1$$

Del mismo modo se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n!}{(2n)^{2n}\, e^{-2n}\sqrt{2\pi 2n}} = 1$$

Luego

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}[(2n)!]} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}[(2n)!]} \frac{\left(n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\right)^2}{n!^2} \frac{2n!}{(2n)^{2n}\, e^{-2n}\sqrt{2\pi 2n}} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}\left(n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\right)^2}{\sqrt{n}\,(2n)^{2n}\, e^{-2n}\sqrt{2\pi 2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n} n^{2n} e^{-2n} 2\pi n}{\sqrt{n} 2^{2n} n^{2n} e^{-2n}\sqrt{2\pi 2n}} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi n}{\sqrt{n}\sqrt{2\pi 2n}} = \lim_{n\to\infty} \pi \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(\pi n)}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

Solución 14 (i) Lo probamos por inducción. En primer lugar se tiene que

$$x_1 = \sqrt{a} \leq \sqrt{a + \sqrt{a}} = \sqrt{a + x_1} = x_2$$

ya que la función raíz cuadrada $f(x) = x$ es una función creciente en el dominio de los positivos. Por otro lado supuesto que se verifica

$$x_{n-1} \leq x_n \tag{23}$$

tenemos que por definición

$$x_n = \sqrt{a + x_{n-1}} \leq \sqrt{a + x_n} = x_{n+1}$$

en donde hemos utilizado la hipótesis eqref B y otra vez el hecho que la función raíz cuadrada es creciente.

(ii) Probamos otra vez por inducción que la sucesión está acotada por $\sqrt{a} + 1$. Claramente

$$x_1 = \sqrt{a} \leq 1 + \sqrt{a}$$

Por otro lado supuesto que $x_{n-1} \leq 1 + \sqrt{a}$ se tiene que

$$x_n = \sqrt{a + x_{n-1}} \leq \sqrt{a + 1 + \sqrt{a}} \leq \sqrt{a + 1 + 2\sqrt{a}} = \sqrt{(1 + \sqrt{a})^2} = 1 + \sqrt{a}$$

lo que prueba por inducción que efectivamente $1 + \sqrt{a}$ es cota superior de la sucesión.

(iii) Como la sucesión es creciente y acotada entonces podemos suponer la existencia de límite que denotamos por $L = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Luego tomando límite en ambos lados de la identidad

$$\begin{aligned} x_n &= \sqrt{a + x_{n-1}} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a + x_{n-1}} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a + \lim_{n\to\infty} x_{n-1}} \\ \Leftrightarrow & \quad L = \sqrt{a + L} \Leftrightarrow L^2 = a + L \Leftrightarrow L^2 - L - a = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación cuadrática llegamos a que el límite puede tomar dos posibles valores

$$L_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}, \; L_2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2}$$

Descartamos L_2 ya que es negativo y por definición la sucesión (x_n) solamente toma valores positivos para todo n. Por tanto el valor del límite es

$$L = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$$

Solución 15 a) Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 1}{3n^2 + 1} = \frac{2}{3}$$

la serie no puede ser convergente, es decir, su suma es infinito.

d) Es una progresión geométrica de razón $-a$ con $|a| < 1$.

$$1 - a + a^2 - a^3 + ... + (-1)^n a^n + ... = \frac{1}{1 - (-a)} = \frac{1}{1 + a}$$

Obsérvese que también podemos considerar la suma de las dos series geométricas:

$$\begin{aligned} 1 + a^2 + a^4 ... + a^{2n} + ... + a^{2n+1} + ... &= \frac{1}{1-a^2} \\ -(a + a^3 + a^5 + ... + a^{2n+1} + ...) &= -\frac{a}{1-a^2} \end{aligned}$$

con lo que

$$\frac{1}{1-a^2} - \frac{a}{1-a^2} = \frac{1}{1+a}$$

Solución 16 a) Nótese que los numeradores son los números impares y los denominadores los números pares; por tanto $a_n = \frac{2n-1}{2n}$. En la segunda sucesión son los cuadrados más una unidad y los denominadores los términos de una progresión aritmética de primer término 4 y diferencia 3, es decir $4 + (n-1)3 = 3n + 1$; por tanto $b_n = \frac{n^2+1}{3n+1}$.

b) Si es cierto. En efecto, sumando $-l$ a los términos de la desigualadad se tiene

$$0 \leq a_n - l \leq b_n - l \quad \Rightarrow \quad |a_n - l| \leq |b_n - l|$$

Razonemos aplicando la definición de límite que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$ se cumple $|b_n - l| < \varepsilon$ y por tanto $|a_n - l| < \varepsilon$.

c) Sea $\varepsilon > 0$, por la definición de límite existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$ se cumple $|a_n - l| < \varepsilon$. Ahora bien, como

$$|b_n - |l|| = ||a_n| - |l|| \leq |a_n - l|$$

resulta que si $n > n_0$, entonces$|b_n - l| < \varepsilon$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = |l|$. Para probar la desigualdad se ha tenido en cuenta que siempre se verifica

$$||x| - |y|| \leq |x - y| \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}. \tag{24}$$

En el caso que x, y tengan el mismo signo es evidente que la desigualdad (**??**) se da como igualdad. Basta probarlo si x, y tienen distinto signo. En dicho caso si por ejemplo $\bar{y} > 0 > \bar{x}$, se tiene que

$$||\bar{x}| - |\bar{y}|| = |-\bar{x} - \bar{y}| \leq |\bar{x}| + |\bar{y}| = \bar{y} - \bar{x} = |\bar{x} - \bar{y}|$$

Otra forma de probar el ejercicio es a través de la continuidad del valor absoluto como función. Sabemos que función valor absoluto es continua si más que esbozar su gráfica, de facto la desigualdad (**??**) prueba que la función $|\cdot|$ valor absoluto es continua. Y sabemos que si una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces cualquier sucesión $(x_n) \subset \mathbb{R}$ que definamos .ªcercándose.ª x_0, es decir si $x_n \to x_0$, su sucesión de imágenes se acerca a su imagen $f(x_0)$, es decir

$$f(x_n) \to f(x_0).$$

En particular para la función valor absoluto $f(x) = |x|$, si $(a_n) \to l$ entonces

$$b_n = f(a_n) = |a_n| \to f(l) = |l|.$$

La segunda pregunta es falsa. Si $a_n = \{1, -1, 1, -1, 1, -1, ...\}$, entonces $b_n = |a_n| = (1)$. Por tanto $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$, sin embargo es obvio que no existe el límite de (a_n).

d) Por ejemplo: i) No tienen límite (es infinito y menos infinito) $a_n = \frac{n^2}{n+1}$ y $b_n = -n$, sin embargo

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n^2}{n+1} - n\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{-n}{n+1} = -1$$

ii) $a_n = \frac{1}{n},\ n$ (no tiene límite), se tiene

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

iii) $a_n = \frac{n^2}{n+1},\ b_n = n$, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2/(n+1)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+n} = 1$$

e) Los términos de la sucesión (a_n) que cumple, $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$,son

$$(a_n) = \left\{0, \sqrt{2}, \sqrt{\sqrt{2}+2}, \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}+2}+2}, ...\right\}$$

es evidentemente creciente ya que el radicando de cada término es mayor que el del término anterior.

Solución 17 a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-(n+1)^2}{(n+1)n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-2n-1)^2}{n^2+n} = 0$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n(n-1)(n-2)....,2,1} = 0$

c) $(2 + (-1)^n) = \{1, 3, 1, 3, ..., 1, 3, ...\}$ Posee una subsucesión que converge a 1 y otra que converge a 3, por tanto no tiene límite.

d) Dividiendo por 4^n, resulta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^n - (-3)^n}{4^{n+2} + (-3)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - (-\frac{3}{4})^n}{4^2 + (-\frac{3}{4})^n} = \frac{1}{16},$$

ya que $\lim\limits_{n\to\infty} (-\frac{3}{4})^n = 0$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\cos n!}{2n-1} = 0$, ya que

$$0 \leq \left|\frac{\sqrt[3]{n^2}\cos n!}{2n-1}\right| \leq \left|\frac{\sqrt[3]{n^2}}{2n-1}\right| = \left|\frac{n^{2/3}}{2n-1}\right| \to 0$$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^3+2n^2} - \sqrt{n^3+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^3+2n^2}-\sqrt{n^3+1})(\sqrt{n^3+2n^2}+\sqrt{n^3+1})}{\sqrt{n^3+2n^2}+\sqrt{n^3+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2-1}{\sqrt{n^3+2n^2}+\sqrt{n^3+1}} = \infty$

g) Como

$$1+2+3+...+n = \frac{1+n}{2}n,$$

por ser la suma de una progresión aritmetica de diferencia 1, resulta

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+3+...+n}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

Solución 18 a) La sucesión (a_n) es monótona creciente. En efecto, teniendo en cuenta el binomio de Newton resulta

$$\begin{aligned}
a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+..........+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n} = \\
&= 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\frac{n(n-1)}{n^2}+......................+\frac{1}{n!}\frac{n(n-1)...,1}{n^n} = \\
&= 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+............+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n}\right) < \\
&< 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+......+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+ \\
&\quad +\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)...\left(1-\frac{n}{n+1}\right) = a_{n+1}
\end{aligned}$$

La sucesión está acotada

$$\begin{aligned}
a_n &< 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+............+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n}\right) < \\
&< 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+....+\frac{1}{n!} < 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+....\frac{1}{2^{n-1}} = \\
&= 2+\frac{\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1} = 3-\frac{1}{2^{n-1}} < 3
\end{aligned}$$

b) La sucesión (a'_n) es monótona decreciente. En efecto,

$$\left(1-\frac{1}{n}\right) < \left(1-\frac{1}{n+1}\right) \Rightarrow \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-1} < \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-1} \Rightarrow$$
$$a'_{n+1} = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)} < \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = a'_n$$

además, es evidente que (a'_n) está acotada inferiormente ya que

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} > \frac{1}{1^n} = 1$$

y por tanto tiene límite $l > 0$.

c) Razonemos que $(a_n) - (a'_n)$ tiene límite 0, o lo que es equivalente que $\left(\frac{a_n}{a'_n}\right)$ tiene límite 1. En efecto, consideremos la sucesión

$$c_n = \left(\frac{a_n}{a'_n}\right) = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n =$$
$$= \left[\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\right]^{\frac{n}{n}} = \left[\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-n^2}\right]^{-\frac{1}{n}}$$

Por el apartado anterior sabemos que la sucesión $(a'_n) = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-n}$ tiene un determinado límite $l > 0$, como $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-n^2}$ es una subsucesión de (a'_n) también tiene límite l, y resulta

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-n^2}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty} -\frac{1}{n}} = l^0 = 1$$

d) Como $(b_n) \to \infty$, $n \in N$ existe n_k tal que $b_{n_k} \geq n$, por tanto $\dfrac{1}{n} \geq \dfrac{1}{b_{n_k}}$. Teniendo en cuenta que $n_k \to \infty$ cuando $n \to \infty$, resulta

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \left(1+\frac{1}{b_{n_k}}\right)^{b_{n_k}} \Rightarrow e \geq \lim_{n_k\to\infty}\left(1+\frac{1}{b_{n_k}}\right)^{b_{n_k}}$$

Por otro lado, como $(n) \to \infty$, para cada $b_n > 0$ existe $n_k \geq b_n$, por tanto $\dfrac{1}{b_n} \geq \dfrac{1}{n_k}$. Teniendo en cuenta que $n_k \to \infty$ cuando $b_n \to \infty$, resulta

$$\left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n} \geq \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n} \geq e$$

Como consecuencia de ambas desigualdades

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n} = e$$

e) Como $\dfrac{n^2+2}{n^2+3} = 1 - \dfrac{1}{n^2+3}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2}{n^2+3}\right)^{2n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2+3}\right)^{-(n^2+3)\frac{2n^2}{-(n^2+3)}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} -\frac{2n^2}{n^2+3}} = e^{-2}$$

Como $\dfrac{n^2+2n+1}{n^2} = 1 + \dfrac{1}{b_n}$, en donde $b_n = \dfrac{n^2}{2n+1} \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n \frac{n}{b_n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n}} = e^2$$

Solución 19 a) Es una progresión geométrica de razón $\frac{1}{3}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3^{n-1}} = \frac{5}{1-\frac{1}{3}} = \frac{15}{2}$$

b) Es una serie telescópica: $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ con $b_n = \frac{1}{n}$. Como $b_1 = 1$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, resulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

:

Solución 20 Por el teorema de caracterización del límite por sucesiones, si consideramos las sucesiones $x_n = \frac{1}{2\pi n}$ y $x'_n = \frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}$ convergentes a 0, resulta que el límite de las imágenes de cada sucesión es distinto y no existe el límite. En efecto:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f(x_n) &= \lim_{n\to\infty} \cos\frac{1}{1/2\pi n} = \lim_{n\to\infty} 2\pi n = 1\\
\lim_{n\to\infty} f(x'_n) &= \lim_{n\to\infty} \cos\frac{1}{1/(2\pi n+\frac{\pi}{2})} = \lim_{n\to\infty} \cos(2\pi n + \frac{\pi}{2}) = 0
\end{aligned}$$

De manera análoga

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} g(x_n) &= \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2\pi n}\right)^2 + \operatorname{sen}\frac{1}{1/2\pi n}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2\pi n}\right)^2 + \operatorname{sen} 2\pi n\right] = 0\\
\lim_{n\to\infty} g(x'_n) &= \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}\right)^2 + \operatorname{sen}\frac{1}{1/(2\pi n+\frac{\pi}{2})}\right] = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = 1
\end{aligned}$$

Solución 21 La función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(x^2 + x + 3) & \text{si } \; 0 \leq x \leq 1 \\ e^x \;\; \text{si } \; 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

no es continua en $x = 1$, ya que no existe el límite de la función en el punto. En efecto:

$$\lim_{x \to 1,\; x<1} f(x) = \frac{5}{3} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1,\; x>1} f(x) = e$$

Solución 22 a) Como $\sqrt{x} = \cos f(x)$ y $\mathit{sen}\, f(x) = \sqrt{1 - \cos^2 f(x)} = \sqrt{1-x}$, derivando la igualdad resulta

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} = [-\operatorname{sen} f(x)]\, f'(x) \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x - x^2}}$$

b) Expresando

$$\frac{1}{\operatorname{arcsen} \sqrt{x}} = (f \circ g)(x)$$

como composición de dos funciones

$$\begin{aligned} f(x) &= arc\operatorname{sen} x,\; f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ g(x) &= \sqrt{x},\; g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

aplicando la regla de la cadena se tiene

$$\frac{d}{dx}\left(\operatorname{arcsen}\sqrt{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}^2}}\,\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$$

Luego

$$\frac{d}{dx}\left(\ln\,\operatorname{arcsen}\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}} : \frac{1}{\operatorname{arcsen}\sqrt{x}} = \frac{1}{\operatorname{arcsen}\sqrt{x}2\sqrt{x-x^2}}$$

c) Aplicando la regla de la cadena y la derivada de un cociente, se tiene

$$f'(x) = \frac{1+\ln x}{1-\ln x}\,\frac{(1+\ln x)\left(-\frac{1}{x}\right)-(1-\ln x)\left(\frac{1}{x}\right)}{(1+\ln x)^2} = -\frac{2}{x(1-(\ln x)^2)}$$

Solución 23 a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{sen}x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x + x\cos x}{\operatorname{sen}x} = 1+\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen}x}\cos x = 2$$

b)

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^4+2x^3-2x^2-3x+2}{x^3+2x^2-x-2} = \lim_{x\to -2}\frac{4x^3+6x^2-4x-3}{3x^2+4x-1} = \frac{-3}{3} = -1$$

c)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos 2x}2(-\operatorname{sen}2x)}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-2}{\cos 2x}\,\frac{\operatorname{sen}2x}{2x} = -2$$

ya que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}2x}{2x} = 1.$

Solución 24 Teniendo en cuenta que las derivadas de orden cuatro o mayor son todas cero, el desarrollo de Taylor de $p(x)$ en un entorno de $x = -1$ es

$$p(x) = p(-1) + p'(-1)(x+1) + \frac{1}{2!}p''(-1)(x+1)^2 + \frac{1}{3!}p'''(-1)(x+1)^3$$

Como

$$\begin{aligned} p(-1) &= 3 \\ p'(x) &= 3x^2 + 4x - 1, \quad p'(-1) = -2 \\ p''(x) &= 6x + 4, \quad p''(-1) = -2 \\ p'''(x) &= 6, \quad p'''(-1) = 6 \end{aligned}$$

resulta

$$p(x) = 3 - 2(x+1) - (x+1)^2 + (x+1)^3$$

Solución 25 El polinomio de Taylor de orden cuatro de la función es

$$P_4(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{4} \frac{1}{n!} f^{n)}(0)(x-0)^n$$

Como

$$\begin{aligned} f(0) = -1, \quad f'(x) &= \cos x + 2\operatorname{sen} 2x, \quad f'(0) = 1 \\ f''(x) &= -\operatorname{sen} x + 4\cos 2x, \quad f''(0) = 4 \\ f'''(x) &= -\cos x - 8\operatorname{sen} 2x, \quad f'''(0) = -1 \\ f^{iv}(x) &= \operatorname{sen} x - 16\cos 2x, \quad f^{iv}(0) = -16 \end{aligned}$$

resulta

$$P_4(x) = -1 + x + 2x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{2}{3}x^4$$

Una cota del error cometido al sustituir $f(x)$ por $P_4(x)$ en $[-1,1]$ es una cota del resto $R_5(x)$.

$$|f(x)-P_4(x)| = |R_5(x)| = \left|\frac{1}{5!}f^{v}(\theta)x^5\right| = \left|\frac{1}{5!}(\cos\theta + 32\operatorname{sen}2\theta)x^5\right| \leq \frac{1}{5!}33 = \frac{11}{40}$$

en donde $\theta \in [-1,1]$. Como $|\cos\theta + 32\operatorname{sen}2\theta| \leq 33$ para todo $\theta \in [-1,1]$, de lo anterior se tiene

$$|f(x)-P_4(x)| = \left|\frac{1}{5!}(\cos\theta + 32\operatorname{sen}2\theta)x^5\right| \leq \frac{1}{5!}33 = \frac{11}{40}.$$

Solución 26 Obsérvese que para $x \to -\infty$, $f(x) \to -\infty$ y para $x \to +\infty$, $f(x) \to +\infty$.

Los puntos de corte con los ejes son $(0,0)$, $\left(\frac{3}{2},0\right)$ ya que

$$x = 0 \Rightarrow y = 0$$
$$y = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ y } x = \frac{3}{2}$$

Estudiamos los máximos y mínimos a través de las derivadas. Como

$$f'(x) = x^2 - x = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 1,$$
$$f''(x) = 2x - 1,\ f''(0) = -1 < 0 \text{ y } f''(1) = 1 > 0,$$

el punto $x = 0$ es un máximo y $f(0) = 0$. Del mismo modo que $x = 1$ es un mínimo y $f(1) = -\frac{1}{6}$.

Determinemos los intervalos de crecimiento, en $(-\infty, 0]$ y $[1,\infty]$ crece, mientras que $[0,1]$ decrece,

Como

$$f''(x) = 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1/2,\ f'''(x) = 2 \neq 0$$

entonces $x = 1/2$ es un punto de inflexión.

En $(-\infty, 1/2)$ la derivada segunda es negativa luego f es cóncava mientras que en $(1/2,\infty)$ es convexa por ser la derivada segunda positiva.

Solución 27 Los puntos de corte de la recta con los ejes son $(a, 0)$ y $(0, b)$, en donde tenemos que suponer $a > 0$ y $b > 0$. La ecuación de la recta que pasa por estos puntos es

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Como también pasa por $(2, 3)$ resulta

$$\frac{2}{a} + \frac{3}{b} = 1 \Rightarrow a = \frac{2b}{b-3}$$

con lo que tenemos que hacer mínima la función

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{b^2}{b-3}$$

Igualando la primera derivada a 0, se obtienen los posibles valores de extremo.

$$S'(b) = b\frac{b-6}{(b-3)^2} = 0 \Rightarrow b = 0 \text{ y } b = 6$$

Como $S''(b) = \frac{18}{(b-3)^3}$ y $S''(6) > 0$, entonces $b = 6$ es un mínimo. Por tanto $a = 4$ y la ecuación de la recta que buscamos es $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{6} = 1$.

Solución 28 La función es claramente continua en todo punto $x \neq 0$ ya que en dicho dominio es el producto de funciones continuas. Por otra parte en el punto $x = 0$ la función no es continua ya que por ejemplo si tomamos $a_n = \frac{1}{n}$ entonces $(a_n) \to 0$ y

$$f(a_n) = \frac{1}{n}e^n \to \infty$$

Solución 29 Para que exista derivada en el punto $x = 2$ se debe verificar que existe el límite

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}.$$

Podemos comprobar que los límite laterales por la derecha

$$\begin{aligned} f'^{+}(x) &= \lim_{h\to 0, h>0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0, h>0} \frac{\frac{h}{1+e^{\frac{1}{h}}}}{h} = \lim_{h\to 0, h>0} \frac{\frac{h}{1+e^{\frac{1}{h}}}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0, h>0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{h}}} = \frac{1}{1+\lim\limits_{h\to 0, h>0} e^{\frac{1}{h}}} = \frac{1}{1+e^{\infty}} = \frac{1}{1+\infty} = 0 \end{aligned}$$

y por la izquierda no coinciden

$$\begin{aligned} f'^{-}(x) &= \lim_{h\to 0, h>0} \frac{f(2-h)-f(2)}{-h} = \lim_{h\to 0, h>0} \frac{\frac{-h}{1+e^{\frac{1}{-h}}}}{-h} = \lim_{h\to 0, h>0} \frac{\frac{-h}{1+e^{\frac{1}{-h}}}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0, h>0} \frac{1}{1+e^{\frac{-1}{h}}} = \frac{1}{1+\lim\limits_{h\to 0, h>0} e^{\frac{-1}{h}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{e^{\infty}}} = \frac{1}{1+0} = 1 \end{aligned}$$

por tanto el límite no existe y concluímos que la función f no es derivable en el punto $x = 2$.

Solución 30 Al ser un polinomio de grado 3, el desarrollo de Taylor de p en $x = -2$ de orden 3 coincide con el mismo polinomio. Luego

$$p(x) = p(-2) + p'(-2)(x+2) + \frac{p''(-2)}{2!}(x+2)^2 + \frac{p''(-2)}{3!}(x+2)^3$$

Como

$$\begin{aligned} &p(-2) = (-2)^3 - 2(-2)^2 + (-2) - 12 = -30 \\ &p'(-2) = [3x^2 - 4x + 1]_{x=-2} = 3(-2)^2 - 4(-2) + 1 = 21 \\ &p''(-2) = [6x - 4]_{x=-2} = 6(-2) - 4 = -16 \\ &p'''(-2) = 6 \end{aligned}$$

Por tanto

$$p(x) = -30 + 21(x+2) - 8(x+2)^2 + (x+2)^3$$

Solución 31 Denotemos por L el límite a calcular. Tenemos que

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2\operatorname{sen}x - \operatorname{sen}^3 x}{x^5} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\frac{x^2 - \operatorname{sen}^2 x}{x^4} = \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{x - \operatorname{sen}^2 x}{x^4} \end{aligned}$$

Calculamos los dos límites independientemente. El primero es una aplicación inmediata de la Regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1$$

El segundo también lo calculamos mediante dicha regla, derivando una vez

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2 - \operatorname{sen}^2 x}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{2x - 2\operatorname{sen}x\cos x}{4x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{2x - \operatorname{sen}2x}{4x^3}$$

Volvemos aplicar L'Hôpital (derivando en este caso en dos ocasiones)

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x - \operatorname{sen}2x}{4x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{2 - 2\cos 2x}{12x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{4\operatorname{sen}2x}{24x} = \lim_{x\to 0}\frac{8\cos 2x}{24} = \frac{8\cos 0}{24} = \frac{1}{3}$$

Por tanto

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{x - \operatorname{sen}^2 x}{x^4} = 1\times\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Solución 32 Las derivadas en el punto $x = 0$ vienen dadas por

$$\begin{aligned} f(0) &= \cos(xe^x)\big]_{x=0} = \cos 0 = 1 \\ f'(0) &= -\left(xe^x\right)'\operatorname{sen}(xe^x)\big]_{x=0} = -e^x(1+x)\operatorname{sen}(xe^x)\big]_{x=0} = -\operatorname{sen}0 = 0 \\ f''(0) &= -e^x(2+x)\operatorname{sen}(xe^x) - e^{2x}(1+x)^2\cos(xe^x)\big]_{x=0} = -1 \end{aligned}$$

El polinomio de Taylor viene dado por

$$p_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 = 1 - \frac{x^2}{2}$$

Solución 33 Basta simplificar

$$\frac{e^x - e^y}{e^{x-y} - 1} = e^y \frac{e^{x-y} - 1}{e^{x-y} - 1} = e^y$$

y tomar límite directamente

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{e^x - e^y}{e^{x-y} - 1} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} e^y = e.$$

Solución 34 Aplicamos directamente la definición de derivada. Como

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{\frac{e^h - 1}{h} - 1}{h} = \frac{e^h - 1 - h}{h^2} = \frac{e^h - 1 - h}{h^2}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1 - h}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(e^h - 1 - h\right)'}{\left(h^2\right)'} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(e^h - 1\right)'}{(2h)'} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{e^h}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

en donde hemos aplicado dos veces consecutivamente la regla de L'Hôpital.

Solución 35 (i) Al ser f un polinomio de grado 4 su polinomio de Taylor p_4 de grado 4 en el punto $x = -1$ coincide con f y está expresado en potencias de $x + 1$. Se trata por tanto de calcular dicho polinomio p_4. Calculamos las derivadas

$$\begin{aligned}
&f(-1) = 0, \\
&f'(-1) = \left[4x^3\right]_{x=-1} = -4, \\
&f''(-1) = \left[12x^2\right]_{x=-1} = 12, \\
&f'''(-1) = \left[24x\right]_{x=-1} = -24, \\
&f^{(4}(-1) = 24.
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} f(x) &= p_4(x) = 24\frac{(x+1)^4}{4!} - 24\frac{(x+1)^3}{3!} + 12\frac{(x+1)^2}{2!} - 4(x+1) + 0 \\ &= (x+1)^4 - 4(x+1)^3 + 6(x+1)^2 - 4(x+1) \end{aligned}$$

(ii) Es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, calculamos el límite aplicando la regla de L'Hopital (p. 172 libro de texto)

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 0} \frac{3-\sqrt{2x+9}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(3-\sqrt{2x+9}\right)'}{(2x)'} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-\dfrac{2}{2\sqrt{2x+9}}}{2} = \frac{-\dfrac{2}{2\sqrt{0+9}}}{2} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

(iii) Aplicando propiedades de límites directamente

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to\infty} \frac{x\cos(\frac{x+1}{x})}{1+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x} \lim_{x\to\infty} \cos(\frac{x+1}{x}) \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x} \cos(\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x}) = 1\cdot\cos 1, \end{aligned}$$

en donde también hemos aplicado que la función coseno es continua.

(iv) Aplicamos directamente la definición de derivada

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\,|h|}{h} = \lim_{h\to 0} |h| = 0.$$

Capítulo 7. La integral de Riemann

ENUNCIADOS

Ejercicio 1 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x & \text{si } 1 < x \leq 2, \end{cases}$$

señale el valor de la integral

$$\int_0^2 f(x)^2 dx$$

Ejercicio 2 Para todo $a > 0$, pruebe lo siguiente

$$\int_0^a x^3 f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} x f(x) dx$$

Ejercicio 3 Calcule la integral

$$\int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5 - 4x}}$$

Ejercicio 4 Probar que para cualquier n se cumple $\left| \int_0^1 \frac{2x \operatorname{sen} nx}{x^2 + 1} dx \right| \leq \ln 2.$

Ejercicio 5 Integración de funciones racionales en a^x, $a > 0$. Se hace el cambio $x = \log_a t$. Integrar

$$\int \frac{2^x}{4^x + 1} dx$$

Ejercicio 6 Determinar el volumen del cuerpo engendrado por $y = 2\sqrt{\operatorname{sen} x} \cos x, 0 \leq x \leq \pi/2$ al girar alrededor del eje $0x$.

Ejercicio 7 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida como

$$f(x) = \int_0^{2-x} \frac{u^3}{1+u^2} du$$

Calcule el valor de la derivada $f'(1)$.

Ejercicio 8 Pruébese que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 nx}{x^4+n^2} dx$ es cero.

Indicación. Acótese el valor absoluto de la integral por la integral del valor absoluto y esta integral por el término de una sucesión que converge a cero

Ejercicio 9 Razónese mediante el teorema de Lebesgue si son integrables o no las siguientes funciones.

a) $f : [0, n] \to R$ definida por $f(x) = x^2$ si $0 \leq x < 1, f(x) = x^3$ si $1 \leq x < 2$,,....., $f(x) = x^{n+1}$ si $n - 1 \leq x < n$.

b) $f : [-1, 1] \to R$ definida por $f(x) = 2x + 1$ si x es racional y $f(x) = x^2$ si x es irracional.

Ejercicio 10 Determínese mediante una integral el valor del límite de la sucesión.

$$a_n = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + ... + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$$

Ejercicio 11 Dada la función $f(x) = x^2 - x - 1$, encontrar el punto $c \in [0, 1]$ que verifica el teorema del valor medio del cálculo integral en el intervalo $[0, 1]$.

Ejercicio 12 Calcular las siguiente integral

$$I = \int \frac{xdx}{(x+1)^2(x^2+1)}$$

Ejercicio 13 Integrar por partes la siguiente integral $I = \int e^{2x}\, sen\, 3xdx$.

Ejercicio 14 Calcule la siguiente integral trigonométrica $I = \int sen\,3x \cos 5x dx$.

Ejercicio 15 Calcule la integral $I = \int \dfrac{dx}{e^x + e^{-x}}$ utilizando el cambio $t = e^x$.

Ejercicio 16 Determínese el área del recinto limitado por las curvas $y = 1 - x^2$, $y = -1 + x^2$.

Ejercicio 17 Demostrar, razonando mediante la definición, que la función $f(x) = x^2$ es integrable en el intervalo $[0, 1]$ y calcular el valor de la integral.

Ejercicio 18 Señale el valor de la integral

$$I = \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx.$$

Ejercicio 19 Sea la función $f(x) = \left(1 - \dfrac{x}{2}\right)^{-3}$, señale el valor de la integral

$$I = \int_0^1 f(x) dx.$$

Ejercicio 20 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida como

$$f(x) = \int_0^{2-\ln x} ue^u du$$

Calcule el valor de la derivada $f'(1)$.

Ejercicio 21 Determínese $\int_0^1 x^3 dx$ como límite de una sucesión de sumas.

Ejercicio 22 Calcular las siguientes integrales.

a) $\int \dfrac{1}{x(x+1)} dx$

b) $\int \dfrac{3x+5}{x^2+2x+2} dx$

Ejercicio 23 Integrar por partes.

a) $\int \ln x dx$

b) $\int arcsen\ x dx$

c) $\int x^2\, sen\,(x+2) dx$

Ejercicio 24 Calcular las siguientes integrales de funciones trigonométricas.

a) $\int \frac{\cos x}{\text{sen}^4 x} dx$

b) $\int \frac{1}{\cos x + \text{sen} x} dx$

Ejercicio 25 Resolver las integrales mediante los cambios indicados.

a) $\int \frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-1} dx$, cambio $x-1 = \frac{1}{\cos u}$.

b) $\int (x+2)\, sen\,(x^2+4x-6) dx$, cambio $x^2+4x-6 = u$.

Ejercicio 26 Determínese mediante integrales el área del círculo limitado por la circunferencia de ecuación $x^2+y^2=9$,

Ejercicio 27 Determínese el área del recinto limitado por la curva $y=(x-1)^2$ y la recta $y=x+1$.

Ejercicio 28 Señale el valor de las siguientes integrales:

(i) $I_1 = \int_{-1}^{1} \frac{x^4-1}{x^2+1} dx$

(ii) $I_2 = \int_0^1 \frac{x dx}{(1+x^2)^4}$

SOLUCIONES

Solución 1 Teniendo en cuenta la definición de la función, integramos directamente.

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)^2 dx &= \int_0^1 (x^2)^2 dx + \int_1^2 (2-x)^2 dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_{x=0}^{x=1} + \left[\frac{(2-x)^3}{-3}\right]_{x=1}^{x=2} \\ &= \frac{1}{5} - 0 + \frac{(2-2)^3}{-3} - \frac{(2-1)^3}{-3} = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{8}{15}\end{aligned}$$

Solución 2 Se trata de considerar el cambio de variable $x = g(s) = \sqrt{s}$, y aplicar el teorema de cambio de variable del Cálculo Integral (p. 211 libro de texto).

Como $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{s}}$, $g(0) = 0$, $g(a^2) = a$, se tiene

$$\int_0^a x^3 f(x^2) dx = \int_0^{a^2} \sqrt{s}^3 g(s) \frac{1}{2\sqrt{s}} ds = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} \sqrt{s}^2 g(s) ds = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} sg(s) ds$$

lo que prueba el resultado. Téngase en cuenta que es indistinto la variable de integración, es decir

$$\frac{1}{2} \int_0^{a^2} sg(s) ds \equiv \frac{1}{2} \int_0^{a^2} xg(x) ds$$

Solución 3 Integramos por partes, en este sentido consideramos

$$u = x, \;\; du = \frac{dx}{\sqrt{5-4x}}$$

De esta manera

$$du = dx, u = \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x}} = -\frac{1}{2}\sqrt{5-4x}$$

Operando

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} \tfrac{xdx}{\sqrt{5-4x}} = \left[-\tfrac{1}{2}x\sqrt{5-4x}\right]_{x=-1}^{x=1} - \int_{-1}^{1}\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{5-4x}\right)dx = \\
&= \ -\tfrac{1}{2}\sqrt{5-4} - \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{5+4}\right) - \left[\tfrac{1}{12}\left(5-4x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{x=-1}^{x=1} \\
&= -\tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2} - \left(\tfrac{1}{12}\left(5-4\right)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{12}\left(5+4\right)^{\frac{3}{2}}\right) \\
&= -2 - \left(\tfrac{1}{12} - \tfrac{9}{4}\right) = -2 + \tfrac{13}{6} = \tfrac{1}{6}
\end{aligned}$$

Solución 4 Teniendo en cuenta

$$|2x \operatorname{sen} nx| \leq 2x\,|\operatorname{sen} nx| \ \text{ para todo } x \in [0,1],$$

la cota sobre la integral se prueba aplicando las propiedades elementales de la integral (pp 199-200 libro de texto)

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 \frac{2x \operatorname{sen} nx}{x^2+1}dx\right| &\leq \int_0^1 \left|\frac{2x \operatorname{sen} nx}{x^2+1}\right| dx \leq \int_0^1 \left|\frac{2x}{x^2+1}\right| dx = \\
&= \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx = \left[\ln(x^2+1)\right]_{x=0}^{x=1} = \ln(2) - \ln 1 \\
&= \ln 2
\end{aligned}$$

Solución 5 En este caso se elige $a = 2$, y el cambio de variable determinado por la función $x \equiv g(t) = \log_2 t$. Téngase en cuenta que

$$t = 2^x$$

Su derivada viene dada por

$$g'(t) = \frac{\log_a e}{t}$$

Asimismo se tiene

$$2^{\log_2 t} = t,\ 2^{2\log_2 t} = \left(2^{\log_2 t}\right)^2 = t^2$$

Con todo esto, aplicamos el teorema de cambio de variable (p. 211 libro de texto) para calcular la integral

$$\int \frac{2^x}{4^x+1}dx = \int \frac{t}{t^2+1}\frac{\log_a e}{t}dt = \log_a e \int \frac{dt}{t^2+1} = \log_a e \cdot \operatorname{arc\,tg} t \ + C$$

en donde C constante arbitraria. Deshaciendo el cambio, $t = 2^x$, se tiene finalmente

$$\int \frac{2^x}{4^x+1}dx = \log_a e \cdot arctg 2^x + C$$

Solución 6 Basta aplicar la fórmula (p. 217 libro de texto)

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi f(x)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi f(x)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi \left(2\sqrt{\operatorname{sen} x}\cos x\right)^2 dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi 4 \operatorname{sen} x \cos^2 x dx = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \cos^2 x dx = \\ &= 4\pi \left[\frac{-\cos^3 x}{3}\right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = 4\pi \left(\frac{-\cos^3 \frac{\pi}{2} + \cos^3 0}{3}\right) = 4\pi \left(\frac{0+1}{3}\right) \\ &= \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

Solución 7 Lo resolvemos aplicando la regla de la cadena y el Teorema Fundamental del Cálculo Integral (pp 208-9 libro de texto). De este modo

$$f(x) = (h \circ g)(x)$$

en donde hemos considerado las funciones

$$g(x) = 2 - x,\ h(y) = \int_0^y \frac{u^3}{1+u^2}du$$

Por la regla de la cadena se tiene

$$f'(x) = h'(g(1))g'(1).$$

Como $g(1) = 1$, $g'(x) = -1$ y $h'(y) = \dfrac{y^3}{1+y^2}$ por el Teorema Fundamental del Cálculo Integral, finalmente

$$f'(1) = h'(g(1))g'(1) = -h'(1) = -\frac{1^3}{1+1^2} = \frac{-1}{2}.$$

Solución 8 Como la función coseno toma valores en el intervalo $[-1,1]$ en general se tiene que

$$\left|\cos^2 nx\right| \leq 1$$

Además como $n^2 \leq x^4 + n^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ entonces

$$\frac{1}{x^4+n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

Teniendo estas dos acotaciones se cumple

$$\left|\frac{\cos^2 nx}{x^4+n^2}\right| \leq \left|\frac{1}{x^4+n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

Aplicando propiedad de las funciones integrables (véase p.200)

$$\left|\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 nx}{x^4+n^2} dx\right| \leq \int_0^{2\pi} \left|\frac{\cos^2 nx}{x^4+n^2}\right| dx \leq \int_0^{2\pi} \frac{1}{n^2} dx = \frac{1}{n^2}\int_0^{2\pi} dx = \frac{2\pi}{n^2} \tag{25}$$

Como $\dfrac{2\pi}{n^2} \to 0$ de (**??**) se deduce $\left|\int_0^{2\pi} \dfrac{\cos^2 nx}{x^4+n^2} dx\right| \to 0$ y esto prueba que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 nx}{x^4+n^2} dx = 0$$

Solución 9 El teorema de Lebesgue nos dice que una función es integrable si el conjunto de los puntos de discontinuidad tiene medida (longitud) nula (véase p.197-8). En el caso del ejemplo a) el conjunto de puntos de discontinuidad es

$$D = \{n : n \in \mathbb{N}\}$$

Como D_a es un conjunto numerable, tiene medida nula luego por el teorema de Lebesgue la función es integrable.

En el caso del ejemplo b) el conjunto de discontinuidad es todo $\mathbb{R}$ que tiene longitud infinita. Por tanto la función de dicho apartado no es integrable.

Solución 10 Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos P_n la partición

$$P_n = \left\{ \frac{i}{n} : i = 0, 1, ..., n \right\}$$

que determina n subintervalos $I_i = [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ $(i = 1, ..., n)$ en el intervalo $[0, 1]$ con diámetro

$$\|P_n\| = \frac{1}{n} \to 0$$

tendiendo a cero. Por otro lado

$$a_n = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + ... + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}} + ... + \sqrt{\frac{i}{n}} + ... + \sqrt{\frac{n}{n}}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) = S(f, P_n)$$

en donde $f(x) = \sqrt{x}$ y hemos tenido en cuenta que

$$\max_{x \in I_i} \sqrt{x} = \sqrt{\frac{i}{n}}$$

Como

$$\int_0^1 f(s)ds = \lim_{n\to\infty} S(f, P_n)$$

y $S(f, P_n) = a_n$ se tiene

$$\int_0^1 \sqrt{s}ds = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + ... + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$$

Por otro lado

$$\int_0^1 \sqrt{s}ds = \left[\frac{s^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{s=0}^{s=1} = \frac{2}{3}$$

Luego

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + ... + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{2}{3}$$

Solución 11 La función f es continua por ser un polinomio, luego podemos aplicar el teorema del valor medio del cálculo integral que nos asegura la existencia de al menos un $c \in [0,1]$ verificando

$$\int_0^1 f(x)dx = f(c)(1-0) \tag{26}$$

Como

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x^2 - x - 1)dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1} - [x]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{7}{6}$$

Sustituyendo en (**??**) se tiene

$$\begin{aligned} -\frac{7}{6} &= c^2 - c - 1 \Leftrightarrow c^2 - c - 1 + \frac{7}{6} = 0 \Leftrightarrow c^2 - c + \frac{1}{6} = 0 \\ &\Leftrightarrow 6c^2 - 6c + 1 = 0 \end{aligned}$$

que tiene como raíces $c_1 = \frac{1}{6}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \approx 0,78868$, $c_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{3} \approx 0,211\,32$ que están en el intervalo $[0,1]$ y cualesquiera de ellas vale como punto c

Solución 12 Es una integral racional, aplicamos los métodos de descomposición (p. 215 libro texto). Las raíces del denominador $(x+1)^2(x^2+1)$ son $x_1 = 1$ (raíz doble), $x_2 = \pm i$ (raíz imaginaria) luego descomponemos

$$\frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A_1}{(x+1)} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Esto es equivalente a

$$\frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A_1(x+1)(x^2+1) + A_2(x^2+1) + (Cx+D)(x+1)^2}{(x+1)^2(x^2+1)}$$

Igualando los numeradores

$$\begin{aligned} x &= A_1(x+1)(x^2+1) + A_2(x^2+1) + (Cx+D)(x+1)^2 = D + A_1 + A_2 + x(2D + A_1 + C) + \\ & x^2(2C + D + A_1 + A_2) + x^3(A_1 + C) \end{aligned}$$

Igualando coeficientes

$$\begin{aligned} D + A_1 + A_2 &= 0 \\ 2D + A_1 + C &= 1 \\ 2C + D + A_1 + A_2 &= 0 \\ A_1 + C &= 0 \end{aligned}$$

que tiene como solución $A_1 = 0,\ A_2 = -\frac{1}{2},\ C = 0,\ D = \frac{1}{2}$. Luego

$$\frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{-1}{2(x+1)^2} + \frac{1}{2(x^2+1)}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \int \frac{xdx}{(x+1)^2(x^2+1)} &= -\int \frac{dx}{2(x+1)^2} + \int \frac{dx}{2(x^2+1)} \\ &= \frac{1}{2\,(x+1)} + \frac{1}{2} arctagx + C \end{aligned}$$

Solución 13 La formula de integración por partes nos dice que dadas funciones u, v entonces

$$\int u'vdx = uv - \int uv'dx$$

Denotemos $I = \int e^{2x}\, sen\, 3xdx$. Si $v = e^{2x}$, $u' = sen\, 3x$ entonces $v' = 2e^{2x}$, $u = -\frac{1}{3}\cos 3x$. Luego aplicando la fórmula se tiene

$$\begin{aligned} I &= \int e^{2x}\, sen\, 3xdx = (e^{2x})\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right) - \int \left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right) 2e^{2x}dx = \qquad (27) \\ &= -\frac{e^{2x}}{3}\cos 3x + \frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3xdx \end{aligned}$$

Si denotamos la integral $I_2 = \int e^{2x}\cos 3x dx$, volvemos a aplicar la fórmula por partes con $v = e^{2x}$, $u' = \cos 3x$ en este caso, $v' = 2e^{2x}$, $u = \frac{1}{3}sen3x$. Entonces

$$I_2 = \left(\frac{1}{3}sen3x\right)e^{2x} - \int\left(\frac{1}{3}sen3x\right)2e^{2x}dx = \frac{e^{2x}}{3}sen3x - \frac{2}{3}I \tag{28}$$

Por tanto sustituyendo (**??**) en (**??**) se tiene

$$\begin{aligned} I &= -\frac{e^{2x}}{3}\cos 3x + \frac{2}{3}\left(\frac{e^{2x}}{3}sen3x - \frac{2}{3}I\right) = \\ &= -\frac{e^{2x}}{3}\cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x}sen3x - \frac{4}{9}I \end{aligned}$$

Luego

$$\frac{13}{9}I = -\frac{e^{2x}}{3}\cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x}sen3x$$

y finalmente

$$I = -\frac{3e^{2x}}{13}\cos 3x + \frac{2}{13}e^{2x}sen3x + C$$

en donde C es una constante.

Solución 14 Utilizamos la siguiente identidad trignométrica

$$\cos x seny = \frac{sen(x+y) - sen(x-y)}{2}$$

Por tanto

$$\cos 5x\cos 3x = \frac{sen(8x) - sen(2x)}{2}$$

Por tanto

$$I = \int sen\, 3x\cos 5x dx = \int \frac{sen(8x) - sen(2x)}{2}dx = \frac{-\cos(8x)}{16} + \frac{\cos(2x)}{4} + C$$

en donde C constante.

Solución 15 Como $t = e^x$, entonces $x = \ln t$. Luego aplicando teorema del cambio de variable (véase p. 211 libro de texto) con $x = g(t) = \ln t$, se tiene $g'(t) = \frac{1}{t}$ y por tanto

$$I = \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{\frac{1}{t}dt}{t + t^{-1}} = \int \frac{\frac{1}{t}dt}{t + t^{-1}} = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = arctagt + C = arctage^x + C =$$

en donde C constante.

Solución 16 Represéntese en primer lugar el recinto. Los puntos de corte se obtienen resolviendo el sistema resultante de igualar las dos curvas

$$\begin{aligned} 1 - x^2 &= -1 + x^2 \Leftrightarrow \\ 2x^2 &= 2 \Leftrightarrow x = \pm 1 \end{aligned}$$

Por tanto las rectas se cortan en los puntos $x = -1$, $x = 1$ y el recinto del que queremos calcular su área se corresponde con

$$\{-1 \leq x \leq 1, \ -1 + x^2 \leq y \leq 1 - x^2\}$$

El área se corresponde con la suma de las áreas de dos subrecintos, el primero el límitado por el grafo de la función $y_1 = 1 - x^2$ con el eje coordenadas que viene dada por la integral (véase intepretación gráfica de la integral p. 217 libro texto)

$$I_1 = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)dx = \frac{4}{3}$$

El segundo viene determinado por el grafo de la función $y_2 = -1 + x^2$

$$I_2 = \int_{-1}^{1} -(-1 + x^2)dx = \frac{4}{3}$$

en donde hemos considerado el signo menos ya que la función y_2 es negativa. Por tanto el área total viene dada por la suma de las dos

$$Area = I_1 + I_2 = \frac{8}{3}$$

Solución 17 Dada una partición cualquiera P del intervalo $[0,1]$, teniendo en cuenta que su longitud es 1 y el máximo que alcanza la función tambien es uno, se cumple

$$0 \leq s(f,P) \leq S(f,P) \leq 1$$

Con lo cual existen las

$$\begin{aligned} \sup\{s(f,P) : P \in \mathcal{P}[0,1]\} &= \underline{\int} f(x)dx \\ \text{ínf}\{S(f,P) : P \in \mathcal{P}[0,1]\} &= \overline{\int} f(x)dx \end{aligned}$$

integrales inferior y superior de f en $[0,1]$. Es claro que se cumple la definición de integral, es decir

$$\sup\{s(f,P) : P \in \mathcal{P}[0,1]\} = \text{ínf}\{S(f,P) : \mathcal{P}[0,1]\}$$

si para cualquier número $\varepsilon > 0$ tan pequeño como queramos existe una partción $P_\varepsilon \in [0,1]$ tal que

$$S(f,P) - s(f,P) \leq \varepsilon$$

Basta considerar entonces la partición del intervalo en n partes iguales de modo que $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$, ya que

$$\begin{aligned} S(f,P_\varepsilon) - s(f,P_\varepsilon) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2-(k-1)^2}{n^2} = \\ &= \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = \frac{1}{n^3}\left(2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1\right) = \frac{1}{n^3}\left(2\frac{1+n}{2}n - n\right) = \\ &= \frac{n^2+n-n}{n^3} = \frac{1}{n} < \varepsilon \end{aligned}$$

Obsérvese que $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{1+n}{2}$ (suma de una progresión aritmética) y $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$ (suma de 1 consigo mismo n veces).

Como f es integrable, podemos calcular su integral determinando $\text{ínf}\,\{S(f,P) : \mathcal{P}\,[0,1]\}$ a partir del límite de la sucesión de sumas $S(f,P_n)$, en donde $P_n$es la partición de $[0,1]$ en n partes iguales.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum\nolimits_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1+2^2+3^2+\dots+n^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3-(n-1)^3} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3n^2-3n+1} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Nota. El límite se ha calculado por el criterio de Stoltz: Si $A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n,\ B_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{A_n - A_{n-1}}{B_n - B_{n-1}}$$

Solución 18 Como

$$\left((\ln x)^2\right)' = 2\,(\ln x)' \ln x = \frac{2}{x} \ln x \Rightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\left((\ln x)^2\right)'}{2}$$

entonces

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_1^{e^2} \left((\ln x)^2\right)' dx = \frac{1}{2}\left(\left(\ln e^2\right)^2 - \left(\ln 1^2\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{2}(4-0) = 2.
\end{aligned}$$

Solución 19 Integramos directamente

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\left(1-\dfrac{x}{2}\right)^3} = \left[\frac{-2\left(1-\dfrac{x}{2}\right)^{-3+1}}{-3+1}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} - 1 = 4 - 1 = 3$$

Solución 20 Podemos expresar la función f como composición de dos funciones

$$f = g \circ h,$$

en donde $g(x) = \int_0^x ue^u du$, $h(x) = 2 - \ln x$. Por la regla de la cadena

$$f'(1) = (g \circ h)'(1) = g'(h(1))h'(1)$$

Por un lado

$$\begin{array}{l} h'(1) = -\frac{1}{x}\big|_{x=1} = -1, \\ h(1) = 2 - \ln 1 = 2. \end{array}$$

Por otro lado aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo Integral

$$g'(h(1)) = g'(2) = ue^u\big|_{x=2} = 2e^2.$$

Finalmente

$$f'(1) = g'(h(1))h'(1) = 2e^2 \cdot (-1) = -2e^2.$$

Solución 21 Si consideramos la partición $P_n = \left\{0, \frac{1}{n}.\frac{2}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, 1\right\}$ de $[0,1]$, la suma

$$S(f, P_n) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right)\left(\frac{k}{n}\right)^3 = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{n^4} = \frac{1 + 2^3 + ... + n^3}{n^4}$$

es una suma superior de f en el intervalo $[0,1]$, por tanto

$$\int_0^1 x^3 dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2^3 + ... + n^3}{n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^4 - (n-1)^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{4n^3 - 6n^2 + 4n - 1} = \frac{1}{4}$$

en donde el límite se ha calculado aplicando el criterio de Stoltz.

Solución 22 a) Como

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \Rightarrow A(x+1) + Bx \equiv 1 \Rightarrow A = 1, B = -1$$

resulta

$$\int \frac{1}{x(x+1)}dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \ln x - \ln(x+1) + C = \ln \frac{x}{x+1} + C$$

b)Como las soluciones de $x^2 + 2x + 2 = 0$ son $-1+i$ y $-1-i$, se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{3x+5}{x^2+2x+2} &= \frac{3x+5}{(x+1)^2+1} = \frac{3x}{(x+1)^2+1} + \frac{5}{(x+1)^2+1} = \\
&= \frac{3}{2}\frac{2x}{(x+1)^2+1} + 5\frac{1}{(x+1)^2+1} \\
&= \frac{3}{2}\frac{2x+2-2}{(x+1)^2+1} + 5\frac{1}{(x+1)^2+1} \\
&= \frac{3}{2}\frac{2x+2}{(x+1)^2+1} - \frac{3}{2}2\frac{1}{(x+1)^2+1} + 5\frac{1}{(x+1)^2+1} \\
&= \frac{3}{2}\frac{2x+2}{(x+1)^2+1} - \frac{3}{(x+1)^2+1} + \frac{5}{(x+1)^2+1} \\
&= \frac{3}{2}\frac{2x+2}{(x+1)^2+1} + \frac{2}{(x+1)^2+1}
\end{aligned}$$

e integrando cada uno de los sumandos resulta

$$\int \frac{3x+5}{x^2+2x+2}dx = \frac{3}{2}\ln\left[(x+1)^2+1\right] + 2\arctan(x+1) + C$$

Solución 23 a) Si $u = \ln x, dv = dx$, entonces $du = \frac{1}{x}dx$ y $v = x$. Se tiene

$$\int \ln x dx = uv - \int vdu = x\ln x - \int \frac{1}{x}xdx = x\ln x - x$$

b) Si $u = arcsen\, x, dv = dx$, entonces $du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ y $v = x$. Se tiene

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arcsen} x dx &= uv - \int v du = x \operatorname{arcsen} x - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} x dx = \\ &= x \operatorname{arcsen} x + \int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} dx + C = x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + C\end{aligned}$$

c) Si $u = x^2, dv = sen\,(x+2)dx$, entonces $du = 2xdx$ y $v = -\cos(x+2)$. Se tiene

$$I = \int x^2 \operatorname{sen}(x+2)dx = uv - \int v du = -x^2 \cos(x+2) + 2\int x\cos(x+2)dx$$

Integrando de nuevo por partes la última integral, si $u = x, dv = \cos(x+2)dx$, entonces $du = dx$ y $v = sen\,(x+2)$. Se tiene

$$\int x\cos(x+2)dx = x \operatorname{sen}(x+2) - \int \operatorname{sen}(x+2)dx = x\operatorname{sen}(x+2) + \cos(x+2) + C$$

con lo cual la integral pedida es

$$\begin{aligned} I &= -x^2\cos(x+2) + 2(x\operatorname{sen}(x+2) + \cos(x+2) + C) = \\ &= -x^2\cos(x+2) + 2x\operatorname{sen}(x+2) + 2\cos(x+2) + C\end{aligned}$$

Solución 24 a) Si hacemos el cambio $\operatorname{sen} x = t$, $\cos x dx = dt$,

$$I = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^4 x} dx = \int \frac{1}{t^4} dt = -\frac{1}{3}t^{-3} + C$$

Deshaciendo el cambio resulta $I = -\dfrac{1}{3\operatorname{sen}^3 x} + C$

b) Como el integrando es una función racional de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, efectuamos el cambio de variables

$$\operatorname{tag}\frac{x}{2} = t, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

y resulta

$$I = \int \frac{1}{\cos x + \operatorname{sen} x} dx = \int \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} \right)^{-1} 2\frac{1}{1+t^2} dt = \int \frac{2}{-t^2+2t+1} dt$$

Como $1+\sqrt{2}$ y $1-\sqrt{2}$ son las soluciones de $-t^2+2t+1=0$, se tiene

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{t-1-\sqrt{2}} + \frac{B}{t-1+\sqrt{2}} \Rightarrow \\
&\Rightarrow A(t-1+\sqrt{2}) + B(t-1-\sqrt{2}) = 2 \\
&\Rightarrow A+B=0,\ -A+\sqrt{2}A-B-\sqrt{2}B = 2 \Rightarrow \\
&\Rightarrow A+B=0,\ A-B=\sqrt{2} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{2}}{2}, B = -\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{aligned}
I &= -\int \frac{2}{t^2-2t-1} dt = -\int \left(\frac{\sqrt{2}/2}{t-1-\sqrt{2}} + \frac{-\sqrt{2}/2}{t-1+\sqrt{2}} \right) dt = \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{1}{t-1-\sqrt{2}} dt + \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{1}{t-1+\sqrt{2}} dt = \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2} \ln\left(t-1-\sqrt{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \ln\left(t-1+\sqrt{2}\right) + C = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \frac{t-1+\sqrt{2}}{t-1-\sqrt{2}} + C
\end{aligned}$$

Deshaciendo el cambio

$$I = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \frac{\operatorname{tag} \dfrac{x}{2} - 1 + \sqrt{2}}{\operatorname{tag} \dfrac{x}{2} - 1 - \sqrt{2}} + C$$

Solución 25 a) Efectuando el cambio dado y teniendo en cuenta que $dx = \dfrac{\operatorname{sen} u}{\cos^2 u} du$, como

$$\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-1} = \frac{\sqrt{x^2-2x+1-1}}{x-1} = \frac{1}{x-1}\sqrt{(x-1)^2-1}$$

resulta

$$\begin{aligned} I &= \int \cos u \sqrt{\frac{1}{\cos^2 u} - 1}\frac{\operatorname{sen} u}{\cos^2 u} du = \int \sqrt{\frac{1}{\cos^2 u} - \frac{\cos^2 u}{\cos^2 u}} \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u} du = \\ &= \int \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u} \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u} du = \int \operatorname{tag}^2 u du = \int (\operatorname{tag}^2 u + 1 - 1) du = \\ &= \int (\operatorname{tag}^2 u + 1) du - \int du = \operatorname{tag} u - u + C \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \operatorname{tag} u &= \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 u}}{\cos u} = (x-1)\sqrt{1 - \left(\frac{1}{x-1}\right)^2} = \sqrt{x(x-2)} \\ u &= \arccos \frac{1}{x-1} \end{aligned}$$

y deshaciendo el cambio

$$I = \sqrt{x(x-2)} - \arccos \frac{1}{x-1} + C$$

b) Efectuando el cambio dado y teniendo en cuenta que

$$(2x+4)dx = du \Rightarrow (x+2)dx = \frac{du}{2},$$

resulta

$$I = \int \frac{1}{2} \operatorname{sen} u du = -\frac{1}{2}\cos u + C = -\frac{1}{2}\cos(x^2 + 4x - 6) + C.$$

Solución 26 Como el círculo es simétrico respecto a los ejes y la ecuación dada define la función $y = +\sqrt{9 - x^2}$, que junto con los semiejes positivos determinan la cuarta parte de su área, se tiene

$$A = 4 \int_0^3 \sqrt{9 - x^2} dx$$

Efectuando el cambio $x = 3\cos t, dx = -3\,sen\,tdt$, cuyos límites de integración son para $x = 0$ el punto $t = \pi/2$ y para $x = 3$ el punto $t = 0$, resulta

$$\begin{aligned} A &= 4\int_{\pi/2}^{0} 3\operatorname{sen} t(-3\operatorname{sen} t)dt = -36\int_{\pi/2}^{0} \operatorname{sen}^2 tdt = \\ &= 36\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2t}{2}dt = 18\left(\frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2}\cos 2tdt\right) = 9\pi \end{aligned}$$

Nota. Recuérdese que $sen^2 t = \dfrac{1-\cos 2t}{2}$.

Solución 27 La curva y la recta se cortan en los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 3$ soluciones de la ecuación $(x-1)^2 = x+1$. Como la recta se encuentra por encima de la curva (represéntese), el área encerrada es

$$\int_0^3 (x+1)dx - \int_0^3 (x-1)^2 dx = \frac{15}{2} - 3 = \frac{9}{2}$$

Solución 28 (i) Basta aplicar diferencia de cuadrados en el numerador, simplificar e integrar directamente

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-1}^{1} \frac{x^4-1}{x^2+1}dx = \int_{-1}^{1} \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2+1}dx = \int_{-1}^{1}(x^2-1)dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=-1}^{x=1} - 2 = \frac{2}{3} - 2 = \frac{-4}{3}. \end{aligned}$$

(ii) Teniendo en cuenta que

$$\left[(1+x^2)^{-3}\right]' = -6x(1+x^2)^{-3} \Rightarrow x(1+x^2)^{-4} = -\frac{\left[(1+x^2)^{-3}\right]'}{6},$$

calculamos la integral directamente aplicando la regla de Barrow

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 x(1+x^2)^{-4}dx = \frac{-1}{6}\int_0^1 \left[(1+x^2)^{-3}\right]' dx = \frac{-1}{6}\left[(1+x^2)^{-3}\right]_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{-1}{6}\left((1+1)^{-3}-(1+0)^{-3}\right) \\ &= \frac{-1}{6}\left(\frac{1}{8}-1\right) = \frac{7}{48} \end{aligned}$$

Capítulo 8. Funciones de varias variables

ENUNCIADOS

Ejercicio 1 Señálese el valor de $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, en donde

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2 + \operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = (0,0)$.

Ejercicio 2 Indíquense los valores $D_1 f(1,0)$ y $D_2 f(1,0)$, siendo $f(x,y) = -x^2 + 2x - y$ si $y \neq 0$, $f(x,y) = x$ si $y = 0$.

Ejercicio 3 Sean $f(u,v) = (e^u, e^v + e^u)$, $g(x,y) = (x^2, x^2 + y)$. Determínese la diferencial de $F = g \circ f$ en el punto $(0,0)$.

Ejercicio 4 Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función definida por

$$F(u,v) = \left(\int_0^{e^u+v} e^s s ds, u^2 - v^2 \right)$$

Determine la matriz jacobiana $F'(1,1)$.

Ejercicio 5 Determínese $\dfrac{\partial^{m+n} F}{\partial x^m y^n}$ siendo $F = g \circ f$, en donde g es una función real de clase infinito y $f(x,y) = ax + by + c$ (siendo a, b, c parámetros reales)

Ejercicio 6 Señale el polinomio de Taylor de orden 2 en $(0,0)$ de la función

$$f(x,y) = e^{x-y} + \cos(xy).$$

Ejercicio 7 Estudie los extremos de la función

$$f(x,y) = 7x^2 + \cos y.$$

Ejercicio 8 Resuélvánse las siguiente cuestiones:

a) Pruébese que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ si y sólo si $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$.

b) ¿Se encuentra el punto $(1, 0, -1, 1)$ en la bola abierta de centro $(2, 1, -1,2)$ y radio $\sqrt{3}$?.

c) ¿Cuál es el seno del ángulo que forman los vectores $(1, 2, -1)$ y $(-1, 1, 0)$?.

d) Pruébese que el conjunto de los vectores ortogonales a uno dado es un subespacio vectorial.

e) Encuéntrese la ecuación del subespacio de $\mathbb{R}^4$ ortogonal a $(1, 1, -1, -1)$.

Ejercicio 9 Pruébese que no existe o determínese el límite de f en $(0, 0)$ en los siguientes casos:

a) $f(x, y) = \dfrac{y^3 - x^2}{x^2 + y^2}$

b) $f(x, y) = \dfrac{y^2 - x^4}{x^4 + y^2}$

c) $f(x, y) = \dfrac{y + x^2 + x}{y - x}; y \neq x$

Ejercicio 10 Estúdiese la continuidad en $\mathbb{R}^2$ y, si existen, calcúlense las derivadas parciales de la funcion

$$f(x, y) = \frac{y^3 - x^3}{x^2 + y^2} si (x, y) \neq (0, 0), f(0, 0) = 0.$$

en el punto genérico (x, y). En su caso, ¿cuánto valen $D_1 f(0, 0)$ y $D_2 f(0, 0)$?.

Ejercicio 11 Determine las matriz jacobiana de la función

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2,\ \operatorname{sen} xyz,\ \ln(1 + x^2 + y^2))$$

Ejercicio 12 Sean $f(x,y,z) = (x^2+y^2, xyz, z^2-x^2)$ y $g(u,v,w) = (\cos(u+v), e^v)$. Pruébese por la regla de la cadena que $g \circ f$ es diferenciable en cualquier punto (x,y,z) de R^3 y calcúlese su diferencial en el punto $(0, \sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$.

Ejercicio 13 Desarróllese por el teorema de Taylor las función

$$f(x,y) = x^2y + 3y - 2, \quad a = (1,-2), \ r = 1.$$

hasta el resto de orden 4 en la bola $B(a,r)$ y encuéntrese una cota del resto

Ejercicio 14 Determínense los máximos y mínimos locales de las función

$$f(x,y,z) = x^6 + x^3y + y^3.$$

Ejercicio 15 Determínense los extremos de $f(x,y) = xy$ con la condición de que $x+y=1$.

Ejercicio 16 Se llaman cosenos directores de un vector a los cosenos de los ángulos que forma con los vectores de la base canónica. En el espacio $\mathbb{R}^3$, si representamos por $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ los vectores de la base canónica y por α, β yγ los respectivos ángulos que forma con ellos el vector $v = ai + bj + ck$, pruebese que $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Ejercicio 17 Pruébese que no existe o determínese el límite de f en $(0,0)$ en los siguientes casos:

a) $f(x,y) = x^2\, sen\, \dfrac{1}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

b) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

Ejercicio 18 Estúdiese la continuidad en $\mathbb{R}^2$ y, si existen, calcúlense las derivadas parciales de la función

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4} \text{ si } (x,y) \neq (0,0), f(0,0) = 0.$$

en el punto genérico (x,y). En su caso, ¿cuánto valen $D_1f(0,0)$ y $D_2f(0,0)$?.

Ejercicio 19 Determínese las matriz jacobiana en (x, y) de las función:.

$$f(x, y, z, u) = (xzu,\ e^{yz},\ u + \operatorname{tag}(z - xy))$$

Ejercicio 20 Sean las funciones de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ definidas por

$$f(x, y, z) = (y^2 - z^2, xy - z^2, y^2 - 2zx),\ g(x, y, z) = (z, xyz, y - 2zx).$$

Señálese el valor del determinante de la matriz jacobiana (determinante jacobiano) de la función compuesta $g \circ f$ en el punto $P = (1, 0, -1)$.

Ejercicio 21 Sea $u = F(xu, y + u)$. Determínense $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ en función de las derivadas de F.

Ejercicio 22 Sea el rectángulo $L = [-3, 2] \times [-2, 3]$. Señálese su polinomio de Taylor de orden uno en $(0, 0)$ y una cota óptima del error cometido al sustituir en L la función $f(x, y) = e^{x+y}$ por dicho polinomio

Ejercicio 23 Determínese los máximos y mínimos locales de la función

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xyz$$

Ejercicio 24 Determínese la mínima distancia del punto $(0, 2)$ a la parábola $x^2 = 4y$.

SOLUCIONES

Solución 1 No existe límite de $f(x,y)$ ya que aunque

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1 \text{ pues } \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1,$$

no existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, pues depende de las direcciones

$$\lim_{x\to 0, y=mx} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-m^2)}{x^2(1+m^2)} = \frac{1-m^2}{1+m^2}.$$

Solución 2 Por definición

$$D_1 f(1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,0)-f(1,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)-1}{h} = 1,$$

$$D_2 f(1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1,0+h)-f(1,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1-h)-1}{h} = -1.$$

Solución 3 Es una aplicación directa de la regla de la cadena, en este caso

$$D(g\circ f)(0,0) = Dg(f(0,0))Df(0,0).$$

Teniendo en cuenta que $f(0,0) = (1,2)$, calculemos las matrices jacobianas correspondientes

$$Dg(f(0,0)) = Dg(1,2) = \left.\begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 2x & 1 \end{pmatrix}\right|_{(x,y)=(1,2)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Df(0,0) = \left.\begin{pmatrix} e^u & 0 \\ e^u & e^v \end{pmatrix}\right|_{(u,v)=(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando las matrices obtenemos

$$D(g\circ f)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución 4 La matriz jacobiana es por definición la matriz

$$F'(1,1) = \begin{pmatrix} D_1F_1(1,1) & D_2F_1(1,1) \\ D_1F_2(1,1) & D_2F_2(1,1) \end{pmatrix}$$

en donde las funciones componente vienen dadas por

$$F(u,v) = (F_1(u,v), F_2(u,v)) = \left(\int_0^{e^u+v} e^s s ds, u^2 - v^2 \right)$$

Para calcular las derivadas parciales de la primera función componente aplicamos la regla de la cadena. Siendo

$$g(x) = \int_0^x e^s s ds,\ \ h(u,v) = e^u + v,$$

se tiene que

$$F_1(u,v) = (g \circ h)(u,v)$$

y por tanto

$$F_1'(1,1) = \ g'(h(1,1))h'(1,1)$$

Por un lado

$$h'(1,1) = \begin{pmatrix} D_1(e^u+v) & D_2(e^u+v) \end{pmatrix}_{(u,v)=(1,1)} = \begin{pmatrix} e^u & 1 \end{pmatrix}_{(u,v)=(1,1)} = \begin{pmatrix} e & 1 \end{pmatrix},$$

Por el otro

$$h(1,1) = [e^u + v]_{(u,v)=(1,1)} = e + 1$$

y por el Teorema fundamental del cálculo (véase pp 208-9 libro de texto)

$$g'(h(1,1)) = g'(e+1) = [e^s s]_{s=1+e} = e^{1+e}(1+e)$$

Por tanto

$$\begin{aligned} F_1'(1,1) &= \begin{pmatrix} D_1F_1(1,1) & D_2F_1(1,1) \end{pmatrix} \\ &= g'(e+1)h'(1,1) \\ &= \begin{pmatrix} e^{1+e}(1+e)e & e^{1+e}(1+e) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para la segunda función componente basta derivar directamente

$$\begin{aligned} D_1F_2(1,1) &= [2u]_{u=1} = 2 \\ D_2F_2(1,1) &= [-2v]_{v=1} = -2 \end{aligned}$$

Finalmente

$$F'(1,1) = \begin{pmatrix} e^{1+e}(1+e)e & e^{1+e}(1+e) \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

El calculo de la jacobiana de la derivadas de la función

$$F_1(u,v) = \int_0^{e^u+v} e^s s ds$$

De hecho tenemos la primitiva

$$\int e^s s ds = e^s (s-1)$$

entonces

$$\begin{aligned} \int_0^{e^u+v} e^s s ds &= [e^s (s-1)]_{s=0}^{e^u+v} = e^{e^u+v} (e^u + v - 1) - e^0 (0-1) \\ &= e^{e^u+v} (e^u + v - 1) + 1. \end{aligned}$$

Luego $F_1(u,v) = e^{e^u+v} (e^u + v - 1) + 1$ y podemos calcular las derivadas directamente

$$\begin{aligned} D_1F_1(1,1) = \tfrac{\partial}{\partial u} g(1,1) = e^u e^{v+e^u} (v + e^u)\big|_{(u,v)=(1,1)} = ee^{1+e}(1+e), \\ D_1F_2(1,1) = \tfrac{\partial}{\partial v} g(1,1) = e^{v+e^u} (v + e^u)\big|_{(u,v)=(1,1)} = e^{1+e}(1+e). \end{aligned}$$

Solución 5 Calculamos la derivada aplicando la regla de la cadena reiteradamente

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{m+n} F}{\partial x^m y^n}(x,y) &= \frac{\partial^m}{\partial x^m}\frac{\partial^n F}{\partial y^m} g(ax+by+c) = \frac{\partial^m}{\partial x^m} a \frac{\partial^{n-1} F}{\partial y^{n-1}} g'(ax+by+c) = \frac{\partial^m}{\partial x^m} a^2 \frac{\partial^{n-2} F}{\partial y^{n-2}} g''(ax+by+c) \\
&= \frac{\partial^m}{\partial x^m} a^3 \frac{\partial^{n-3} F}{\partial y^{n-3}} g'''(ax+by+c) = ... = \frac{\partial^m}{\partial x^m} a^n g^{n)}(ax+by+c) = ... = \\
&= a^n b^m g^{m+n)}(ax+by+c)
\end{aligned}$$

Solución 6 El polinomio de Taylor de orden 2 en $(0,0)$ de la función f viene dado por

$$P_2(x,y) = f(0,0) + \frac{1}{1!}\left(D_1 + D_2\right) f(0,0) + \frac{1}{2!}\left(D_1 + D_2\right)^2 f(0,0)$$

(en donde seguimos la notación dada en la p. 255 del libro de texto)

Calculamos las derivadas y particularizamos para el punto $(0,0)$

$$\begin{aligned}
&f(0,0) = 2, \\
&D_1 f(0,0) = 1,\ D_2(0,0) = -1, \\
&D_{11} f(0,0) = 1,\ D_{12} f(0,0) = -1,\ D_{22} f(0,0) = 1,
\end{aligned}$$

por tanto el polinomio de Taylor es

$$P_2(x,y) = 2 + x - y + \frac{x^2}{2} - xy + \frac{y^2}{2}.$$

Solución 7 En primer lugar estudiemos los puntos críticos de la función.

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow 14x = 0,\ \ -\operatorname{sen} y = 0$$

cuya solución es

$$(x,y) = (0, n\pi) \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Como
$$\cos(n\pi) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n \text{ par} \\ -1 & \text{si} \quad n \text{ impar} \end{cases}$$
distiguimos dos casos. Aplicando el críterio dado en las páginas 259-60, se tiene:

- Si n par, entonces la matriz hessiana de f en $(0, \pi)$ está dada por
$$\left.\begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 0 & -\cos y \end{pmatrix}\right|_{(x,y)=(0,n\pi)} = \begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Los menores principales
$$\Delta_1 = 14, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 14$$
son estrictamente positivos, entonces podemos asegurar que el punto $(0, n\pi)$ es un mínimo estricto relativo.
- Si n impar, la matriz Hessiana
$$\left.\begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 0 & -\cos y \end{pmatrix}\right|_{(x,y)=(0,n\pi)} = \begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
tiene determinante estrictamente negativo
$$\left|\begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right| = -14 < 0,$$
luego $(0, n\pi)$ no es extremo relativo

Solución 8 a) Supongamos que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.
$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{2}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} \\ \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{2}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} \end{aligned}$$

Supongamos que $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$, entonces
$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 \Rightarrow \mathbf{2}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = -\mathbf{2}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) \Rightarrow \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$$

b) La distancia del punto al centro de la bola es

$$d((1,0,-1,1),(2,1,-1{,}2)) = \sqrt{(1-2)^2+(0-1)^2+(-1+1)^2+(1-2)^2} = \sqrt{3}$$

Por tanto el punto se encuentra en la bola cerrada, pero no en la bola abierta.

c)

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{(1,2,-1)\cdot(-1,1,0)}{\|(1,2,-1)\|\,\|(-1,1,0)\|} = \frac{-1+2+0}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \\
\operatorname{sen}\alpha &= \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{4\times 3}} = \sqrt{\frac{11}{12}}
\end{aligned}$$

d) Sea a un vector fijo y $= \{\mathbf{u} : \mathbf{u}\cdot\mathbf{a} = 0\}$ el conjunto de los vectores ortogonales (perpendiculares) a $\mathbf{a}$. Si $\mathbf{u},\mathbf{v} \in L$ y $\lambda,\mu \in R$, por tanto $\lambda(u\cdot a) = 0$ y $\mu(v\cdot a) = 0$, se tiene:

$$(\lambda\mathbf{u}+\mu\mathbf{v})\cdot\mathbf{a} = \lambda\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}+\mu\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} = 0$$

con lo cual $\lambda u + \mu v \in L$ y L es un subespacio vectorial.

e) Si (x,y,z,u) son las coordenadas de un vector cualquiera ortogonal al vector $(1,1,-1,-1)$, se tiene que cumplir:

$$(x,y,z,u)\cdot(1,1,-1,-1) = 0 \Leftrightarrow x+y-z-u = 0$$

que es la ecuación del subespacio.

Solución 9 a) Considerando el límite a través de la familia de rectas $y = \lambda x$, se tiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0,\ y=\lambda x} \frac{\lambda^3 x^3 - x^2}{x^2 + \lambda^2 x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda^3 x - 1}{1+\lambda^2} = \frac{-1}{1+\lambda^2}$$

por tanto el límite a través de cada recta es diferente y no existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

b) Considerando el límite a través de la familia de parábolas $y = \lambda x^2$, se tiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0,\ y=\lambda x^2} \frac{y^2 - x^4}{x^4 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda^2 x^4 - x^4}{x^4 + \lambda^2 x^4} = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1}$$

por tanto el límite a través de cada parábola es diferente y no existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

c) Considerando el límite a través de la familia de rectas $y = x$, $\lambda \neq 1$ se tiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0,\ y=\lambda x,\ \lambda\neq 1} \frac{y + x^2 + x}{y - x} = \lim_{x\to 0,\ \lambda\neq 1} \frac{\lambda x + x^2 + x}{\lambda x - x} = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}$$

por tanto el límite a través de cada recta es diferente y no existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Solución 10 Si $(x,y) \neq (0,0)$, entonces la función es cociente de dos polinomios cuyo denominador no se anula en un entorno del punto. Como

$$\frac{y^3 - x^3}{x^2 + y^2} = \frac{y^3}{x^2 + y^2} - \frac{x^3}{x^2 + y^2}$$

y el limite de cada uno de los sumandos es cero cuando $(x,y) \to (0,0)$ ya que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{y^3}{y^2}\right| \leq |y| \to 0 \Rightarrow \\ 0 &\leq \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{x^3}{x^2}\right| \leq |x| \to 0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0 \end{aligned}$$

resulta $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3-y^3}{x^2+y^2} = 0$ y la función es continua en $(0,0)$. Por tanto la función es continua en R^2. Por otro lado

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\frac{y^3-x^3}{x^2+y^2} &= \frac{x^4-3x^2y^2-2xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ \frac{\partial}{\partial y}\frac{y^3+x^3}{x^2+y^2} &= \frac{y^4+3x^2y^2+2x^3y}{\left(x^2+y^2\right)^2} \end{aligned}$$

Nota. El límite anterior se resuelve fácilmente pasando a coordenadas polares

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3 \operatorname{sen}^3\theta - \rho^3\cos^3\theta}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} \rho(\operatorname{sen}^3\theta - \cos^3\theta) = 0$$

Solución 11

$$J(f) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ yz\cos xyz & xz\cos xyz & xy\cos xyz \\ \frac{2x}{1+x^2+y^2} & \frac{2y}{1+x^2+y^2} & 0 \end{pmatrix}$$

Solución 12 Las tres funciones componentes de la función f son funciones polinómicas y por tanto diferenciables en cualquier punto (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$. Por otra parte la función g también es diferenciable en cualquier punto (u,v,w) de $\mathbb{R}^3$, ya que lo son sus dos componentes $(u,v,w) = \cos(u+v)$ y $g_2(u,v,w) = e^v$, pues g_1 es la composición de la función coseno con una función polinómica y g_2 es una función exponencial.

Si $h = g\circ f$, teniendo en cuenta la regla de la cadena $Dh(x,y,z) = Dg(f(x,y,z))\circ Df(x,y,z)$. Por tanto, como $f(0,\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}) = (\pi,0,\pi)$, entonces $Dh(0,\sqrt{\pi},\sqrt{\pi})$ es la aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ definida por la matriz

$$\begin{aligned} h'(P) &= \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(u+v) & -\operatorname{sen}(u+v) & 0 \\ 0 & e^v & 0 \end{pmatrix}_{(\pi,0,\pi)} \times \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ yz & xz & xy \\ -2x & 0 & 2z \end{pmatrix}_{(0,\sqrt{\pi},\sqrt{\pi})} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{\pi} & 0 \\ \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \pi & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Solución 13 La expresión de la fórmula de Taylor con resto de orden 4 es

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(\mathbf{a}) + \frac{1}{1!}\left((x-1)D_1 + (y+2)D_2\right) f(\mathbf{a}) + \frac{1}{2!}\left((x-1)D_1 + (y+2)D_2\right)^2 f(\mathbf{a}) + \\ &\quad + \frac{1}{3!}\left((x-1)D_1 + (y+2)D_2\right)^3 f(\mathbf{a}) + \frac{1}{4!}\left((x-1)D_1 + (y+2)D_2\right)^4 f(\alpha) \end{aligned}$$

en donde α es un punto del segmento $((1,-2),(x,y))$ y $\left((x-1)D_1 + (y+2)D_2\right)^n f(\alpha)$ es el operador que aplica las derivadas de orden n a la función f en el punto $a = (1,-2)$

Las derivadas son:

$$\begin{aligned} D_1 f(x,y) &= 2xy,\ D_2 f(x,y) = x^2+3,\ D_1 f(1,-2) = -4,\ D_2 f(1,-2) = 4 \\ D_{11} f(x,y) &= 2y,\ D_{12} f(x,y) = 2x,\ D_{22} f(x,y) = 0,\ D_{11} f(1,-2) = -4,\ D_{12} f(1,-2) = 2 \\ D_{111} f(x,y) &= D_{122} f(x,y) = D_{222} f(x,y) = 0,\ D_{112} f(x,y) = 2 \end{aligned}$$

y todas las derivadas de orden cuatro son cero.

Teniendo en cuenta que $f(1,-2) = -10$ y sustituyendo en la expresión, resulta

$$\begin{aligned} f(x,y) &= -10 + [-4(x-1) + 4(y+2)] + \frac{1}{2!}\left[-4(x-1)^2 + 2\left(2(x-1)(y+2)\right) + 0(y+2)^2\right] + \\ &\quad + \frac{1}{3!}\left[2(3(x-1)^2(y+2)\right] + 0 \\ &= -10 - 4(x-1) + 4(y+2) - 2(x-1)^2 + 2(x-1)(y+2) + (x-1)^2(y+2) \end{aligned}$$

Como el resto de orden cuatro es cero porque todas las derivadas de este orden son cero, el valor del desarrollo en cualquier punto de la bola es exactamente el valor de la función.

Nota. Si $h_1 = x - a$ y $h_2 = y + b$, una expresión más breve del desarrollo de Taylor con resto de orden 4 en el punto (a, b) de una función $f(x, y)$ es

$$f(x,y) = f(1,-2) + \sum_{n=1}^{3} \frac{1}{n!}(h_1 D_1 + h_2 D_1)^n f(1,-2) + \frac{1}{4!}(h_1 D_1 + h_2 D_1)^4 f(\xi, \mu)$$

Solución 14 Los candidatos a puntos de extremo son las soluciones del sistema de ecuaciones $D_f = 0$

$$\begin{array}{c} D_1 f(x,y,z) = 0 \\ D_2 f(x,y,z) = 0 \\ D_3 f(x,y,z) = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} 6x^5 + 3x^2 y = 0 \\ x^3 + 3y^2 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} 3x^2(2x^3 + y) = 0 \\ x^3 + 3y^2 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} x = 0,\ y = 0 \\ x^3 + 3(-2x^3)^2 = 0 \end{array}$$

como la última ecuación no tiene más soluciones reales que $x = y = 0$, las soluciones del sistema es la familia de puntos $x = 0,\ y = 0,\ z = \lambda$, en donde λ es un número real cualquiera. En otras palabras las soluciones del sistema son los puntos del eje Oz.

Estudiemos mediante el hessiano si son extremos. Como

$$\begin{pmatrix} 30x^4 + 6xy & 3x^2 & 0 \\ 3x^2 & 6y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(0,0,\lambda)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

no se tiene ninguna información.

Analicemos el valor de f en el entorno del punto $(0, 0, \lambda)$. Consideremos la bola de centro el punto y radio $\varepsilon > 0$ tan pequeño como queramos. Para el punto $(\varepsilon, \varepsilon, \lambda)$ se tiene $f(\varepsilon, \varepsilon, \lambda) = \varepsilon^6 + \varepsilon^4 + \varepsilon^3 > 0$ y para el punto $(0, -\varepsilon, \lambda)$ se tiene $f(0, -\varepsilon, \lambda) = -\varepsilon^3 < 0$, por tanto la función no tiene extremos.

Solución 15 Como $y = 1 - x$, sustituyendo en $f(x, y)$ se obtiene la función de una variable $g(x) = x(1 - x)$, cuyos extremos se trata de encontrar

$$g'(x) = 1 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Por tanto el único candidato a extremo de f es el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Como $g''(x) = -2$, se trata de un máximo.

Solución 16 Teniendo en cuenta que los vectores de la base canónica $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ son ortogonales y por tanto

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0 \Rightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{i} = a,\ \ \mathbf{v} \cdot \mathbf{j} = b,\ \ \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} = c$$

Como

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{i}}{\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{i}\|} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\ \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\ \cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

resulta

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2} = 1$$

Solución 17 a) Como el seno solamente toma valores en el intervalo $[-1,1]$ entonces

$$\left| x^2\, sen\, \frac{1}{x^2+y^2} \right| \leq \left| x^2 \right| = x^2 \tag{29}$$

Como

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 = 0$$

de (**??**) se deduce

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2} = 0$$

b) Efectuando un cambio a polares $(x = r\cos\theta,\ y = r\, sen\,\theta)$ se tiene que

$$f(x,y) = f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = \ln r^2$$

que no depende del ángulo. Luego podemos aplicar el teorema de cálculo de límite mediante cambio a polares (p.282 libro de texto)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} \ln r^2 = -\infty$$

Solución 18 La función no es continua ya que no existe el límite. Consideremos la sucesiones $(a_n) = \left(\frac{1}{n}, \sqrt{\frac{1}{n}}\right)$, $(b_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$. Evidentemente ambas sucesiones (a_n) y (b_n) tienden a 0, pero

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f(a_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\sqrt{\frac{1}{n}}^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \sqrt{\frac{1}{n}}^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{2\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \\
\lim_{n\to\infty} f(b_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\frac{1}{n}^2 + \frac{1}{n}^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{n^3\left(n^2+1\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0
\end{aligned}$$

Por tanto no puede existir límite por el teorema de caracterización de límites por sucesiones (p. 235 libro de texto).

Por otro lado podemos calcular la derivadas parciales calculando el límite directamente

$$\begin{aligned}
D_1 f(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t \times 0^2}{t^2 + 0^4}}{t} = 0 \\
D_2 f(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{0 \times t^2}{0^2 + t^4}}{t} = 0
\end{aligned}$$

Recordemos que la existencia de derivadas parciales no implica la continuidad de la función.

Solución 19 Se trata de considerar la matriz jacobiana de la función

$$g(x,y) = (xzu,\ e^{yz},\ u + \operatorname{tag}(z - xy))$$

en donde las variables z, u debemos considerarlas constantes fijas. De este modo recordando que

$$(\operatorname{tag} f(x))' = f'(x) \sec^2 f(x)$$

se tiene

$$g'(x,y) = \begin{pmatrix} zu & 0 \\ 0 & ze^{yz} \\ -y\sec^2(z-xy) & -x\sec^2(z-xy) \end{pmatrix}$$

Solución 20 Como $P' = f(1,0,-1) = (-1,-1,2)$, aplicando la regla de la cadena (véase p. 247 libro)

$$(g\circ f)'(1,0,-1) = g'(f(1,0,-1)) \times f'(1,0,-1)$$

resulta

$$f'(1,0,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 2y & -2z \\ y & x & -2z \\ -2z & 2y & -2x \end{pmatrix}_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$g'(-1,-1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ yz & xz & xy \\ -2z & 1 & -2x \end{pmatrix}_{P'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Como $\det g'(-1,-1,2) = -10$ y $\det f'(1,-1,1) = -4$, y como el determinante del producto de dos matrices es igual al producto de sus determinantes se tiene que $\det(g\circ f)'(1,0,-1) = 40$.

Solución 21 Denotamos en general

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ D_2 = \frac{\partial}{\partial y}$$

La función $u(x,y) = F(xu, y+u)$ se puede expresar como la composición de dos funciones

$$u(x,y) = F\circ g(x,y)$$

en donde $g(x,y) = (xu, y+u)$.

Las matrices jacobianas vienen dadas por

$$\begin{aligned} g'(x,y) &= \begin{pmatrix} u + xD_1u & xD_2u \\ D_1u & 1 + D_2u \end{pmatrix} \\ F'(x,y) &= \begin{pmatrix} D_1F & D_2F \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y

$$u'(x,y) = \begin{pmatrix} D_1u & D_2u \end{pmatrix}$$

Por la regla de la cadena (p. 247) se tiene

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} D_1u & D_2u \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} D_1F & D_2F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u + xD_1u & xD_2u \\ D_1u & 1 + D_2u \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (u + xD_1u)D_1F + D_1uD_2F & xD_2uD_1F + D_2F(1 + D_2u) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto de igualar la primera coordenada se obtiene

$$D_1u = (u + xD_1u)D_1F + D_1uD_2F \Rightarrow D_1u = \frac{uD_1F}{1 - xD_1F - D_2F}$$

Del mismo modo de igualar la segunda coordenada

$$D_2u = xD_2uD_1F + D_2F(1 + D_2u) \Rightarrow D_2u = \frac{D_2F}{1 - xD_1F - D_2F}$$

Solución 22 Como

$$f(0,0) = D_1f(0,0) = D_2f(0,0) = \left[e^{x+y}\right]_{(x,y)=(0,0)} = e^{0+0} = 1$$

el polinomio de Taylor de orden uno en $(0,0)$ viene dado por

$$P_1(x,y) = f(0,0) + D_1 f(0,0)x + D_2 f(0,0)y = 1 + x + y.$$

Se trata de encontrar la menor cota del resto de orden dos del desarrollo de Taylor Como todas las derivadas de la función en (x,y) son iguales a la función, el resto viene dado por

$$R_2(x,y) = \frac{1}{2!}(x+y)^2 e^{\theta+\mu},$$

en donde (θ,μ) es un punto del interior del segmento $[(0,0),(x,y)]$. Por tanto, teniendo en cuenta que el mayor valor de $x+y$ en L es 5, resulta

$$|R_2(x,y)| = \frac{1}{2}|x+y|^2 e^{\theta+\mu} \leq \frac{1}{2}25e^5.$$

Solución 23 Igualando la derivadas parciales a cero obtenemos el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 2x + yz = 0 \\ 2y + xz = 0 \\ 2z + xy = 0 \end{array}\right\}$$

de puntos críticos cuya solución nos da los candidatos a mínimos y máximos globales. De la primera ecuación se tiene que $x = -\frac{yz}{2}$. Sustituyendo en la segunda llegamos

$$2y + -\frac{yz}{2}z = 0 \Leftrightarrow y\left(2 - \frac{z^2}{2}\right) = 0$$

En este caso hay tres posibilidades $y = 0$ o $z = \pm 2$. Si $y = 0$ entonces de la primera ecuación necesariamente $x = 0$ y del tercera $z = 0$. Luego

$$a_1 = (0,0,0)$$

es punto crítico. Si $z = 2$ entonces de la primera $x = -y$ y segunda ecuación llegamos al sistema no lineal

$$\begin{array}{c} 2x + 2y = 0 \\ xy = -4 \end{array}$$

que tiene $(x,y) = (2,-2)$ y $(x,y) = (-2,2)$ como posibles soluciones. Luego

$$a_2 = (2,-2,2),\ a_3 = (-2,2,2)$$

son otros puntos críticos. De igual modo si $z = -2$ llegamos al sistema

$$\begin{aligned} 2x - 2y &= 0 \\ xy &= -4 \end{aligned}$$

que tiene como soluciones $x = y = (2,2)$, $(x,y) = (-2,-2)$. Para ver si los punto críticos son mínimos o máximos estudiamos la Hessiana

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & z & y \\ z & 2 & x \\ y & x & 2 \end{pmatrix}$$

Para el punto $(0,0,0)$

$$Hf(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

aplicando el criterio de Silvester la matriz Hessiana es definida positiva. Por la condición suficiente de extremo (p. 259 libro de texto) concluímos que $a_1 = (0,0,0)$ es un mínimo local. Por otro lado para los puntos $a_2 = (2,-2,2)$ y $a_3 = (-2,2,2)$ las matrices Hessianas vienen dadas por

$$Hf(2,-2,2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

y

$$Hf(-2,2,2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

En este caso el criterio de Silvester no nos asegura que las matrices sean definida positiva ni definida negativas. De hecho se puede ver que las formas cuadráticas no son definidas ya que por ejemplo para el caso de la primera Hessiana

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 > 0$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -6 < 0$$

Y para la segunda

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -6$$

Siguiendo la demostración de la condición suficiente de extremo (p. 259) esto nos asegura que $a_2 = (2, -2, 2)$ y $a_3 = (-2, 2, 2)$ no son ni máximos ni mínimos de la función.

Los puntos $a_4 = (2, 2, -2)$

$$Hf(2, 2, -2) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

y $a_5 = (-2, -2, -2)$

$$Hf(-2, -2, -2) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

siendo en este caso también indefinidas.

Solución 24 La distancia de un punto cualquiera (x,y) al punto $(0,2)$ viene dada por

$$\sqrt{x^2 + (y-2)^2}$$

Luego se trata de minimizar la función $\sqrt{x^2+(y-2)^2}$ sujeta a la condición $4y = x^2$, esto es equivalente a miniminizar el cuadrado de la función por ser la función raíz una función creciente en los positivos.

$$\text{minimizar } x^2 + (y-2)^2 \text{ sujeto a } 4y = x^2$$

Como $x^2 = 4y$ sustituyendo directamente llegamos a un problema equivalente no restringido de la variable y

$$\text{minimizar } g(y) = 4y + (y-2)^2 = y^2 + 4$$

Tiene un único punto crítico en $\overline{y} = 0$ ya que

$$g'(y) = 0 \Leftrightarrow 2y = 0 \Leftrightarrow \overline{y} = 0$$

Por la forma de la función vemos que dicho punto es un minimo local (global) de g y por tanto

$$(\overline{x}, \overline{y}) = (0,0)$$

es el punto de la parabola a menor distancia de $(0,2)$. Finalemente la distancia vendrá dada por

$$\sqrt{0^2 + (0-2)^2} = 2$$

Capítulo 9. La integral múltiple

ENUNCIADOS

Ejercicio 1 Calcular la integral

$$I = \int_S (x+y)^2 dxdy$$

en donde

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \geq x^2 + y^2 \geq 1\}.$$

Ejercicio 2 Calcular la integral $I = \int_S dxdy$ en donde

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - 2 + x \leq 0, -y + 2 + x \geq 0, y \geq x^2\}.$$

Ejercicio 3 Calcúlese mediante una integral doble el volumen de la pirámide triangular de vértices (1,0,0), (0,0,0), (0,2,0) y (0,0,3).

Ejercicio 4 Utilícese el cambio $x = u, y = (1/2)u + v$ para determinar el valor de la integral

$$I = \int_M x^3(2y-x)e^{(2y-x)^2} dxdy$$

en donde

$$M = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2,\ x/2 \leq y \leq (x+4)/2\}.$$

Ejercicio 5 Calcúlese mediante un cambio a coordenadas polares la integral $\int_D \frac{|y|}{x^2+y^2} dxdy$, en donde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 25\}$.

Ejercicio 6 Determine la longitud del arco de curva $(x(t), y(t), z(t)) = (12t,\ 8t^{\frac{3}{2}}, 3t^2)$, $0 \leq t \leq 1$.

Ejercicio 7 Sea $A = [0, 2] \times [1, 4]$ y $f(x, y) = x + y$. Resuélvanse las siguiente cuestiones:

a) Encontrar una partición P_n de A que determine n^2 subrectángulos con la misma área.

b) Calcular $s(f, P_n)$ y $\lim\limits_{n\to\infty} s(f, P_n)$.

c) Calcular $S(f, P_n)$ y $\lim\limits_{n\to\infty} S(f, P_n)$.

d) Calcular por integración reiterada $\int_A f(x, y)dxdy$ y comprobar que es igual a los límites de a) y b).

Ejercicio 8 La integral doble de una función es igual a la integral reiterada

$$\int_{-2}^{1} dx \int_{x}^{-x^2+2} f(x, y)dy$$

Determínese el recinto e inviértase el orden de integración.

Ejercicio 9 El volumen de un recinto M limitado superiormente por la superficie $z = f(x, y)$ e inferiormente por el plano $z = 0$, viene dado por

$$V = \int_{0}^{1} dx \int_{x}^{2x} f(x, y)dy + \int_{1}^{\sqrt{2}} dx \int_{x}^{2/x} f(x, y)dy$$

a) Determínese M e inviértase el orden de integración.

b) Calcúlese V si $f(x, y) = xy$.

Ejercicio 10 Calcule la integral de

$$f(x, y) = x^2 y$$

en la corona circular $\{(x, y) : 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$.

Ejercicio 11 Sea la superficie $z = x^2 - y^4 + \frac{4}{3} y^{\frac{3}{2}}$ Calcúlese la longitud del arco de curva que sobre la superficie determina $x = t^2$, $y = t$ desde $t = 0$ a $t = 1$.

Ejercicio 12 Aplicación del cambio de coordenadas polares al cálculo de límites. Estúdiense los límites en $(0,0)$ de las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = x \text{ sen } \dfrac{1}{x^2+y^2}$ si $f(0,0)=0$.

b) $f(x,y) = \dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $f(0,0)=0$.

Ejercicio 13 Calcúlese la integral de $f(x,y) = x - y$ sobre el recinto

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1,\ |y| \leq 1\right\}$$

Ejercicio 14 Calcúlese la integral de $f(x,y) = x^3 y$ sobre el recinto limitado por la parte positiva de los ejes, la circunferencia $x^2+y^2=1$ y la elipse $x^2+4y^2=4$.

Ejercicio 15 Determínese el volumen comprendido entre $x \geq 0$, $y \geq 0$, el paraboloide $z = xy$ y los planos $x = 1$ e $y = 2$.

Ejercicio 16 Determínense los límites de integración A, B, C, D, E de la integral

$$\int_M f(x,y)dxdy = \int_0^A dx \int_B^C f(x,y)dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_D^E f(x,y)dy,$$

en donde $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1;\ y^2 \leq x \leq \sqrt{2-y^2}\}$.

Ejercicio 17 Calcúlese la longitud del arco de curva de la hélice circular $x = a\cos t$, $y = a\ sen\ t$, $z = ct$ determinado por los puntos $(a,0,0)$ y $(a,0,2\pi c)$.

Ejercicio 18 Determínese el valor de la integral $\int_M \dfrac{\ln^4 x}{(x+y)^2} dydx$, en donde M es el cuadrilátero de vértices $(1,1), (1,2), (2,2)$ y $(2,4)$.

Ejercicio 19 Sea $f(x,y) = xy^2 + x^2 y$. Calcule la integral $\int_M f(x,y)dxdy$ en donde

$$M = \{(x,y) : -1 \leq x \leq 1, |y| \leq 1\}.$$

Ejercicio 20 Sea la función $f(x,y) = (x+y)^2$. Calcule la integral $\int_M f(x,y)dxdy$ en donde

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x^2\}$$

Ejercicio 21 Calcule la integral

$$I = \int_S (x-y)^2 dxdy$$

en donde

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \geq x^2 + y^2 \geq 1,\ x \geq 0\}.$$

Ejercicio 22 Calcule la integral $\int_S (x+y^2)\, dxdy$ en donde

$$S = \{(x,y) : y \geq x^2,\ \ y - 2 + x \leq 0,\ \ y - 2 - x \leq 0\}$$

Ejercicio 23 Calcule el valor de la integral

$$I = \int_M \sqrt{x+y} dxdy$$

en donde $M = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 3,\ \ 0 \leq y \leq 1\}$.

Ejercicio 24 Calcule la integral

$$\int_T (x-y)dxdy$$

en donde $T \subset \mathbb{R}^2$ es el triángulo de vértices $(0,-1)$, $(0,1)$, $(1,0)$.

SOLUCIONES

Solución 1 Gráficamente el recinto propuesto representa la corona circular delimitada por dos circunferencias de radio 1 y 2 respectivamente. Luego utilizamos cordenadas polares, $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$. $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$. De esta manera sustituyendo directamente

$$S = \{(r, \theta) : r \in [1, 2], \theta \in [0, 2\pi)\}.$$

Del mismo modo la función

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy$$

en cordenadas polares tiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) = r^2(\cos^2\theta \ + \ \mathrm{sen}^2\theta) + 2r^2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta = \\ &= r^2(1 + \mathrm{sen}\,2\theta). \end{aligned}$$

Luego la integral viene dada por

$$\begin{aligned} I = \int_0^{2\pi}\int_1^2 (r^2 + r^2\,\mathrm{sen}\,2\theta) r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_1^2 r^3(1 + \mathrm{sen}\,2\theta)\,dr\,d\theta = \\ = \ \int_1^2 r^3 dr \int_0^{2\pi}(1 + \mathrm{sen}\,2\theta)d\theta \\ = \ \left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=1}^{r=2}\left[\theta - \frac{\cos 2\theta}{2}\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \\ = \frac{2^4-1}{4}2\pi = \frac{15}{2}\pi \end{aligned}$$

Solución 2 El recinto tiene la expresión

$$S = \{(x, y) : y \leq x - 2,\ y \leq 2 + x,\ x^2 \leq y\},$$

y por tanto está delimitado por la rectas $y = x - 2$, $y = x + 2$ y la parabola $y = x^2$. Gráficamente se observa que podemos considerar el recinto S como unión de los subrecintos (véase gráfica de la solución 22 que tiene el mismo recinto de integración)

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x, y) : -1 \leq x \leq 0, x^2 \leq y \leq 2 + x\}, \\ S_2 &= \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 2 - x\}. \end{aligned}$$

en donde $(-1,1)$ y $(1,1)$ son los puntos de corte de la parabola $y = x^2$ con las rectas $y = 2 + x$ y $y = 2 - x$ respectivamente. Como consecuencia

$$\begin{aligned} I &= \int_{S_1} dxdy + \int_{S_2} dxdy = \int_{-1}^{0} \int_{x^2}^{2+x} dxdy + \int_0^1 \int_{x^2}^{2-x} dxdy = \\ &= \int_{-1}^{0} (2 + x - x^2) dx + \int_0^1 (2 - x - x^2) dx = \\ &= \left[2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{x=-1}^{x=0} + \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} = \\ &= 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

Solución 3 Gráficamente se puede ver que la base de la piramide la determina el tríangulo del plano $0XY(z = 0)$, determinado por los puntos $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,2)$.

$$M = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2 - 2x\}$$

La altura de la piramide $z = z(x,y)$ de un punto de la base la determina el plano del espacio que pasa por los puntos $(1,0,0)$, $(0,0,3)$, $(0,2,0)$

$$6x + 3y + 2z = 6,$$

y por tanto

$$z(x,y) = \frac{6 - (6x + 3y)}{2} = 3 - 3x - \frac{3}{2}y$$

El volumen de la piramide viene dado por la integral

$$\begin{aligned} I &= \int_M z(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} dy \int_0^{3-3x-\frac{3}{2}y} dz = \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} (3 - \frac{3}{2}y - 3x)dy \\ &= \int_0^1 3dx \int_0^{2-2x} (1 - \frac{1}{2}y - x)dy = \int_0^1 3dx \left((1-x)(2-2x) - \frac{1}{4}(2-2x)^2 \right) \\ &= \int_0^1 3\left(x-1\right)^2 dx = 1 \end{aligned}$$

que compruebe coincide con la fórmula usual

$$\frac{areabase \times altura}{3} = \frac{1 \times 3}{3} = 1$$

Solución 4 Para $x = u$ e $y = (1/2)u + v$ se tiene $u/2 \leq (1/2)u + v \leq (u+4)/2$ o lo que es equivalente $0 \leq v \leq 2$. por tanto M se transforma en

$$T = \left\{(u,v) : 0 \leq u \leq 2,\ 0 \leq v \leq 2.\right\}.$$

El jacobiano del cambio es 1. Teniendo en cuenta $2y - x = 2v$, resulta

$$I = \textstyle\int_0^2 du \int_0^2 2u^3 v e^{4v^2} dv = \int_0^2 u^3 du \left[\frac{1}{4} e^{4v^2}\right]_0^2 =$$

$$= \frac{1}{4}(e^{16} - 1) \textstyle\int_0^2 u^3 du = e^{16} - 1.$$

Solución 5 Como el integrando $f(x,y) = \dfrac{|y|}{x^2 + y^2}$ satisface $f(x,-y) = f(x,y)$, la integral pedida es el doble de la integral sobre

$$D^+ = \{(x,y) \in D : y \geq 0,\ 4 \leq x^2 + y^2 \leq 25\}.$$

Integramos mediante un cambio a coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, cuyo jacobiano es $J(r,\theta) = r$.

$$\int_D \frac{|y|}{x^2+y^2}\,dxdy = 2\int_{D^+} \frac{y}{x^2+y^2}\,dxdy =$$
$$= 2\int_0^\pi \int_2^5 \frac{r\,\mathrm{sen}\ \theta}{r^2} r\,drd\theta = 6\int_0^\pi \mathrm{sen}\ \theta\,d\theta = 12.$$

Solución 6 Para calcular la longitud como $x'(t) = 12$, $y'(t) = 12t^{1/2}$, $z'(t) = 6t$ se aplica directamente la fórmula (p. 297 libro de texto)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt &= \int_0^1 \sqrt{144 + 144t + 36t^2}dt = \\
&= \int_0^1 \sqrt{(6t+12)^2}dt = \\
&= \int_0^1 (6t+12)dt = \\
&= 15
\end{aligned}$$

Solución 7 a) Las partición en n subrectángulos de la misma longitud en los intervalos A y B son

$$\begin{aligned}
P_n([0,2]) &= \left\{0, \frac{2}{n}, 2\frac{2}{n}, 3\frac{2}{n}, ..., (i-1)\frac{2}{n}, i\frac{2}{n}, ..., (n-1)\frac{2}{n}, 2\right\} \\
P_n([1,4]) &= \left\{1, 1+\frac{3}{n}, 1+2\frac{3}{n}, ..., 1+(j-1)\frac{3}{n}, 1+j\frac{3}{n}, ..., 1+(n-1)\frac{3}{n}, 4\right\}
\end{aligned}$$

por tanto la partición pedida es el producto cartesiano de ambas, $P_n = P_n([0,2]) \times P_n([1,4])$.

b) En el subrectángulo de la partición $Q_{ij} = \left[(i-1)\frac{2}{n}, i\frac{2}{n}\right] \times \left[1+(j-1)\frac{3}{n}, 1+j\frac{3}{n}\right]$ la función f alcanza su máximo en el vértice $(i\frac{2}{n}, j\frac{3}{n})$ y su mínimo en $((i-1)\frac{2}{n}, 1+(j-1)\frac{3}{n})$ por tanto el supremo y el infimo en Q_{ij} vienen dados por

$$\begin{aligned} M(f,Q_{ij}) &= i\frac{2}{n}+1+j\frac{3}{n}=1+\frac{1}{n}(2i+3j) \\ m(f,Q_{ij}) &= (i-1)\frac{2}{n}+1+(j-1)\frac{3}{n}=1+\frac{1}{n}(2i+3j-5) \end{aligned}$$

Como el área de cada subrectángulo es $|Q_{ij}|=\frac{6}{n^2}$, la suma inferior viene dada por

$$\begin{aligned} s(f,P_n) &= \sum_{i,j=1}^{n}\frac{6}{n^2}\left(1+\frac{1}{n}(2i+3j-5)\right)=\frac{6}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n}(2i+3j-5)\right)\right]= \\ &= \frac{6}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n}1+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2i+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}3j-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}5\right] \end{aligned}$$

Como el sumatorio n veces de una cantidad constante es n por la cantidad, de esta manera $\sum_{i=1}^{n}1=n$, y por otro lado $\sum_{i=1}^{n}i=1+n$, ya que es la suma de una progresión aritmética de n términos y diferencia 1, resulta

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}1 &= n,\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}3j=\frac{1}{n}3jn=3j,\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}5=\frac{1}{n}5n=5 \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2i &= 2\sum_{i=1}^{n}i=\frac{2}{n}\frac{1+n}{2}n=\frac{1+n}{n}n=1+n \end{aligned}$$

y se tiene

$$\begin{aligned} s(f,P_n) &= \frac{6}{n^2}\sum_{j=1}^{n}(n+3j-5+1+n)=\frac{6}{n^2}\left(2n^2-4n+3\sum_{j=1}^{n}j\right)= \\ &= 12-\frac{4}{n}+\frac{1+n}{n^2}+\frac{6}{n^2}3\frac{1+n}{2}n=12-\frac{4}{n}+\frac{1+n}{n^2}+\frac{9}{n}+9=21+\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

por tanto

$$\lim_{n\to\infty} s(f,P_n) = \lim_{n\to\infty}\left(21+\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2}\right)21+\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2}=21$$

c) Como $M(f,Q_{ij}) = 1+\frac{1}{n}(2i+3j)$, la suma superior es

$$\begin{aligned} S(f,P_n) &= \sum_{i,j=1}^{n}\frac{6}{n^2}\left(1+\frac{1}{n}(2i+3j)\right) = \frac{6}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n}2i+\frac{1}{n}3j)\right)\right] = \\ &= \frac{6}{n^2}\sum_{j=1}^{n}(n+1+n+3j) = \frac{6}{n^2}\left(2n^2+n+3\frac{1+n}{2}n\right) = \\ &= 12+\frac{6}{n}+\frac{18}{2n}+\frac{18}{2} = 12+\frac{30}{n}+9 \end{aligned}$$

y por tanto

$$\lim_{n\to\infty} S(f,P_n) = \lim_{n\to\infty}\left(12+\frac{30}{n}+9\right) = 21$$

d) El valor de la integral es

$$I=\int_0^2\left[\int_1^4(x+y)dy\right]dx = \int_0^2\left(\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_1^4\right)dx = \int_0^2\left(3x+\frac{15}{2}\right)dx = \left[3\frac{x^2}{2}+\frac{15x}{2}\right]_0^2 = 6+15=21$$

Solución 8 El recinto (véase figura)

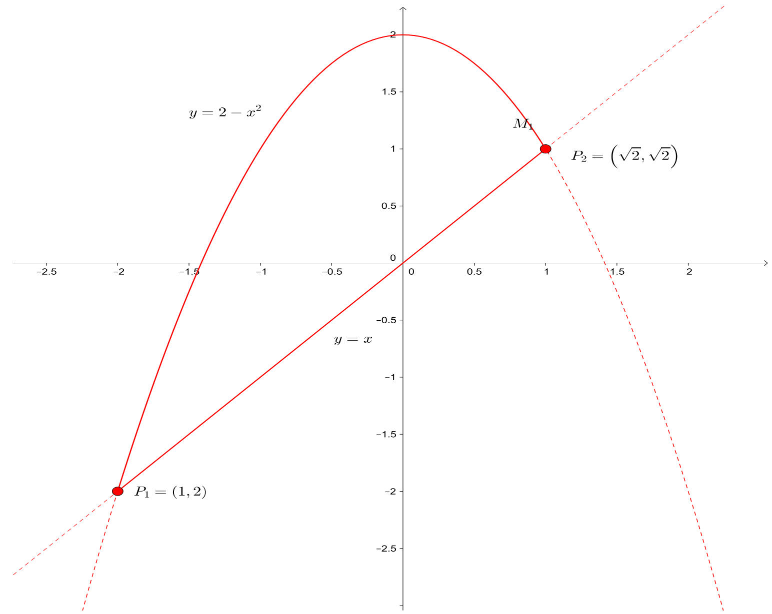
$$M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -2\le x\le 1, x\le y\le -x^2+2\right\}$$

es la parte de plano limitada por la parábola $y=-x^2+2$ y la recta $y=x$, que se cortan en los puntos $(-2,-2)$ y $(1,1)$. Por tanto y varía entre -2 y 2 que es el máximo de la parábola (se alcanza en $x=0$), con lo que tenemos que dividir el recinto en dos subrecintos

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq y \leq 1, -\sqrt{2-y} \leq x \leq y\right\} \\
M_2 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 2, -\sqrt{2-y} \leq x \leq \sqrt{2-y}\right\}
\end{aligned}
$$

como consecuencia

$$I = \int_{-2}^{1} dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{y} f(x,y)dx + \int_{1}^{2} dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx$$



Solución 9 a) El recinto M (represéntese) es la unión de los subrecintos M_1 y M_2, en donde

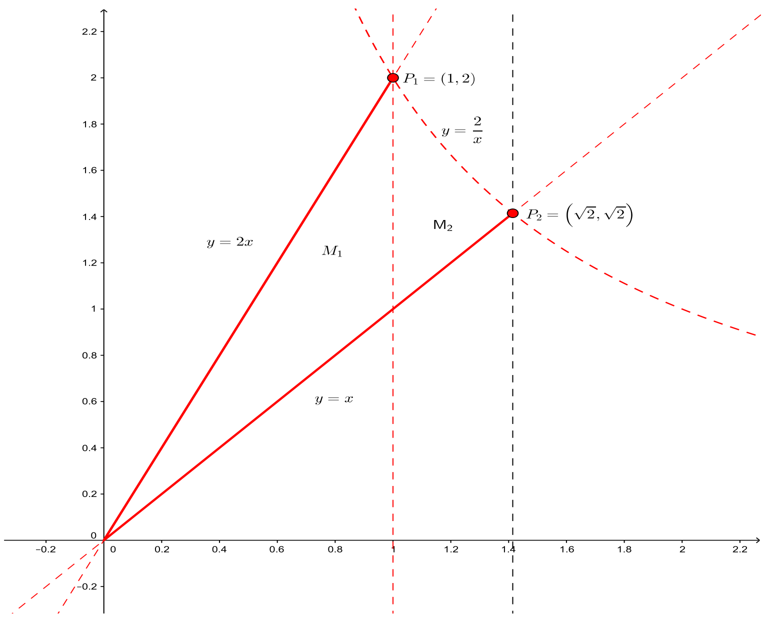
$$
\begin{aligned}
M_1 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 2x\right\} \\
M_2 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq \sqrt{2}, x \leq y \leq 2/x\right\}
\end{aligned}
$$

por tanto el recinto es la parte del plano limitada por las rectas $y = x, y = 2x$ y la hipérbola $y = 2/x$. Si invertimos el orden de integración, la variación de y entre 0 y $\sqrt{2}$ y entre $\sqrt{2}$ y 2, determina otros dos subrecintos

$$\begin{aligned} M_1' &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \sqrt{2}, y/2 \leq x \leq y\right\} \\ M_2' &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{2} \leq y \leq 2, y/2 \leq x \leq 2/y\right\} \end{aligned}$$

con lo que

$$V = \int_0^{\sqrt{2}} dy \int_{y/2}^{y} f(x,y)dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} dy \int_{y/2}^{2/y} f(x,y)dx$$



b) Utilizando la primera expresión de V se tiene

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^1 dx \int_x^{2x} xydy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_x^{2/x} xydy = \\
&= \int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_x^{2x} dx + \int_1^{\sqrt{2}} x\left[\frac{y^2}{2}\right]_x^{2/x} dx = \\
&= \int_0^1 \frac{3x^3}{2}dx + \int_1^{\sqrt{2}} \left(\frac{4}{2x} - \frac{x^3}{2}\right) dx = \frac{3}{8} + \ln 2 - \frac{3}{8} = \ln 2
\end{aligned}$$

Nota. Compruébese el resultado mediante la otra expresión de V

Solución 10 Se utiliza el cambio a coordenadas polares $x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\, sen\,\theta$, cuyo jacobiano es $J = \rho$, con lo cual el recinto es $M = \{(\rho,\theta) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 1 \leq \rho \leq 2\}$ Como $f(\rho\cos\theta, \rho\, sen\,\theta) = \rho^2\cos^2\theta\rho\, sen\,\theta = \rho^3\cos^2\theta\, sen\,\theta$, resulta

$$\begin{aligned}
I &= \int_M f(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)\rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\operatorname{sen}\theta\left(\int_1^4 \rho^4 d\rho\right) d\theta = \\
&= \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\operatorname{sen}\theta d\theta \int_1^2 \rho^4 d\rho = \frac{31}{5}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\operatorname{sen}\theta d\theta = \frac{31}{5}\left[\frac{-\cos^3\theta}{3}\right]_0^{2\pi} = 0
\end{aligned}$$

Solución 11 Se trata de calcular la longitud del arco de curva

$$x(t) = t^2,\ y(t) = t,\ z(t) = \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}},\ t \in [0,1]$$

Como

$$x'(t) = 2t,\ y'(t) = 1,\ z'(t) = 2\sqrt{t},\ t \in [0,1]$$

aplicamos la fórmula

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}dt = \int_0^1 \sqrt{4t^2+1+4t}dt = \int_0^1 \sqrt{(2t+1)^2}dt = \\ &= \int_0^1 (2t+1)dt = 2 \end{aligned}$$

Solución 12 Efectuamos el cambio $x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\, sen\,\theta$.

a) Resulta

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \text{ sen } \frac{1}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \rho\cos\theta \text{sen}\,\frac{1}{\rho^2} = 0$$

ya que

$$0 \leq \left| \lim_{\rho\to 0} \rho\cos\theta \text{sen}\,\frac{1}{\rho^2} \right| \leq \rho \to 0$$

b) Se tiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2}{\rho} = \lim_{\rho\to 0} \rho\,|\cos\theta \,\text{sen}\,\theta| = 0$$

ya que

$$0 \leq \rho\,|\cos\theta\,\text{sen}\,\theta| \leq \rho \to 0$$

Solución 13 Como

$$M = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|\leq 1,\ |y|\leq 1\right\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1\leq x\leq 1,\ -1\leq y\leq 1\}$$

integrando directamente

$$\begin{aligned}\int_M f(x,y)dxdy &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(x-y)dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}xdxdy - \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}ydxdy = \\ &= \int_{-1}^{1}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=-1}^{x=1}dy - \int_{-1}^{1}y\,[x]_{x=-1}^{x=1}dy = 0-2\int_{-1}^{1}ydy = \\ &= -2\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=-1}^{y=1} = 0\end{aligned}$$

Solución 14 Se tiene que

$$M=\left\{(x,y):0\le x\le 1,\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right\}\cup\left\{(x,y):1\le x\le 2,0\le y\le\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right\}$$

(véase figura). Luego

$$\int_M f(x,y)dxdy = \int_0^1\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}x^3ydydx + \int_1^2\int_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}x^3ydydx$$

Como

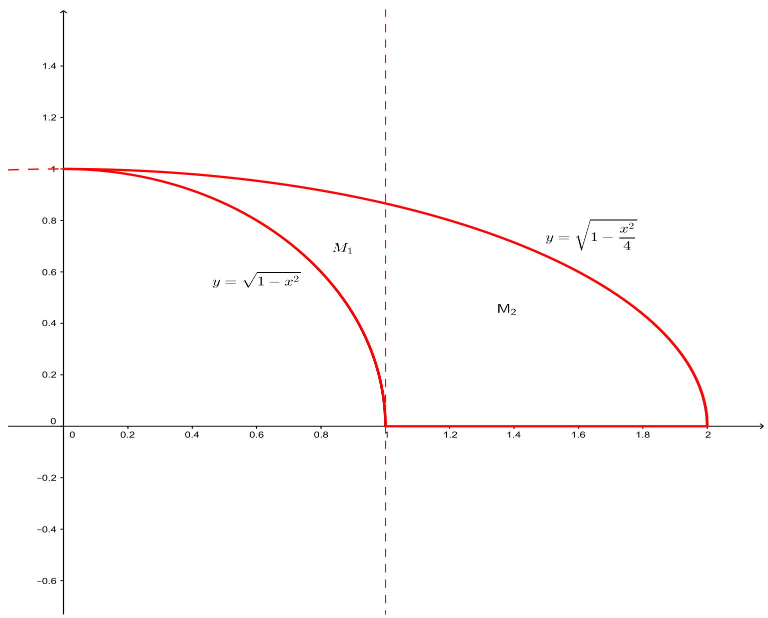
$$\begin{aligned}&\textstyle\int_0^1\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}x^3ydxdy = \int_0^1 x^3\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}ydxdy = \\ &\textstyle= \int_0^1 x^3\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}dx = \int_0^1 x^3\frac{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}^2-\sqrt{1-x^2}^2}{2}dx \\ &\textstyle= \int_0^1 x^3\frac{1-\frac{x^2}{4}-\left(1-x^2\right)}{2}dx = \int_0^1 x^3\frac{3}{8}x^2dx = \frac{3}{8}\int_0^1 x^5dx \\ &\textstyle= \frac{3}{8}\left[\frac{x^6}{6}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{16}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}x^3ydxdy = \int_1^2 x^3\int_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}ydydx \\ &\textstyle\int_1^2 x^3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}x^2\right)dx = \int_1^2\frac{x^3}{2}dx - \int_1^2\frac{x^5}{8}dx \\ &\textstyle= \frac{15}{8}-\frac{21}{16} = \frac{9}{16}\end{aligned}$$

entonces

$$\int_M f(x,y)dxdy = \frac{1}{16} + \frac{9}{16} = \frac{5}{8}$$



Solución 15 El recinto M del que se quiere calcular el volumen viene dado por

$$M = \{(x,y,z) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2, 0 \le z \le xy\}$$

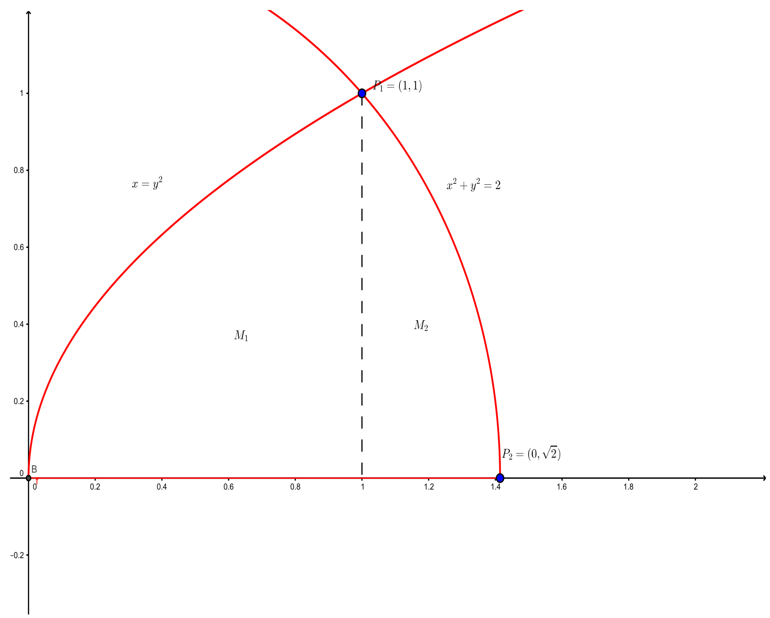
El volumen viene dado por la integral (véase p. 295 libro de texto)

$$\begin{aligned} \int_M dxdydz &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{xy} dxdydz = \int_0^1 \int_0^1 xydxdy = \int_0^1 xdx \int_0^2 ydy = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1} \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Solución 16 El recinto M está situado en el primer cuadrante y limitado por el eje x, la parábola $y^2 = x$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$. (véase figura adjunta) Los puntos de corte son $P_1 = (1, 1)$, $P_2 = (\sqrt{2}, 0)$. Luego podemos considerar a M como la unión de los recintos

$$M_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \sqrt{x}\},$$
$$M_2 = \{(x, y) : 1 \leq x \leq \sqrt{2},\ 0 \leq y \leq \sqrt{2 - x^2}\},$$

y por lo tanto $A = 1$, $B = D = 0$, $C = \sqrt{x}$, $E = \sqrt{2 - x^2}$.



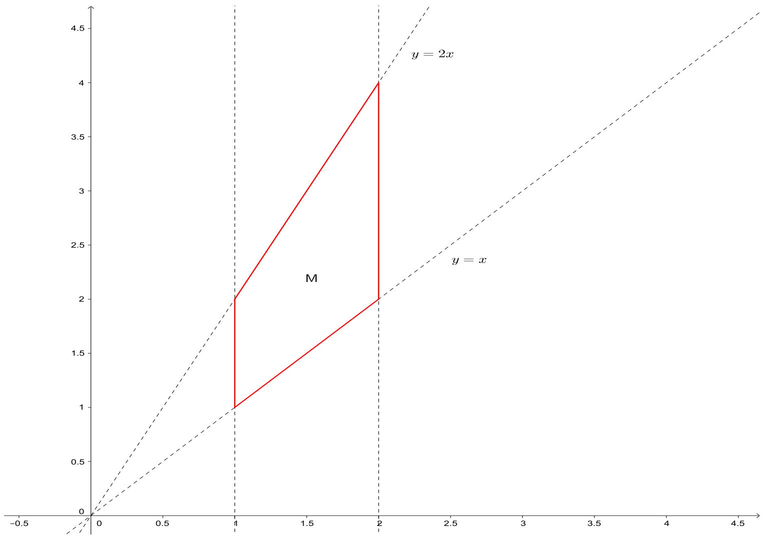
Solución 17 Dada la parametrización

$$x(t) = a \cos t, y(t) = a \text{ sen } t,\ \ z(t) = ct$$

como
$$(x(0), y(0), z(0)) = (a, 0, 0),\ (x(2\pi), y(2\pi), z(2\pi)) = (a, 0, 2\pi c)$$
aplicando fórmula de la página 297 libro de texto se tiene que la longitud viene dada por la integral
$$\int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt =$$
Como $x'(t) = -a\text{sen}t$, $y'(t) = a\cos t$, $z'(t) = c$. Por tanto
$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a\text{sen }t)^2 + (a\cos t)^2 + c^2}dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(\cos^2 t + \text{sen}^2 t) + c^2}dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + c^2}dt \\ &= 2\pi\sqrt{a^2 + c^2}\end{aligned}$$

Solución 18 El recinto es $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2;\ x \le y \le 2x\}$ (véase figura). Por tanto se tiene
$$\begin{aligned}\int_1^2 \int_x^{2x} \frac{\ln^4 x}{(x+y)^2} dydx &= \int_1^2 \ln^4 x \left[-\frac{1}{x+y}\right]_{y=x}^{y=2x} dx = \\ &= \int_1^2 \frac{1}{6x} \ln^4 x dx = \frac{1}{30} \ln^5 2.\end{aligned}$$

Solución 19 El recinto integración viene dado por
$$M = \{(x, y) : -1 \le x \le 1, |y| \le 1\} = [-1, 1] \times [-1, 1]$$



Integrando directamente

$$\begin{aligned}
\int_M f(x,y)dxdy &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(xy^2+x^2y)dxdy \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}xy^2dxdy + \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}x^2ydxdy \\
&= \left(\int_{-1}^{1}xdx\right)\left(\int_{-1}^{1}y^2dy\right) + \left(\int_{-1}^{1}ydy\right)\left(\int_{-1}^{1}x^2dx\right) \\
&= \left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=-1}^{y=1}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=-1}^{x=1} + \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=-1}^{y=1}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=-1}^{x=1} \\
&= \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) \\
&= 0+0=0
\end{aligned}$$

Solución 20 Calculamos la integral directamente

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2}(x+y)^2 dydx = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2}(x^2+y^2+2xy)dydx \\
&= \int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)dx + \int_{-1}^{1}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1-x^2} dx \\
&\quad + \left(\int_{-1}^{1} 2x(1-x^2)dx\right)\int_{-1}^{1}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1-x^2} dx \\
&= \int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)dx + \int_{-1}^{1}\frac{(1-x^2)^3}{3}dx \\
&\quad + \left(\int_{-1}^{1} 2x(1-x^2)dx\right)\int_{-1}^{1}\frac{(1-x^2)^2}{2}dx \\
&= I_1 + I_2 + I_3
\end{aligned}
$$

Cada integral viene dada por

- $$I_1 = \int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=-1}^{x=1} - \left[\frac{x^5}{5}\right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$$

- $$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_{-1}^{1}\frac{(1-x^2)^3}{3}dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}(1-3x^2+3x^4-x^6)dx \\
&= \frac{1}{3}\left(2 - 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=-1}^{x=1} + 3\left[\frac{x^5}{5}\right]_{x=-1}^{x=1} - \left[\frac{x^7}{7}\right]_{x=-1}^{x=1}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(2 - 3\cdot\frac{2}{3} + 3\cdot\frac{2}{5} - \frac{2}{7}\right) = \frac{32}{105}
\end{aligned}
$$

- $I_3 = 0$, ya que $\int_{-1}^{1} 2x(1-x^2)dx = [x^2]_{x=-1}^{x=1} - \left[\frac{x^4}{2}\right]_{x=-1}^{x=1} = 0$

Luego finalmente

$$I = \frac{4}{15} + \frac{32}{105} = \frac{4}{7}$$

Solución 21 Desarrollamos el integrando

$$\int_S (x-y)^2 dxdy = \int_S (x^2+y^2-2xy)dxdy$$

Mediante un cambio a polares $x = r\cos\theta$, $y = rsen\theta$, $dxdy = rdrd\theta$

$$\begin{aligned} S &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \geq x^2+y^2 \geq 1,\ x \geq 0\} \\ &= \left\{(r,\theta) : 1 \leq r \leq \sqrt{2},\ -\tfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \tfrac{\pi}{2}\right\}, \end{aligned},$$

calculamos la integral sustituyendo directamente

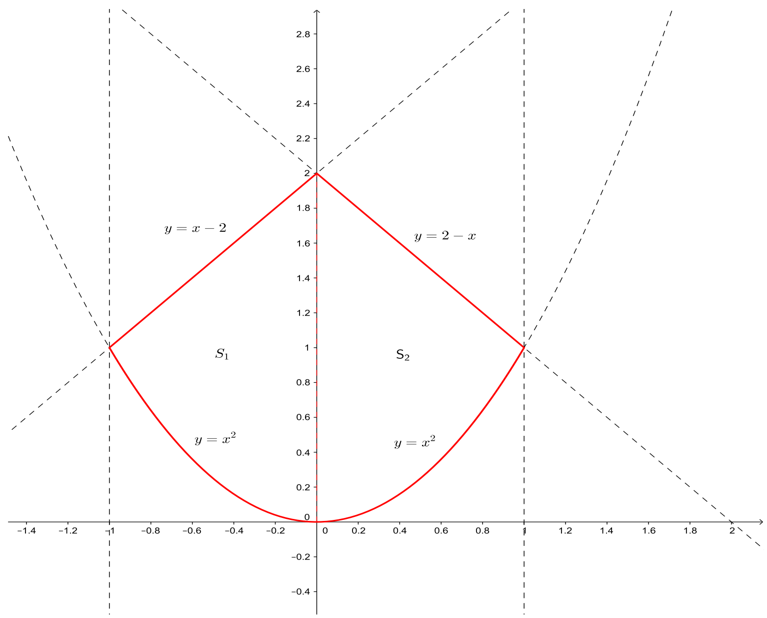
$$\begin{aligned} \int_S (x^2+y^2-2xy)dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^{\sqrt{2}} (r^2\cos^2\theta + r^2 sen^2\theta - 2r\cos\theta r sen\theta) rdrd\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_1^{\sqrt{2}} (r^2 - rsen2\theta) rdrd\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_1^{\sqrt{2}} (r^2 - rsen2\theta) rdrd\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_1^{\sqrt{2}} r^3 drd\theta - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} sen2\theta d\theta \int_1^{\sqrt{2}} r^2 drd\theta \\ &= \pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=1}^{r=\sqrt{2}} - \left[\frac{-\cos 2\theta}{2}\right]_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=1}^{r=\sqrt{2}} \\ &= \pi\frac{4-1}{4} + 0 = \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

Solución 22 El recinto tiene la expresión

$$S = \{(x, y) : y \leq 2 - x,\ y \leq 2 + x,\ x^2 \leq y\},$$

y por tanto está delimitado por la rectas $y = x - 2$, $y = x + 2$ y la parabola $y = x^2$. Gráficamente se observa que podemos considerar el recinto S como unión de los subrecintos (véase figura)

$$S_1 = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 0, x^2 \leq y \leq 2 + x\},$$
$$S_2 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 2 - x\}.$$



Luego la integral se puede calcular como la suma de dos integrales

$$\int_S \left(x + y^2\right) dxdy = \int_{-1}^{0} dx \int_{x^2}^{2+x} (x + y^2)dy + \int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} (x + y^2)dy.$$

Calculemos cada integral por separado. En primer lugar

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{0} dx \int_{x^2}^{2+x} (x+y^2)dy &= \int_{-1}^{0} x\,[y]_{y=x^2}^{y=2+x}\,dx + \int_{-1}^{0} \left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=x^2}^{y=2+x} dx \\
&= \int_{-1}^{0} x\left(2+x-x^2\right)dx + \int_{-1}^{0} \left(\frac{(2+x)^3}{3} - \frac{x^6}{3}\right) dx \\
&= 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=-1}^{x=0} + \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=-1}^{x=0} - \left[\frac{x^4}{4}\right]_{x=-1}^{x=0} \\
&\quad + \left[\frac{(2+x)^4}{12}\right]_{x=-1}^{x=0} - \left[\frac{x^7}{21}\right]_{x=-1}^{x=0} \\
&= -1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{16}{12} - \frac{1}{12} - \frac{1}{21} = \frac{11}{14},
\end{aligned}$$

Del mismo modo

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{1} dx \int_{x^2}^{2-x} (x+y^2)dy &= \int_{-1}^{0} x\,[y]_{y=x^2}^{y=2-x}\,dx + \int_{-1}^{0} \left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=x^2}^{y=2-x} dx \\
&= \int_{0}^{1} x\left(2-x-x^2\right)dx + \int_{0}^{1} \left(\frac{(2-x)^3}{3} - \frac{x^6}{3}\right) dx \\
&= 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1} - \left[\frac{x^4}{4}\right]_{x=0}^{x=1} \\
&\quad + \left[-\frac{(2-x)^4}{12}\right]_{x=0}^{x=1} - \left[\frac{x^7}{21}\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} + \frac{16}{12} - \frac{1}{21} = \frac{34}{21}
\end{aligned}$$

Luego

$$\int_S \left(x+y^2\right) dxdy = \frac{11}{14} + \frac{34}{21} = \frac{101}{42}$$

Solución 23 Calculamos la integral directamente

$$\begin{aligned}
I &= \textstyle\int_M \sqrt{x+y}dxdy = \int_0^3 \left(\int_0^1 (x+y)^{\frac{1}{2}} dy\right) dx \\
&= \textstyle\int_0^3 \left[\frac{(x+y)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{y=0}^{y=1} dx \\
&= \textstyle\frac{2}{3}\left(\int_0^3 (x+1)^{\frac{3}{2}} dx - \int_0^3 x^{\frac{3}{2}} dx\right) \\
&= \textstyle\frac{2}{3}\left(\left[\frac{(x+1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_{x=0}^{x=3} - \left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_{x=0}^{x=3}\right) \\
&= \textstyle\frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}\left(2^5-1\right) - \frac{2}{5}\left(3^{\frac{5}{2}}-0\right)\right) \\
&= \textstyle\frac{4}{15}\left(2^5 - 9\sqrt{3} - 1\right)
\end{aligned}$$

Solución 24 Representado gráficamente la figura, se puede ver fácilmente la siguiente parametrización de T

$$T = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ x-1 \leq y \leq 1-x\}$$

La integral viene dada por

$$\int_T (x-y)dxdy = \int_0^1 \int_{x-1}^{1-x} (x-y)dydx$$

Resolvemos directamente la integral aplicando integración reiterada.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{x-1}^{1-x} (x-y)dydx &= \int_0^1 (1-x-x+1)(1-x)dx - \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=x-1}^{y=1-x} dx \\
&= \int_0^1 2x(1-x)dx - \int_0^1 \left(\frac{(1-x)^2}{2} - \frac{(x-1)^2}{2}\right) dx \\
&= 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1} - 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1} - \left[-\frac{(1-x)^3}{6} - \frac{(x-1)^3}{6}\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{2}{2} - \frac{2}{3} - \left(0 - 0 - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$