Capítulo 8

Gravitación

8.1. Introducción - Leyes de Kepler

La gravitación es uno de los temas mas antiguas de la física porque surge del estudio de los movimiento de los cuerpos celestes. El estudio moderno de la mecánica celeste y de la gravitación arranca con las leyes que enunció Kepler (1571-1630) tras un estudio minucioso de las mediciones astronómicas de Tycho Brahe (1546-1601). Las leyes de Kepler son tres y dicen así:

1. Todos los planetas se desplazan alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas. El Sol se encuentra en uno de los focos de la elipse.

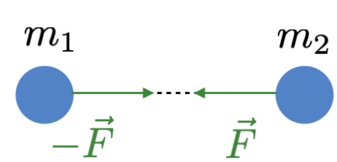
2. El radio vector que une un planeta y el Sol recorre áreas iguales en tiempos iguales.

3. Para cualquier planeta, el cuadrado de su período orbital es directamente proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de su órbita elíptica, $T^2 = Ka^3$.

Tras ser enunciadas estas leyes de manera empírica por Kepler, Newton describe las leyes de gravitación universal que como veremos explica estas leyes.

8.2. Ley de gravitación universal

La ley de gravitación universal, que descubierta por Newton, dice así: dos masas (puntuales) se atraen con un fuerza central, es decir que se dirigida a lo largo de la linea que une ambas masa, que es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia y directamente proporcional al producto de las masa. Es decir



$$\vec{F} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{e}_r. \tag{8.1}$$

Podemos razonar como hizo Newton al origen de este ley. Dado que la aceleración con caen todos los cuerpos en la superficie terrestre es la misma, de acuerdo con la secundo ley de Newton, la fuerza gravitatoria debe ser proporcional a la masa de los cuerpos de acuerdo con la ecuación

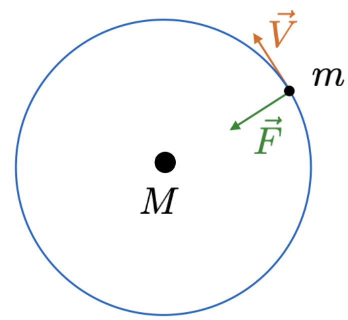
$$\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{g} \qquad \rightarrow \qquad \vec{a} = \vec{g}. \tag{8.2}$$

Ahora el principio de acción y reacción nos dice que si la masa m_2 ejerce una fuerza $\vec{F}$ sobre la masa m_1, la masa m_1 debe ejercer una fuerza igual y opuesta $-\vec{F}$ sobre la masa m_2. Por tanto dicha fuerza debe ser también proporcional a m_2, y en consecuencia F es proporcional al producto $m_1 m_2$. De (8.1) y (8.2), obtenemos las amplitudes de las aceleraciones de ambos objectos

$$a_1 = \frac{F}{m_1} = G\frac{m_2}{r^2} \qquad\qquad a_2 = \frac{F}{m_2} = G\frac{m_1}{r^2}. \tag{8.3}$$

Por otro parte, la ley de las áreas indica que se trata de una **fuerza central**, porque para este tipo de fuerzas se conserva el momento angular y la velocidad angular es constante.

Por último la tercera ley de Kepler indice que la fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre las masas. En efecto, supongamos una partícula de masa m que se mueve bajo la fuerza gravitatoria de una masa M mucho mas mayor que por tanto podemos considerar aproximamente en reposo. Supongamos que m describe una órbita circular de radio R en el sistema de reposo M. La ecuación de movimiento es



$$F = m\frac{V^2}{R}, \tag{8.4}$$

siendo R el radio de la órbita. Ahora

$$V^2 = \omega^2 R^2 = 4\pi^2\frac{R^2}{T^2} \qquad \text{luego} \qquad F = 4\pi^2\frac{mR}{T^2}. \tag{8.5}$$

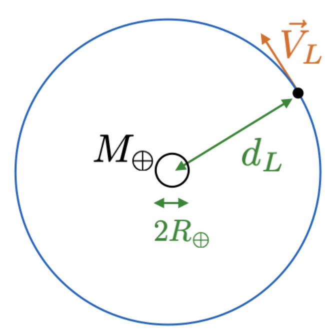
Entonces la tercera ley de Kepler nos dice $T^2 = kR^3$. Luego

$$F = 4\pi^2\frac{mR}{kR^3} = \frac{4\pi^2}{k}\frac{m}{R^2}. \tag{8.6}$$

Es decir la fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

El proprio Newton comprobó la veracidad de la ley del cuadrado de la distancia, comprobando la aceleración de la gravitad en la superficie terrestre con la aceleración centrípeta de la Luna en su movimiento alrededor de la Tierra. La aceleración a la surface de la Tierra es $g = 9{,}81$ m/s^2.

Por otro parte, la aceleración centrípeta de la Luna es



$$a_c = \frac{GM_\oplus}{d_L^2} = \frac{V_L^2}{d_L} = \frac{4\pi^2 d_L}{T_L^2}, \tag{8.7}$$

donde d_L es la distancia del centre de la Tierra a la Luna

$$d_L = 3{,}84 \times 10^8 \text{ m} \qquad \text{y} \qquad T_L = 2{,}36 \times 10^6 \text{ s} \tag{8.8}$$

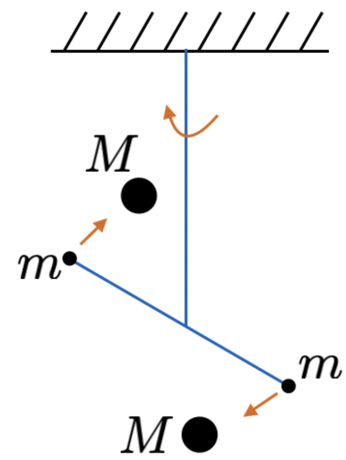
es el periodo orbital de la Luna. Estos datos nos da $a_c \simeq 2{,}72 \times 10^{-3}$ m/s^2. Entonces obtenemos que

$$\frac{g}{a_c} = \frac{9{,}81}{2{,}72} \times 10^3 = 3606 \simeq (60)^2. \tag{8.9}$$

Pero, dando que el radio de la Tierra es $R_\oplus = 6{,}37 \times 10^8$ m, la ley de Newton nos da,

$$g = \frac{GM_\oplus}{R_\oplus^2} \qquad \rightarrow \qquad \frac{g}{a_c} = \frac{d_L^2}{R_\oplus^2} = \left(\frac{384}{6{,}37}\right)^2 \simeq (60)^2. \tag{8.10}$$

8.3. Experimento de Cavendish



El experimento de Cavendish fue la primera medida experimental directa de la constante de la gravitación universal G. Esquemáticamente el experimento de Cavendish consiste en una balanza de torsión de la que penden dos masa que una vez son atraída por dos grandes masas M produciendo un torque y un giro de la balanza de torsión. La medida de este torque de acuerdo con $\tau = -\kappa\theta$, permite calcular la fuerza gravitatoria que produce, y por tanto conociendo las masas y la distancia, la constante de gravitación G. Con este dispositivo Cavendish obtuvo un valor para $G = 6{,}74 \times 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}. El valor actual de G es

$$G = 6{,}67430(15) \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm}^2/\mathrm{kg}^2. \tag{8.11}$$

No se conocen mas cifras significativas debido a la extremada pequeña valor de la interacción gravitatoria.

De todos modos el propósito de Cavendish no era de medir G sino la masa de la Tierra. Esto quiere decir que una vez que conoceos G, de la ley de gravitación tenemos

$$g = G\frac{M_\oplus}{R_\oplus^2}, \tag{8.12}$$

y entonces de $g = 9{,}81$ m/s, del radio de la Tierra $R_\oplus = 6{,}37 \times 10^3$ km. Con el valor de G obtenemos

$$M_\oplus = \frac{g}{G}R_\oplus^2 = 5{,}97 \times 10^{24}\ \mathrm{kg}. \tag{8.13}$$

Una vez que conocemos la masa de la Tierra, podemos calcular la masa del Sol, a partir de

$$G\frac{M_\odot M_\oplus}{d_\oplus^2} = M_\oplus\frac{V_\oplus^2}{d_\oplus} = 4\pi^2 M_\oplus\frac{d_\oplus}{T_\oplus^2} \qquad \text{o sea} \qquad G\frac{M_\odot}{d_\oplus^2} = 4\pi^2\frac{d_\oplus}{T_\oplus^2}, \tag{8.14}$$

que nos permite de calcular la masa del Sol a partir de la masa de la Tierra, la distancia Tierra-Sol $d_\oplus = 1{,}5 \times 10^{11}$ km, y el periodo orbital de la Tierra $T_\oplus = 1$ año. Obtenemos $M_\odot \simeq 2 \times 10^{30}$ kg.

En general si una estrella o una planeta, de masa M, tiene un satélite, podemos calcular su masa m a partir del periodo orbital del satélite y el radio de una órbita circular, a partir de la ley de gravitación. En efecto, de

$$G\frac{Mm}{r^2} = 4\pi^2\frac{mr}{T^2} \qquad \text{o sea} \qquad m = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}. \tag{8.15}$$

8.4. Masa inerte y masa gravitatoria

Al enuncio de la ley de gravitación de Newton, hemos supuesto que la masa inerte m_i que aparece en la secunda ley de Newton de la dinámica $F = ma$ coincide con la masa gravitatoria o "carga gravitatoria" m_g que aparece en la ley de Newton de la la gravitación universal

$$F = G\frac{m_g m_g'}{r^2}. \tag{8.16}$$

Este igualdad descansa en el hecho de que todos las cuerpos caen con la misma aceleración en un campo gravitatorio, de modo que

$$F = m_i a = m_g G\frac{m_g'}{r^2} = m_g g \qquad \text{de donde} \qquad \frac{m_g}{m_i} = \frac{a}{g} = \text{constante}, \tag{8.17}$$

que nos dice que la masa gravitatoria es proporcional a la masa inerte, y tomarlas iguales, es solo una cuestión de elegir las mismas unidades para ambas. Esto hecho es el que utilizamos (por ejemplo en el mercado) para medir masas. Es decir si tenemos des cantidades m y m' de una substancia (por ejemplo jamón) como sus masas gravitatorias son iguales a sus masas inerte tenemos

$$\frac{m}{m'} = \frac{mg}{m'g} = \frac{F}{F'}. \tag{8.18}$$

La igualdad entre masa inerte y masa gravitatoria recibe el nombre de **principio de equivalencia débil**, y es un ingrediente fundamental de la **Relatividad General**.

8.5. Energía potencial gravitatoria

Ya vimos que la **fuerza gravitatoria** es una **fuerza central**, y por tanto es una **fuerza conservativa**, es decir la fuerza se puede expresar como el gradiente de una energía potencial gravitatoria dado por

$$E_P(r) = -G\frac{mm'}{r}, \qquad \text{de modo que} \qquad \vec{F} = -\vec{\nabla}E_P(r) = G\frac{mm'}{r^2}\vec{e}_r, \tag{8.19}$$

y la expresión $E_P(r) = -Gmm'/r$ corresponde a fijar el cero de energía potencial a $r \to \infty$.

Entonces la energía total de un sistema de dos partículas sometidas a su interacción gravitatoria es

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m'v'^2 - G\frac{mm'}{r}. \tag{8.20}$$

Para un sistema de N partículas, sometidas a su interacción gravitatorio, la energía total del sistema es

$$E = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i v_i^2 - \sum_{i<j=1}^{N} G\frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}. \tag{8.21}$$

Como ya vimos, en el caso de dos partículas, podemos **separar el movimiento del centro de masa y el movimiento relativo**. la energía del movimiento relativo es

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 - G\frac{mm'}{r}, \qquad \mu = \frac{mm'}{m+m'}, \tag{8.22}$$

donde μ es la masa reducida, v la velocidad relativa y r la distancia entre las dos partículas.

También vimos que si $m' = M \gg m$, como ocurre por ejemplo en el sistema solar, la masa pesada está aproximadamente inmóvil en el centro de masa, y el movimiento de la partícula ligera al rededor del centro de masa, es aproximadamente igual al movimiento relativo.

Si la partícula se mueve en una órbita circular

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{mm'}{r^2} \qquad \text{de donde} \qquad \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}G\frac{mm'}{r} \qquad \rightarrow \qquad E_K = -\frac{1}{2}E_P. \tag{8.23}$$

Entonces

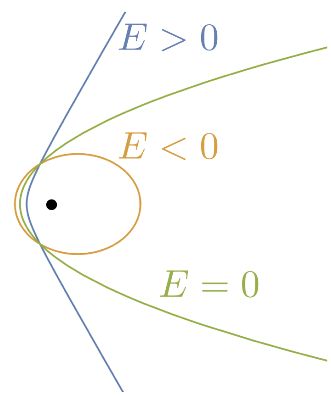
$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mm'}{r} = -\frac{1}{2}G\frac{mm'}{r} = \frac{1}{2}E_P. \tag{8.24}$$

Como ya vimos en el capítulo 4, la ecuaciones (8.23) y (8.24) son validas para cualquier órbita ligada (teorema del virial), es decir con $E < 0$.

Notemos que como la energía potencial es cero en $r \rightarrow \infty$, si una partícula puede alcanzar $r \rightarrow \infty$, la energía total puede escribirse como

$$E = \frac{1}{2}mv_\infty^2 \qquad \rightarrow \qquad v_\infty = \sqrt{\frac{2E}{m}}. \tag{8.25}$$

Entonces si $v_\infty > 0$, $E > 0$ y las órbitas son **hipérbolas**. Para $E = 0$, $v_\infty = 0$, y las órbitas son **parábolas**. Entonces si $E < 0$, la partícula no puede alcanzar $r = \infty$, y tenemos en este caso **órbitas ligadas** que son elipse. Podemos resumir la situación en el siguiente esquema



Por ejemplo si se lanza un satélite artificial desde la Tierra y después de alcanzar su altura máxima h, debido al lanzamiento, recibe un impulso final que le comunica una velocidad horizontal v_0, tenemos un satélite con energía total

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{Mm}{R+h}. \tag{8.26}$$

Entonces la órbita será una hipérbola, una parábola, o una elipse según que $E > 0$, $E = 0$ ó $E < 0$. En todos los casos el centro de la Tierra está en el foco de la trayectoria. Si la energía total E es pequeña, la trayectoria intersectará la Tierra, y el satélite retornará. Si $E < 0$, pero suficientemente grande el satélite se moverá en órbita alrededor de la Tierra.

Se llama **velocidad de escape** a la velocidad mínima con la cual debe lanzarse un cuerpo desde la superficie de un astro para que alcance $r = \infty$. Dicho valor corresponde a una energía total cero. Entonces para un cuerpo que lanzamos desde la superficie terrestre

$$\frac{1}{2}mv_e^2 - G\frac{M_\oplus m}{R_\oplus} = 0 \qquad \text{o sea} \qquad v_e = \sqrt{\frac{2GM_\oplus}{R_\oplus}} = 11{,}2\text{km/s}. \tag{8.27}$$

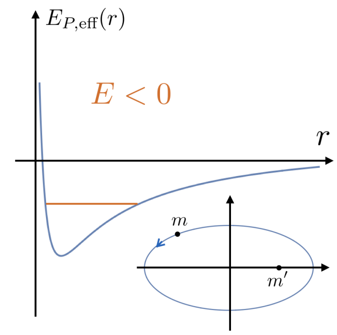
Como otro ejemplo importante, utilizamos el valor de la energía gravitatoria para descartar el papel de la gravitación en las fuerzas entre átomos y moléculas. Consideramos por ejemplo una molécula de hidrógeno formado por dos átomos de hidrógeno con masa $m = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg, y separados por una distancia $r = 0{,}745 \times 10^{-10}$ m. La energía de interacción gravitatoria entre ambos átomos es

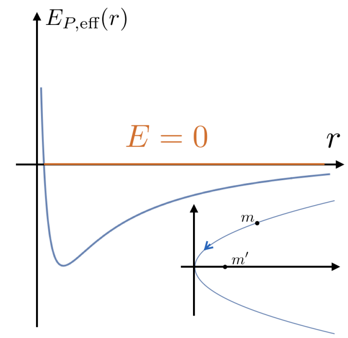
$$E_P = -G\frac{mm}{r} = 2{,}5 \times 10^{-54}\ \text{J} = 1{,}56 \times 10^{-35}\ \text{eV}. \tag{8.28}$$

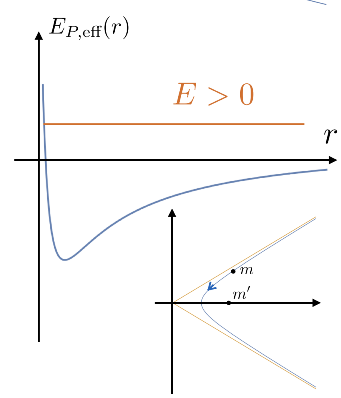
Sin embargo el valor experimental de la energía de disociación de la molécula de hidrógeno es 4,48 eV o sea 10^{35} veces mayor que la energía gravitatoria. Así que la gravitación no juega ningún papel en la formación de la molécula.

8.6. Movimiento bajo la interacción gravitatoria

Estudiamos ahora el movimiento bajo la interacción gravitatoria de manera mas completa. Nos ponemos en el caso de una partícula ligera m que se mueve bajo la fuerza gravitatoria de una partícula pasada de masa M grande, de forma que $\mu = mM/(m+M) \simeq m$. Vimos en el capitulo 4 que el movimiento bajo una fuerza central ocurre en un plano debido a la conservación del momento angular. El cuadrado de la velocidad se descompone en una componente radial y una componente tangencial. En coordenadas polares en el plano del movimiento tenemos







$$v^2 = v_R^2 + v_T^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2. \tag{8.29}$$

Utilizando la conservación del momento angular L, tenemos las ecuaciones de movimiento

$$L = \mu r^2 \dot{\varphi} \qquad \rightarrow \qquad \dot{\varphi} = \frac{L}{\mu r^2}, \tag{8.30}$$

para el ángulo. Por otro parte de la conservación de la energía

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + E_P(r) \qquad E_P(r) = -G\frac{Mm}{r}. \tag{8.31}$$

Obtenemos

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - E_{P,\text{eff}})} \quad \text{donde} \quad E_{P,\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} - G\frac{Mm}{r}. \tag{8.32}$$

$E_{P,\text{eff}}(r)$ es la energía potencial efectiva. Dividiendo (8.32) por (8.30) obtenemos

$$\frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\mu r^2}{L}\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - E_{P,\text{eff}})} \tag{8.33}$$

o bien, elevando al cuadrado

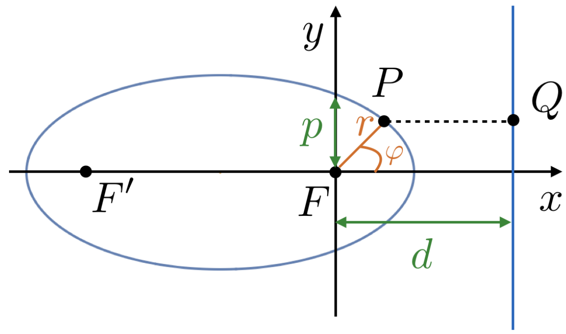
$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 = \frac{\mu^2 r^4}{L^2}\frac{2}{\mu}(E - E_{P,\text{eff}}) = \frac{\mu^2 r^4}{L^2}\left[\frac{2}{\mu}\left(E + G\frac{mM}{r}\right) - \frac{L^2}{\mu^2 r^2}\right] \tag{8.34}$$

que nos da la ecuación que satisface la **trayectoria**. Vemos ahora que las secciones cónicas son las soluciones de la ecuaciones (8.34).

8.7. Secciones cónicas

8.7.1. Ecuación de las cónicas

Una manera de definir las secciones cónicas es como la curva general por un punto que se mueve de forma que su distancia a un punto llamado foco, y a una recta llamada directriz, mantiene una relación constante. Es decir la cociente



$$\epsilon = \frac{\overline{PF}}{\overline{PQ}} = \text{constante} \tag{8.35}$$

se mantiene constante. Hay tres clases de cónicas:

$0 \leqslant \epsilon < 1$: elipse $\quad \epsilon = 1$: parábola $\quad \epsilon > 1$: hipérbola

La circunferencia (es decir un circulo) corresponde a $\epsilon = 0$. En este caso, la directriz está situada al infinito, es decir $d = \infty$. La figura representa una elipse, y pues $0 < \epsilon < 1$ pero las cantidades p y d valen también por la parábola y la hipérbola.

Ahora de $\overline{PF} = r$ y $\overline{PQ} = d - r\cos\varphi$, donde d es la distancia del foca a la directriz, de (8.35) tenemos

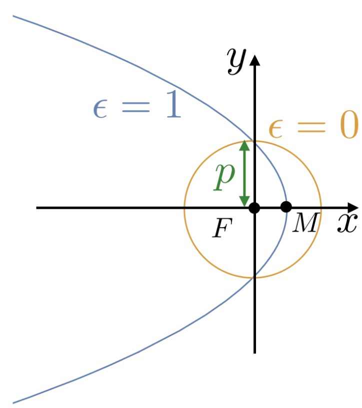
$$\epsilon = \frac{r}{d - r\cos\varphi} \qquad \text{o bien} \qquad d\epsilon - r\epsilon\cos\varphi = r \qquad \to \qquad r(1 + \epsilon\cos\varphi) = d\epsilon. \tag{8.36}$$

Definiendo el semi-latus rectum p como la mitad de la cuerda que pasa por el foco paralele a la directriz, tenemos $p/d = \epsilon$ o bien $p = \epsilon d$ que substituyendo en (8.36) nos da

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon\cos\varphi}, \tag{8.37}$$

que es la ecuación de la cónica en coordenadas polares con origen en el foco.

Si consideremos F como el origen de las coordenadas, obtenemos



$$x = r\cos\varphi \qquad\qquad y = r\sin\varphi. \tag{8.38}$$

Substituyendo con (8.37), tenemos

$$x = \frac{p\cos\varphi}{1 + \epsilon\cos\varphi} \qquad \text{o bien} \qquad \cos\varphi = \frac{x}{p - \epsilon x} \tag{8.39}$$

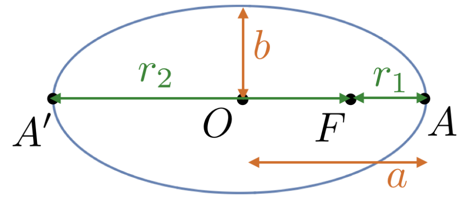
Considerando que $y^2 = r^2(1 - \cos^2\varphi) = p^2(1 - \cos^2\varphi)/(1 + \epsilon\cos\varphi)^2$, simplificamos para obtener

$$y^2 + 2p\epsilon x + (1 - \epsilon^2)x^2 = p^2 \tag{8.40}$$

Para $\epsilon = 0$, obtenemos la ecuación del circulo $y^2 + x^2 = p^2$ con centro $(0, 0)$ y de radio p. Para $\epsilon = 1$, obtenemos la ecuación de la parábola $y^2 = p(1 - 2px)$ con el punto M de coordenadas $(1/2p, 0)$.

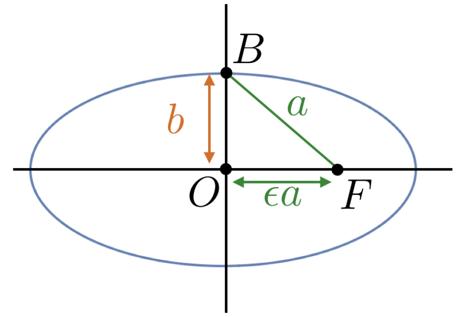
8.7.2. Elipse

Consideremos ahora el caso de la elipse. Llamando r_1 y r_2 a las distancias del foco F a los puntes A y A', que corresponden a los ángulos polares $\varphi = 0$, y $\varphi = \pi$. Entonces de la ecuación de la elipse (8.37) tenemos



$$r_1 = \frac{p}{1+\epsilon} \qquad \text{y} \qquad r_2 = \frac{p}{1-\epsilon} \tag{8.41}$$

y como $a = (r_1 + r_2)/2$, el semieje mayor es



$$a = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{1+\epsilon} + \frac{p}{1-\epsilon}\right) = \frac{p}{1-\epsilon^2} \quad \text{o sea} \quad p = a(1-\epsilon^2).$$

La distancia del foco al origen es $\overline{OF} = a - r_1 = a - a(1-\epsilon) = \epsilon a$ y también tenemos que $\overline{FB} = \epsilon(d + \epsilon a) = a$, pues el semieje menor es $b = a\sqrt{1-\epsilon^2}$. También se puede notar que el semieje menor se obtiene cuando la distancia sobre el eje y, $r \sin\varphi = p \sin\varphi/(1 + \epsilon\cos\varphi)$, es máxima. Derivando esta expresión obtenemos que $\cos\varphi = -\epsilon$ al punto B, de acuerdo con el calculo geométrica.

Para obtener, la ecuación de la elipse en coordenadas cartesianas, dividimos (8.40) por $b^2 = a^2(1-\epsilon^2)$, y obtenemos

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{p}{a(1-\epsilon^2)}\frac{2\epsilon x}{a} + \frac{x^2}{a} = \frac{p^2}{a^2(1-\epsilon^2)} \qquad \to \qquad \frac{y^2}{b^2} + \frac{2\epsilon x}{a} + \frac{x^2}{a^2} = 1 - \epsilon^2 \tag{8.42}$$

Luego

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{2\epsilon a x}{a^2} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{\epsilon^2}{a^2} = 1 \qquad \to \qquad \frac{y^2}{b^2} + \frac{(x + a\epsilon)^2}{a^2} = 1, \tag{8.43}$$

que es la ecuación de un elipse con centro de coordenadas $O(-a\epsilon, 0)$, porque hemos puesto el origen de las coordenadas cartesianas en $F(0,0)$.

8.7.3. Solución de la ecuación de la trayectoria

Vemos ahora que la cónica dada por la ecuación (8.37) satisface la ecuación de la trayectoria (8.34), para el movimiento de dos partículas que interaccionan gravitatoriamente. La ecuación de la trayectoria es

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 = \frac{\mu^2 r^4}{L^2}\left[\frac{2}{\mu}\left(E + G\frac{mM}{r}\right) - \frac{L^2}{\mu^2 r^2}\right]. \tag{8.44}$$

De la ecuación de la cónica (8.37), y elevando al cuadrado

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = -\frac{p(-\epsilon\sin\varphi)}{(1+\epsilon\cos\varphi)^2} = \frac{p\epsilon\sin\varphi}{(1+\epsilon\cos\varphi)^2} = \frac{r^2\epsilon}{p}\sin\varphi, \quad \to \quad \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 = \frac{r^4\epsilon^2}{p^2}\sin^2\varphi \tag{8.45}$$

que substituido en la ecuación de la trayectoria (8.34) nos da

$$\frac{r^4\epsilon^2\sin^2\varphi}{p^2} = \frac{\mu^2 r^4}{L^2}\left[\frac{2}{\mu}(E - E_P) - \frac{L^2}{\mu^2 r^2}\right] \quad \text{o bien} \quad \sin^2\varphi = \frac{\mu^2 p^2}{\epsilon^2 L^2}\left[\frac{2}{\mu}(E - E_P) - \frac{L^2}{\mu^2 r^2}\right] \tag{8.46}$$

Ahora podemos eliminar el ángulo φ utilizando la ecuación de la cónica (8.37)

$$r = \frac{p}{1+\epsilon\cos\varphi} \qquad \to \qquad 1+\epsilon\cos\varphi = \frac{p}{r} \qquad \to \qquad \cos\varphi = \frac{p}{\epsilon r} - \frac{1}{\epsilon}. \tag{8.47}$$

Entonces

$$\sin^2\varphi = 1-\cos^2\varphi = 1 - \frac{p^2}{\epsilon^2 r^2} + \frac{2p}{\epsilon^2 r} - \frac{1}{\epsilon^2} \tag{8.48}$$

que substituyendo en (8.46)

$$1 - \frac{p^2}{\epsilon^2 r^2} + \frac{2p}{\epsilon^2 r} - \frac{1}{\epsilon^2} = \frac{\mu^2 p^2}{\epsilon^2 L^2}\left[\frac{2}{\mu}(E-E_P) - \frac{L^2}{\mu^2 r^2}\right]. \tag{8.49}$$

Simplificamos los términos en $1/r^2$ para obtener

$$1 - \frac{1}{\epsilon^2} + \frac{2p}{\epsilon^2 r} = \frac{2\mu p^2}{\epsilon^2 L^2}(E-E_P). \tag{8.50}$$

Entonces para que se cumple está ecuación $E_P \propto 1/r$ con la cual igualando las términos constantes y los términos en $1/r$ obtenemos

$$1 - \frac{1}{\epsilon^2} = \frac{2\mu p^2}{\epsilon^2 L^2}E \qquad \to \qquad E = \frac{(\epsilon^2-1)L^2}{2\mu p^2} \tag{8.51a}$$

$$\frac{2p}{\epsilon^2 r} = -\frac{2\mu p^2}{\epsilon^2 L^2}E_P(r) \qquad \to \qquad E_P(r) = -\frac{L^2}{p\mu}\frac{1}{r} = -G\frac{mM}{r} \tag{8.51b}$$

Vemos pues que la cónica satisface la ecuación de la trayectoria para el movimiento relativo bajo una interacción mutua cuya energía potencial cae como $1/r$. En particular de (8.51) podemos relacionar las parámetros dinámicas E y L^2 con los parámetros geométricos de la órbita. Asi de (8.51b)

$$\frac{L^2}{p\mu} = GMm \qquad \to \qquad L^2 = GMm\mu p = \frac{GM^2m^2}{(M+m)}p, \tag{8.52}$$

que nos da el momento angular en función del semi-latus rectum. Además substituyendo (8.52) en (8.51) obtenemos

$$E = \frac{\epsilon^2-1}{2\mu p^2}L^2 = \frac{\epsilon^2-1}{2\mu p^2}GMm\mu p = \frac{GMm}{2p}(\epsilon^2-1). \tag{8.53}$$

Hemos visto que para hipérbolas $\epsilon > 1$ tenemos energía positiva y para elipses ($\epsilon < 1$) tenemos energía negativa. Para elipses, y teniendo en cuenta que $a = p(1-\epsilon^2)$, obtenemos

$$E = -G\frac{Mm}{2a} \qquad \text{y} \qquad L^2 = \frac{GM^2m^2}{(M+m)}a(1-\epsilon^2) \tag{8.54}$$

que nos da la energía de la elipse. Así es posible tener órbitas con las mismas energía, pero con diferentes excentricidades, dependiendo del momento angular. En efecto de de (8.54) podemos expresar el momento angular en función de la energía y la excentricidad de la órbita

$$L = GTMm\mu a(1-\epsilon^2) = GMm\mu(-\frac{GMm}{2E})(1-\epsilon^2) = -GM^2m^2\frac{\mu}{2E}(1-\epsilon^2), \tag{8.55}$$

de donde

$$\epsilon^2 = 1 + \frac{2E}{\mu}\frac{L^2}{G^2M^2m^2}, \tag{8.56}$$

que nos da la excentricidad de la órbita en función de la energía y en momento angular. Notamos que como $E < 0$ por una elipse, se obtiene el circulo, es decir $\epsilon = 1$, por $L = 0$ o por un masa $M \to \infty$.

Podemos decir que el tamaño de la órbita está determinado por la energía y la forma por el momento angular. Esto es también de valido en física atómica, donde la energía de interacción coulombiana marcha también con $1/r$, y es válido por tanto este mismo resultado.

Como un ejercicio podemos comprobar que las órbitas elípticas satisfacen las leyes de Kepler. Hemos ya visto que la órbita de las planetas son elipses (primera ley de Kepler). La área total de la elipse $A = \pi ab = \pi a^2\sqrt{1-\epsilon^2}$ es recorrida en tiempo igual al periodo de revolución T. Además durante un tiempo corto $\mathrm{d}t$, la área recorrida por el vector radio es un triangulo de base r y de altura $r\mathrm{d}\varphi$, es decir $\mathrm{d}A = (1/2)r^2\mathrm{d}\varphi$. Pues la velocidad de la área es

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}r^2\frac{L}{\mu r^2} = \frac{L}{2\mu} \qquad \to \qquad A = \int_0^T \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{LT}{2\mu}. \tag{8.57}$$

Notamos que la secunda ley de Kepler nos dice que el radio vector que une un planeta y el Sol recorre áreas iguales en tiempos iguales. Es decir que la velocidad de la área es constante, o $\mathrm{d}A = (L/2\mu)\mathrm{d}t$. Elevando al cuadrado y utilizando $L^2 = GMm\mu a(1-\epsilon^2)$, obtenemos

$$\frac{L^2T^2}{4\mu^2} = \pi^2a^4(1-\epsilon^2) \qquad \to \qquad \pi^2a^4(1-\epsilon^2) = GMm\mu a(1-\epsilon^2)\frac{T^2}{4\mu^2} \tag{8.58}$$

de donde

$$\pi a^3 = \frac{GMm}{4\mu}T^2 = \frac{G}{4}(M+m)T^2 \qquad \text{o sea} \qquad T^2 = \frac{4\pi^2}{G(m+M)}a^3, \tag{8.59}$$

que es la tercera ley de Kepler.

8.7.4. El satélite

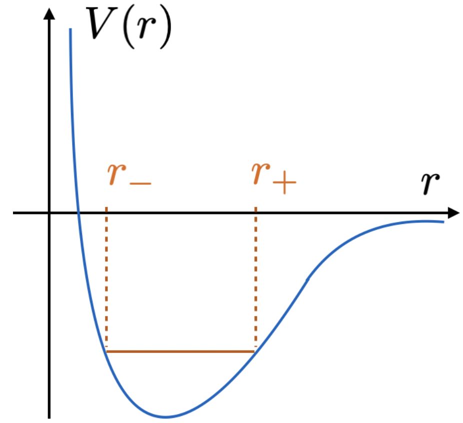
Volviendo el ejemplo del satélite. El satélite alcanza un altura h, y se le comunica una velocidad horizontal v_0. Entonces su energía es

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{mM}{R+h}, \tag{8.60}$$

y el momento angular es $L = m(R+h)v_0$. Para el caso de energía negativa, utilizando las valores de L y E, que obtenemos de las valores de h y v_0, podemos calcular el semieje mayor de la elipse, y su excentricidad, utilizando (8.54). Una vez calculados a y ϵ podemos calcular r_1 y r_2 y determinar si el satélite cae a la superficie terrestre ($r < R_T$) o si mantiene en una órbita elipse ($r > R_T$).

También es cierto que, de $r_1 = r_-$ y $r_2 = r_+$, podemos determinar estas valores hallando los dos ceros de la ecuación que nos dice $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\varphi = 0$. Es decir de (8.34)

$$E + G\frac{mM}{r^2} - \frac{L^2}{2\mu r^2} = 0. \tag{8.61}$$



Es decir hallando los puntos de retorno para una energía E en el potencial efectivo

$$V_{\text{eff}} = \frac{L^2}{2\mu r^2} - G\frac{mM}{r}. \tag{8.62}$$

Utilizando que $GmM = -2aE$ y que $L^2/\mu = -2aEp = -2a^2E(1-\epsilon^2)$, (8.61) se convierte en

$$E - \frac{2aE}{r} + \frac{a^2E(1-\epsilon^2)}{r^2} = 0 \qquad \text{o sea} \qquad r^2 - 2ar + a^2(1-\epsilon) = 0, \tag{8.63}$$

donde las soluciones son $r_\pm = a(1 \pm \epsilon)$, que son los valores de r_1 y r_2 de la elipse.

Todos lo visto hasta el momento, es válido para un sistema de dos cuerpos que interaccionan gravitacionalmente. Pero si hay mas cuerpos o otra fuente de perturbación como ocurre en el sistema solar, se producen dos efectos: 1) el avance del perihelio r_- de forma que la órbita no se cierra y 2) la variación periódica de la excentricidad de la órbita.

Aunque pequeños estos efectos producen resultados notables, como por ejemplo cambios en las condiciones climáticas en la Tierra (periodo = 10^5 años). El avance de perihelio de Mercurio es muy importante porque su valor sirvió para establecer la validad de la Relatividad General.

8.8. Cuerpo y potencial gravitatoria

Introducimos ahora los conceptos de campo y potencial gravitatorio. Si tenemos una masa puntual grande M, la fuerza que ejerce sobre otro masa de prueba pequeña m está dado por la ley de Newton

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\vec{e}_r, \tag{8.64}$$

y la energía potencial de la masa m que está sometida a la fuerza gravitatoria ejercida por M es

$$E_P(r) = -G\frac{Mm}{r}. \tag{8.65}$$

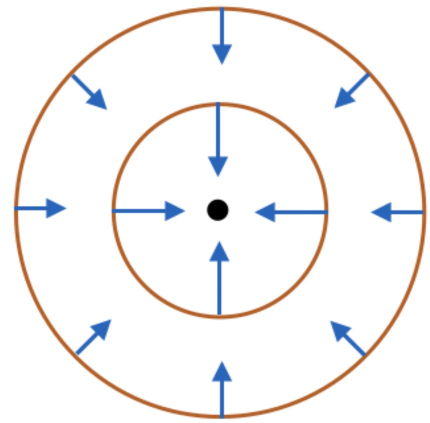
Es muy útil introducir el concepto de campo y potencial gravitatorio como la fuerza gravitatoria por unidad de masa que se ejerce sobre una partícula situada en un punto, y como de energía potencial gravitatoria por unidad de masa respectivamente. Así el campo gravitatorio producido por masa M en el punto $\vec{r}$ es

$$\vec{g}(r) = -G\frac{M}{r^2}\vec{e}_r, \tag{8.66}$$

y una partícula con vector de posición $\vec{r}$ y masa m experimente una fuerza gravitatoria dado por (8.66), es decir $\vec{F}(r) = m\vec{g}(r)$. Notemos que $\bar{g}(r)$ tiene dimensiones LT^{-2} es decir de aceleración.

Así mismo el potencial gravitatorio producido por la masa M en el punto $\vec{r}$ es

$$V(r) = -G\frac{M}{r} \tag{8.67}$$



de forma que una masa puntual de prueba situando en M, tiene una energía potencial dada por (8.67), es decir $E_P(r) = mV(r)$. $V(r)$ tiene dimensiones de velocidad al cuadrado, $[V] = ML^2T^{-2}/M = L^2T^{-2}$.

El campo gravitatorio es un campo vectorial y el potencial es un escalar. Las superficies formando por las puntos que tienen el mismo potencial, se llaman superficies equipotenciales, y las lineas tangentes al vector campo en cadad punto se llaman lineas de campo o **lineas de fuerza**. Las linea de fuerza son ortogonales a las superficies equipotenciales del campo gravitatorio que produce son son esferas y las lineas de fuerza rectas que confluyen en la masa M.

El campo gravitatorio, o mejor el potencial sirven para definir la forma que tiene un astro. Se dice que la forma de la Tierra en un geoide. Y se define el geoide como una superficie equipotencial del campo gravitatorio terrestre.

Notemos también que, de $\vec{F} = -\vec{\nabla}E_P(r)$ se sigue que $\vec{g} = -\vec{\nabla}V(r)$ que se puede comprobar directamente de (8.66) y (8.67).

Si tenemos varias masa puntuales $M_1, M_2, \ldots, M_N$ situadas en los puntos $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N$ al campo gravitatorio producido por todas ellas es

$$\vec{g}(r) = \vec{g}_1(r) + \vec{g}_2(r) + \ldots + \vec{g}_N(r) \tag{8.68a}$$

$$= -GM\left[\frac{\vec{e}_{r_1}}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^2} + \frac{\vec{e}_{r_2}}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^2} + \ldots + \frac{\vec{e}_{r_N}}{|\vec{r}-\vec{r}_N|^2}\right] \tag{8.68b}$$

y el potencial gravitatorio

$$V(r) = V_1(r) + V_2(r) + \ldots + V_N(r) \tag{8.69a}$$

$$= -GM\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} + \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_2|} + \ldots + \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_N|}\right] \tag{8.69b}$$

y naturalmente se cumple $\vec{g} = -\vec{\nabla}V(r)$ porque se cumple para cada una de los sumandos. La fuerza y la energía potencial para una masa de prueba m situada en el punto $\vec{r}$ está dada por (8.64) y (8.65). Veremos a continuación adjuntos ejemplos de campo y potencial gravitatorio.

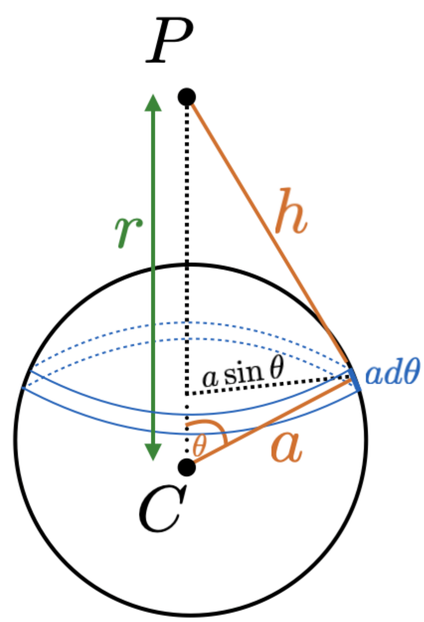
8.9. Campo gravitatorio debido a un cuerpo esférico

Estudiamos ahora el campo gravitatorio producido por un cuerpo esférico cuya densidad depende solo de su distancia al centro, es decir cuya densidad posee simétrica esférica, o dicho de otro modo es invariante bajo rotaciones.

Vemos que en el exterior cuerpo el resultado es el mismo que si tuviéremos todo la masa concentrada en el centro de la esfera formando una masa puntual. Este resultado es extremadamente importante porque todos las astros son aproximamente esféricos, y de hecho Newton demoró por 20 años la publicación de su ley de gravitación universal hasta que pudo demonstrar este resultado de forma correcta.

Comenzamos calculando el potencial gravitatorio producido por una capa esférica, es decir por una superficie esférica con masa distribuida uniformemente cuyo interior está vacío. Consideremos primero un punto P que está al exterior de la capa. Llamando a al radio de la capa y r a la distancia desde el punto P al centro C de la capa. Para calcular el potencial gravitatorio producido por la capa dividimos la capa en un anillo. Llamando θ el ángulo que forma la linea CP que une el centro de la esfera con la linea desde el centro de la esfera a los puntos del anillo, tenemos que el área del anillo está dado por

$$\mathrm{d}A = (a\mathrm{d}\theta)(2\pi a \sin\theta) = 2\pi a^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta, \tag{8.70}$$



y la masa del anillo es

$$\mathrm{d}m = \sigma \mathrm{d}A = 2\pi\sigma a^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta, \tag{8.71}$$

siendo σ la densidad superficial de la masa que consideremos homogénea, y por tanto

$$\sigma = \frac{m_c}{4\pi a^2} \tag{8.72}$$

siendo m_c la masa de la capa (la superficie total de la capa es $4\pi a^2$).

Entonces el potencial gravitatorio que produce el anillo en P es

$$\mathrm{d}V = -G\frac{\mathrm{d}m}{h} = -G\frac{2\pi}{h}\frac{m_c}{4\pi a^2}a^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta = -\frac{Gm_c}{2h}\sin\theta \mathrm{d}\theta. \tag{8.73}$$

Ahora para una esfera de radio a, r y a son constante y h se relaciona con θ. El punto P se encuentra a la misma distancia h de todos los puntos del anillo, dado por la relación

$$h^2 = (r - a\cos\theta)^2 + (a\sin\theta)^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta. \tag{8.74}$$

Diferenciando en esta relación obtenemos

$$2h\mathrm{d}h = 2ra\sin\theta \mathrm{d}\theta \qquad \rightarrow \qquad \sin\theta \mathrm{d}\theta = \frac{h}{ra}\mathrm{d}h \tag{8.75}$$

que substituyendo en (8.73) nos da

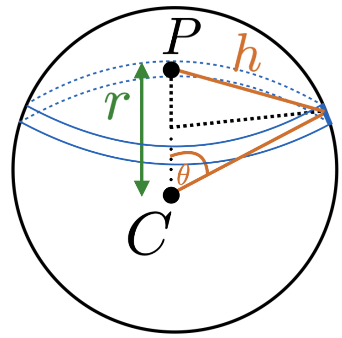
$$\mathrm{d}V = -\frac{Gm_c}{2h}\frac{h}{ra}\mathrm{d}h = -\frac{Gm_c}{r}\frac{\mathrm{d}h}{2a}. \tag{8.76}$$

Entonces para obtener el potencial gravitatorio producido por la capa en un punto P exterior a la capa ($r > a$), la contribución de todos los anillos integrando desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \pi$, o bien equivalentemente integrando en h entre $h = r - a$ hasta $h = r + a$. Entonces

$$V_{\text{ext}}(r) = \int_{r-a}^{r+a} \mathrm{d}V = -\frac{Gm_c}{r} \int_{r-a}^{r+a} \frac{\mathrm{d}h}{2a} = -G\frac{m_c}{r} \tag{8.77}$$

que depende solamente de la distancia r del punto P al centro de la capa, y es idéntico al potencial que produciría una masa puntual m_c situada en el centro de la capa.

Ahora si el punto P se encuentra en el interior de la esfera limitada por la capa, les limites de la integración en la variable h son



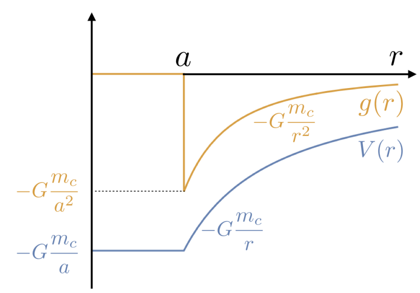
$$\theta = 0 \to h = a - r \tag{8.78a}$$
$$\theta = \pi \to h = a + r \tag{8.78b}$$

con la cual el potencial gravitatorio producido por la capa en un punto P interior ($r < a$) es

$$V_{\text{int}}(r) = -\frac{Gm_c}{2ra} \int_{a-r}^{a+r} \mathrm{d}h = -G\frac{m_c}{a}, \tag{8.79}$$

que es independiente de la posición del punto en el interior de la capa y que depende solo del radio a de la capa.

Tomando gradiente podemos calcular el campo gravitatorio en el exterior y en el interior de la capa



$$\vec{g}(r) = -G\frac{m_c}{r^2}\ \vec{e}_r \qquad r > a \tag{8.80a}$$
$$\vec{g}(r) = \vec{0} \qquad r < a \tag{8.80b}$$

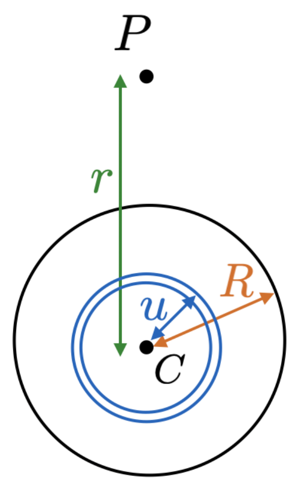
Podemos concluir por tanto que el campo y el potencial gravitatorio para puntes externos a una capa esférica con densidad uniforme de radio a, es idéntica al campo gravitatorio producido por una masa puntual igual a la masa total de la capa y situada en el centro de la misma, mientras que para un punto interno a la capa el potencial gravitatorio es constante y el campo es nulo. Es decir por una capa esférica vacía no fuerza gravitatoria actúa sobre una partícula al interno de la dicha capa. Este resultado se llama el **teorema de la capa**.

Si representamos el valor del campo y el potencial gravitatorio en función de la distancia r del punto P al centro de la capa, vemos que el potencial es continuo y constante en el interior de la capa mientras que el campo sufra un cambio súbito al pasar del exterior al interior que se corresponde con el cambio de pendiente en el potencial sobre de la esfera ($r = a$).

Supongamos ahora un cuerpo esférico con masa M, radio R y densidad uniforme

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3M}{4\pi R^3}. \tag{8.81}$$

Vamos a calcular el potencial gravitatorio producido por este cuerpo a una distancia r de un centro. Consideramos primero el caso de un punto exterior al cuerpo es decir con $r > R$. En tal caso el potencial producido por una corona esférica de radio u será



$$\mathrm{d}V_{\mathrm{ext}} = -G\frac{\mathrm{d}M}{r} \tag{8.82}$$

siendo dM la masa de la corona

$$\mathrm{d}M = 4\pi\rho u^2\mathrm{d}u = 4\pi u^2\frac{3M}{4\pi R^3}\mathrm{d}u = \frac{3M}{R^3}u^2\mathrm{d}u \tag{8.83}$$

y sumando la contribución de todas las coronas obtenemos

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{ext}}(r) &= \int_0^R \mathrm{d}V_{\mathrm{ext}} \\ &= -\frac{G}{r}\int_0^R \mathrm{d}M = -\frac{G}{r}\int_0^R \frac{3M}{R^3}u^2\mathrm{d}u = -G\frac{M}{r} \end{aligned} \tag{8.84}$$

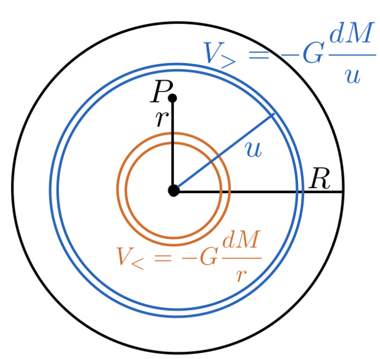
que es el mismo potencial que produciría una masa puntual colocada en el centro del cuerpo. Entonces para en campo gravitatorio que produce un cuerpo esférico obtenemos el mismo resultado que para una masa puntual colocado en su centro.

$$\vec{g}_{\mathrm{ext}} = -G\frac{M}{r^2}\ \vec{e}_r. \tag{8.85}$$

Este resultado es válido aunque la masa del cuerpo no sea uniforme con tal de que sea esféricamente simétrica (solo función de r).

Consideremos ahora un punto P que se encuentra en el interior del cuerpo, es decir $r < R$. Ahora para calcular el potencial gravitatoria gravitatoria producido por el cuerpo en el punto P, tenemos que considerar separadamente la contribución de las coronas esféricas con radio $u < r$, que llamaremos $V_<$ y la contribución de las corones esféricas con radio $u > r$, que llamaremos $V_>$.

Para las corones con $u < r$, tenemos



$$\mathrm{d}V_< = -G\frac{\mathrm{d}M}{r} = -3\frac{GM}{R^3 r}u^2\mathrm{d}u, \tag{8.86}$$

de donde

$$V_<(r) = \int_0^r \mathrm{d}V_< = -3\frac{GM}{R^3 r}\int_0^r u^2\mathrm{d}u = -3\frac{GM}{R^3 r}\frac{r^3}{3} = -\frac{GM}{R}\frac{r^2}{R^2} \tag{8.87}$$

Ahora para las coronas con $u > r$, tenemos

$$\mathrm{d}V_> = -G\frac{\mathrm{d}M}{u} = -3G\frac{M}{R^3}u\mathrm{d}u \tag{8.88}$$

y entonces

$$V_>(r) = \int_r^R \mathrm{d}V_> = -3G\frac{M}{R^3}\int_r^R u\mathrm{d}u = -3G\frac{M}{R^3}\left(\frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{2}r^2\right) = -\frac{3}{2}\frac{GM}{R} + \frac{3}{2}\frac{GM}{R}\frac{r^2}{R^2}. \quad (8.89)$$

Finalmente sumando $V_<$ y $V_>$ obtenemos el potencial gravitatorio producido en un punto exterior del cuerpo.

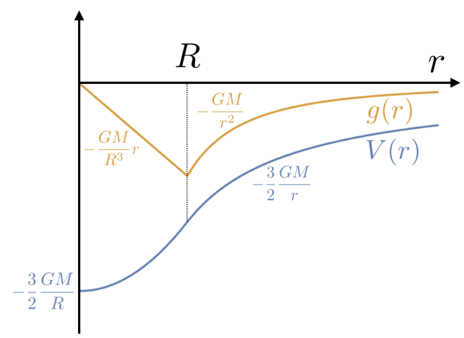
$$\begin{aligned} V_{\text{int}}(r) = V_> + V_< &= -\frac{3}{2}\frac{GM}{R} + \frac{3}{2}\frac{GM}{R}\frac{r^2}{R^2} - \frac{GM}{R}\frac{r^2}{R^2} = -\frac{GM}{R}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\frac{r^2}{R^2}\right) \\ &= -\frac{GM}{R}\left[1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\right] \end{aligned} \quad (8.90)$$

Observemos que sobre la superficie del cuerpo $r = R$ el potencial gravitatorio es continuo

$$V_{\text{int}}(R) = -G\frac{M}{R} = V_{\text{ext}}(R). \quad (8.91)$$

El campo gravitatorio en el interior de un cuerpo esférico homogéneo lo obtenemos tomando gradiente en (8.89).

$$\begin{aligned} \vec{g}_{\text{int}}(r) &= -\vec{\nabla}V_{\text{int}}(r) = -\frac{GM}{2R^3}\vec{\nabla}r^2 \\ &= -\frac{GM}{R^3}\vec{r} = -\frac{GM}{R^2}\left(\frac{r}{R}\right)\ \vec{e}_r. \end{aligned} \quad (8.92)$$



Se puede reproducir directamente este resultado con el teorema de la capa notando que solo la masa de la esfera de radio r produce una fuerza gravitatoria a la distancia $r < R$. Como la densidad es constante, obtenemos que $M_{r<R} = M(r/R)^3$ y pues

$$\vec{g}_{\text{int}}(r) = -\frac{GM_{r<R}}{r^2}\vec{e}_r = -\frac{GM}{R^2}\left(\frac{r}{R}\right)\ \vec{e}_r \quad (8.93)$$

Notemos que sobre la superficie del cuerpo

$$\vec{g}_{\text{int}}(R) = -G\frac{M}{R^2}\ \vec{e}_r = \vec{g}_{\text{ext}}(R). \quad (8.94)$$

Si representamos el cuerpo y el potencial en función, vemos que el campo crece (en valor absoluto) línealmente en el interno del cuerpo y disminuye como $1/r^2$ en el exterior del mismo. El potencial crece cuadráticamente hasta la superficie del cuerpo y luego crece como $-1/r$.

Último y como ejemplo calculamos como varía la gravedad al moverse una pequeña distancia hacia arriba abajo de la superficie terrestre.

Si estamos a una altura h sobre la superficie terrestre

$$g = \frac{GM_\oplus}{(R_\oplus + h)^2} = \frac{GM_\oplus}{R_\oplus^2}\frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R_\oplus}\right)^2} \simeq g\left(1 - \frac{2h}{R_\oplus}\right) = 9{,}81 - 3{,}06 \times 10^{-6}h\ \text{m/s}^{-2}. \quad (8.95)$$

Por el contrario si nos desplazamos una distancia h hacia el centro de la Tierra

$$g = GM_\oplus\frac{R_\oplus - h}{R_T^3} = G\frac{M_\oplus}{R_\oplus^2}\left(1 - \frac{h}{R_\oplus}\right) = g\left(1 - \frac{h}{R_\oplus}\right) = 9{,}81 - 1{,}53 \times 10^{-6}h\ \text{m/s}^{-2}. \quad (8.96)$$

Vemos pues que la gravedad varía mas rápido (el doble) hacia arriba de la superficie terrestre que hacia abajo.

8.10. Ejercicios

Datos: Constante gravitatoria $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.
Masa y radio de la Luna $M_L = 7{,}35 \times 10^{22}$ kg y $R_L = 1{,}74 \times 10^6$ m.
Masa y radio de la Tierra $M_\oplus = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg y $R_\oplus = 6{,}37 \times 10^6$ m.
Masa del Sol: $M_\odot = 1{,}99 \times 10^{30}$ kg.

Problema 1

La masa de la Luna es aproximadamente $7{,}35 \times 10^{22}$ kg, y su radio $1{,}74 \times 10^6$m.

a) ¿ Qué distancia recorrerá un cuerpo durante 1 s en caída libre, abandonado en un punto próximo a la superficie de la Luna?
b) ¿Cuál será el periodo de oscilación en la superficie lunar de un péndulo que en la superficie terrestre tiene un periodo de oscilación de 2 s?

Problema 2

Suponga que la Tierra tiene densidad uniforme y que se hace un túnel que la atraviesa siguiendo un diámetro. Se pide:

a) Calcule la fuerza sobre una masa m situada a una distancia r del centro.
b) Demuestre que el movimiento a lo largo del túnel será armónico simple y calcule el periodo.
c) Escriba las ecuaciones de la posición, velocidad y aceleración en función del tiempo.

Problema 3

Se ha descubierto un nuevo cometa, observándose que su trayectoria en el punto más cercano al Sol dista de éste $7,5 \times 10^{11}$ m, siendo su velocidad en este punto de 18.800 m/s. ¿Qué tipo de órbita describirá este objeto? ¿ Volverá a pasar cerca del sol?

Problema 4

Un planeta esférico de radio R_2 tiene un núcleo de densidad constante ρ_0, hasta un radio R_1 y una corteza de densidad variable $\rho(r) = 5r^2\rho_0/(3R_1^2)$ para $R_1 \leq r \leq R_2$. Calcule:

a) La masa total del planeta y el peso que tendría una persona de masa m en su superficie.
b) Se sitúa un satélite en órbita geoestacionaria alrededor del planeta (órbita geoestacionaria significa con periodo de rotación igual al del planeta). Calcular el radio de dicha órbita sabiendo que los días del planeta duran T segundos.
c) Se practica un túnel que atraviesa el planeta según su eje de rotación, depositando en reposo una masa m a una distancia D del centro ($D < R_1$). Deducir el tipo de movimiento de esta masa, su velocidad máxima y el tiempo que tardaría en volver al punto de partida.

Problema 5

Deseamos situar un satélite de 80 kg en una órbita circular, de radio $3R_\oplus$ ($R_\oplus$ es el radio de la Tierra). Ignorando la rotación de la Tierra, calcule:

a) La energía necesaria para lanzar el satélite y colocarlo en órbita.
b) El periodo del satélite. c)La energía suplementaria que es necesaria para situarlo en una órbita circular de radio $4R_\oplus$, a partir de la órbita de radio $3R_\oplus$.

8.11. Soluciones de los ejercicios

Datos: Constante gravitatoria $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.
Masa y radio de la Luna $M_L = 7{,}35 \times 10^{22}$ kg y $R_L = 1{,}74 \times 10^6$ m.
Masa y radio de la Tierra $M_\oplus = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg y $R_\oplus = 6{,}37 \times 10^6$ m.
Masa del Sol: $M_\odot = 1{,}99 \times 10^{30}$ kg.

Problema 1

La masa de la Luna es aproximadamente $7{,}35 \times 10^{22}$ kg, y su radio $1{,}74 \times 10^6$m.

a) ¿ Qué distancia recorrerá un cuerpo durante 1 s en caída libre, abandonado en un punto próximo a la superficie de la Luna?
La aceleración de la gravedad en la superficie de la Luna es

$$g_L = G\frac{M_L}{R_L^2} = \frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 7{,}35 \times 10^{22}}{(1{,}74)^2 \times 10^{12}} = 1{,}62 \text{ m/s}^2. \tag{8.97}$$

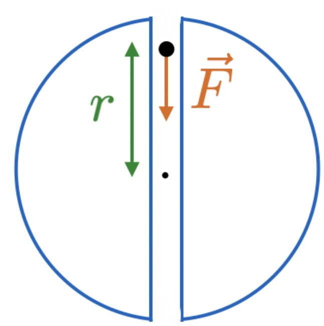
Es decir es un sexto de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra. El espacio recorrido durante $t = 1$ s encaida libre sobre la superficie de la Luna es $(1/2)g_L t^2 = 0{,}81$ m.

b) ¿Cuál será el periodo de oscilación en la superficie lunar de un péndulo que en la superficie terrestre tiene un periodo de oscilación de 2 s?
Periodo del péndulo en la superficie terrestre $T = 2\pi\sqrt{\ell/g} = 2$ s.
Periodo del péndulo en la superficie lunar $T_L = 2\pi\sqrt{\ell/g_L}$.
Luego

$$T_L = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\sqrt{\frac{g}{g_L}} = 4{,}92 \text{ s}. \tag{8.98}$$

Problema 2

Suponga que la Tierra tiene densidad uniforme y que se hace un túnel que la atraviesa siguiendo un diámetro. Se pide:



a) Calcule la fuerza sobre una masa m situada a una distancia r del centro.
El campo en el interior de una esfera con densidad uniforme ρ y radio R es $\vec{g}$ y la fuerza es $\vec{F} = m\vec{g}$. Tenemos

$$\vec{g} = -G\frac{M_\oplus}{R_\oplus^3} r\vec{e}_r \qquad \text{y} \qquad \vec{F} = -G\frac{M_\oplus m}{R_\oplus^3} r\vec{e}_r \tag{8.99}$$

Siendo r la distancia al centro de la esfera.

b) Demuestre que el movimiento a lo largo del túnel será armónico simple y calcule el periodo.
A lo largo del túnel obtenemos una fuerza proporcional y de signo contrario al desplazamiento

$$F = -kx \qquad \text{con} \qquad k = G\frac{M_\oplus m}{R_\oplus^3}. \tag{8.100}$$

Es decir una fuerza elástica y por tanto la masa m ejecutará un movimiento armónico simple con frecuencia angular

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{R_T^3}} \qquad \rightarrow \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{R_T^3}{GM_\oplus}} = 1h24m30s. \tag{8.101}$$

c) Escriba las ecuaciones de la posición, velocidad y aceleración en función del tiempo. Suponiendo que la masa m recorre todo el túnel

$$x(t) = R_\oplus \sin(\omega t + \alpha) \tag{8.102}$$
$$v(t) = R_\oplus \omega \cos(\omega t + \alpha) \tag{8.103}$$
$$a(t) = -R_\oplus \omega^2 \sin(\omega t + \alpha). \tag{8.104}$$

α depende de la velocidad inicial. Si a $t = 0$, $v(0) = 0$ y $x(0) = R_\oplus$, tenemos $\alpha = \pi/2$

Problema 3

Se ha descubierto un nuevo cometa, observándose que su trayectoria en el punto más cercano al Sol dista de éste $7,5 \times 10^{11}$ m, siendo su velocidad en este punto de 18.800 m/s. ¿Qué tipo de órbita describirá este objeto? ¿ Volverá a pasar cerca del sol?

La energía total del cometa de masa m es

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_\odot m}{r} = m\left(\frac{1}{2}v^2 - G\frac{M_\odot}{r}\right). \tag{8.105}$$

Con los datos $r = 7{,}5 \times 10^{11}$ m y $v = 18{,}800$ m/s obtenemos

$$\frac{1}{2}v^2 = 1{,}77 \times 10^8 \ \mathrm{m^2s^{-2}} \qquad G\frac{M_\odot}{r} = 1{,}77 \times 10^8 \ \mathrm{m^2s^{-2}} \tag{8.106}$$

Entonces como $E = 0$ la trayectoria es una parábola y el cometa no vuelve a pasar cerca del Sol. Sin embargo el error en los datos no nos permite de decir si $E > 0$ o si $E < 0$. Si $E > 0$ la trayectoria seria una hipérbola y el cometa no volvería a pasar cerca del Sol. Si $E < 0$ la trayectoria seria una elipse y el cometa volvería a pasar cerca del Sol.

Problema 4

Un planeta esférico de radio R_2 tiene un núcleo de densidad constante ρ_0, hasta un radio R_1 y una corteza de densidad variable $\rho(r) = 5r^2\rho_0/(3R_1^2)$ para $R_1 \leq r \leq R_2$. Calcule:

a) La masa total del planeta y el peso que tendría una persona de masa m en su superficie.

Densidad:

$$\rho(r) = \rho_0 \qquad \text{si} \qquad 0 \leqslant r \leqslant R_1 \tag{8.107a}$$
$$\rho(r) = \frac{5r^2}{3R_1^2}\rho_0 \qquad \text{si} \qquad R_1 \leqslant r \leqslant R_2 \tag{8.107b}$$

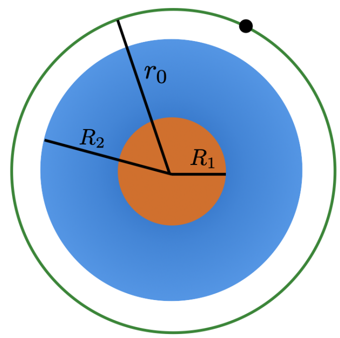
Masa total de la planeta

$$M = \int_0^{R_2} 4\pi r^2 \rho(r) \mathrm{d}r = 4\pi\rho_0 \left[\int_0^{R_1} r^2 \mathrm{d}r + \frac{5}{3}\int_{R_1}^{R_2} \frac{r^4}{R_1^2}\mathrm{d}r \right]$$
$$= 4\pi\rho_0 \left[\frac{R_1^3}{3} + \frac{5}{3}\frac{1}{5R_1^2}\left(R_2^5 - R_1^5\right) \right] = \frac{4\pi}{3}\frac{R_2^5}{R_1^2}\rho_0 \tag{8.108}$$

Peso de una persona de masa m en la superficie del planeta

$$F = G\frac{Mm}{R_2^2} = \frac{4\pi G}{3}\frac{R_2^3}{R_1^2}\rho_0 m \tag{8.109}$$

b) Se sitúa un satélite en órbita geoestacionaria alrededor del planeta (órbita geoestacionaria significa con periodo de rotación igual al del planeta). Calcular el radio de dicha órbita sabiendo que los días del planeta duran T segundos.

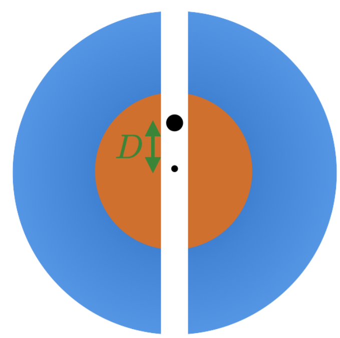


Llamamos r_0 al radio de la órbita geoestacionaria. La velocidad en dicho órbita es $v = 2\pi r_0/T$. Entonces

$$m\frac{v^2}{r_0} = G\frac{Mm}{r_0^2} \quad \to \quad \frac{4\pi^2 r_0^2}{T^2 r_0} = G\frac{M}{r_0^2} \quad \to \quad r_0^3 = \frac{GM}{4\pi^2}T^2$$
$$r_0^3 = \frac{G}{4\pi^2}\frac{4\pi}{3}\frac{R_2^5}{R_1^2}\rho_0 T^2 \quad \to \quad r_0 = \left[\frac{G}{3}\frac{R_2^5}{R_1^2}\rho_0 T^2\right] \tag{8.110}$$

c) Se practica un túnel que atraviesa el planeta según su eje de rotación, depositando en reposo una masa m a una distancia D del centro ($D < R_1$). Deducir el tipo de movimiento de esta masa, su velocidad máxima y el tiempo que tardaría en volver al punto de partida.

El valor del campo gravitatorio en el punto situado a distancia $r < R_1$ del centro es



$$\vec{g} = -G\frac{M_1}{R_1^3}r\vec{e}_r = -\frac{4\pi}{3}G\rho_0 r\vec{e}_r \tag{8.111}$$

siendo r la distancia al centro, y M_1 la masa que queda dentro de la región $0 \leqslant r \leqslant R_1$. Podemos deducir la expresión (válida para densidad constante) partiendo de que una corona esférica de radio u y expresar du produce un campo

$$\vec{g}_{\mathrm{ext}}(r) = -\frac{G}{r^2}4\pi u^2 \rho(u)\mathrm{d}u\vec{e}_r \tag{8.112}$$
$$\vec{g}_{\mathrm{int}}(r) = 0 \tag{8.113}$$

Por una partícula situada a una distancia D dentro del primero núcleo, es decir $D < R_1$, el secundo núcleo no ejerce ningún fuerza gravitatoria (teorema de la capa).

Con la cual sumando la contribución de todas coronas hasta r tenemos

$$\vec{g}(r) = -G\frac{4\pi}{r^2}\int_0^r u^2\rho(u)\mathrm{d}u\vec{e}_r$$
$$= -G\frac{4\pi}{r^2}\rho_0\frac{r^3}{3}\vec{e}_r = -G\frac{4\pi}{3}\rho_0 r\vec{e}_r = -G\frac{4\pi}{3}\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R_1^3}r\vec{e}_r = -G\frac{M_1}{R_1^3}r\vec{e}_r \tag{8.114}$$

La partícula abandonada en el túnel a distancia D del centro, ejecutará un movimiento armónico simple con constante elástica $k = (4\pi/3)G\rho_0 m$ y su periodo será $T = 2\pi\sqrt{m/k} = \sqrt{3\pi/(G\rho_0)}$. Su velocidad máxima la alcanzará al pasar por el centro del planeta

$$\frac{1}{2}mv_{\mathrm{MAX}}^2 = \frac{1}{2}kD^2 \qquad \rightarrow \qquad v_{\mathrm{MAX}} = \sqrt{\frac{k}{m}}D = \sqrt{\frac{4\pi G\rho_0}{3}}D \tag{8.115}$$

Problema 5

Deseamos situar un satélite de 80 kg en una órbita circular, de radio $3R_\oplus$ ($R_\oplus$ es el radio de la Tierra). Ignorando la rotación de la Tierra, calcule:

a) La energía necesaria para lanzar el satélite y colocarlo en órbita.

En una órbita con radio $r_0 = 3R_\oplus$

$$m\frac{v_0^2}{r_0} = G\frac{M_\oplus m}{r_0^2} \qquad \rightarrow \qquad v_0^2 = G\frac{M_\oplus}{3R_\oplus}. \tag{8.116}$$

Entonces la energía del satélite en la órbita es

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_\oplus m}{r_0} = \frac{G}{6}\frac{M_\oplus m}{R_\oplus} - \frac{G}{3}\frac{M_\oplus m}{R_\oplus} = -\frac{G}{6}\frac{M_\oplus m}{R_\oplus} = \frac{1}{2}E_P \tag{8.117}$$

La energía necesaria para colocar el satélite en esa órbita es

$$E_f - E_i = -\frac{G}{6}\frac{M_\oplus m}{R_\oplus} - \left(-G\frac{M_\oplus m}{R_\oplus}\right) = \frac{5G}{6}\frac{M_\oplus m}{R_\oplus} = 4{,}17 \times 10^9 \text{ J}. \tag{8.118}$$

b) El periodo del satélite.
De $v = \sqrt{GM_\oplus/(3R_\oplus)}$ tenemos

$$\omega = \frac{v}{3R_\oplus} \qquad \rightarrow \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{27R_\oplus^3}{GM_\oplus}} = 2{,}63 \times 10^4 \text{s} = 7\text{h } 18 \text{ min}. \tag{8.119}$$

c)La energía suplementaria que es necesaria para situarlo en una órbita circular de radio $4R_\oplus$, a partir de la órbita de radio $3R_\oplus$.

La energía en la órbita de radio $4R_\oplus$ es $E = (1/2)E_P = -(1/8)GM_\oplus m/R_\oplus$, y entonces la energía suplementaria necesaria para poner de la órbita de $3R_\oplus$ a la órbita $4R_\oplus$ es

$$\Delta E = -\frac{G}{8}\frac{M_\oplus m}{R_\oplus} - \left(-\frac{G}{6}\frac{M_\oplus m}{R_\oplus}\right) = \frac{G}{24}\frac{M_\oplus m}{R_\oplus} = 2{,}08 \times 10^8 \text{ J}. \tag{8.120}$$