Capítulo 7

Oscilador armónico

7.1. Movimiento armónico simple: cinemática

Un movimiento unidimensional periódico,, oscilatorio o vibratorio, es un movimiento que satisface

$$x(t+T) = x(t), \tag{7.1}$$

donde T es el valor mas pequeño que tiene esta propriedad. Notemos que si se cumple (7.1), también se cumple

$$x(t+nT) = x(t), \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{7.2}$$

Hay muchos ejemplos relevante de este tipo de movimiento: un péndulo, una masa unida a un muelle, la vibración de los átomos de un solido, el movimiento de los electrones en una antena de radio.

De todos los movimientos vibratorios el más simple y mas importante es el **movimiento armónico simple**, que por definición está dado por la expresión

$$x(t) = A\sin(\omega t + \alpha) \tag{7.3}$$

La cantidad $\omega t + \alpha$ se llama la **fase del movimiento**, y consecuentemente α es la fase inicial. A es la **amplitud** del movimiento. La amplitud es siempre positiva, es decir $A > 0$. Se puede siempre eligir que la amplitud sea positiva con el cambio $\alpha \to \alpha + \pi$. El período de este movimiento está definido por

$$\omega(t+T) + \alpha = \omega t + \alpha + 2\pi, \tag{7.4}$$

o sea

$$\omega T = 2\pi \qquad \text{o bien} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{7.5}$$

ω se llama **frecuencia angular** del movimiento y se mide en rad/s. La frecuencia del movimiento se define como le inverse del período

$$\nu = \frac{1}{T} \qquad \text{entonces} \qquad \omega = 2\pi\nu. \tag{7.6}$$

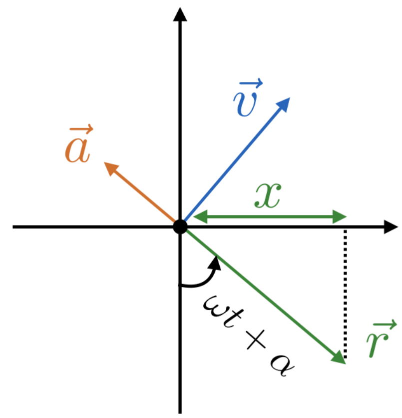
ν se mide en Herzios.

La velocidad del movimiento es

$$v = \dot{x} = \omega A \cos(\omega t + \alpha) = \omega A \sin(\omega t + \alpha + \pi/2) \tag{7.7}$$

y la aceleración

$$a = \ddot{x} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \alpha) = \omega^2 A \sin(\omega t + \alpha + \pi) \tag{7.8}$$



de modo que la velocidad y la aceleración ejecutan movimientos armónicos simple con lo mismo período que la posición, pero con amplitudes ωA y $\omega^2 A$ respectivamente, y con adelante de fase de $\pi/2$ y π con respecto a la posición.

El movimiento armónico simple puede considerarse geométricamente como el resultado de la proyección sobre un diámetro de un movimiento circular de radio A. Si queremos que la proyección sea sobre el eje x, la fase es ángulo que forma el vector que hace el movimiento circular con el eje y negativo (tomando en sentido positivo). La velocidad y la aceleración corresponden a movimientos circulares con radios ωA y $\omega^2 A$ adelante de fase $\pi/2$ y π respectivamente.

7.2. Fuerza y energía

Discutimos ahora el movimiento armónico simple desde un punto de vista dinámico. La fuerza que produce este movimiento ha de satisfacer la ecuación de Newton

$$F = ma = -m\omega^2 A \sin(\omega t + \alpha) = -m\omega^2 x(t). \tag{7.9}$$

Entonces definiendo la constante elástica como

$$k = m\omega^2 \qquad \text{o bien} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{7.10}$$

Vemos que la fuerza toma la forma

$$F = -kx(t), \tag{7.11}$$

es decir la fuerza que produce el movimiento armónico simple es una fuerza proporcional y de sentido contrario al desplazamiento que recibe el nombre de **fuerza elástica**.

De (7.5) y (7.6), el período y la frecuencia se relacionan con la fuerza elástica en la forma

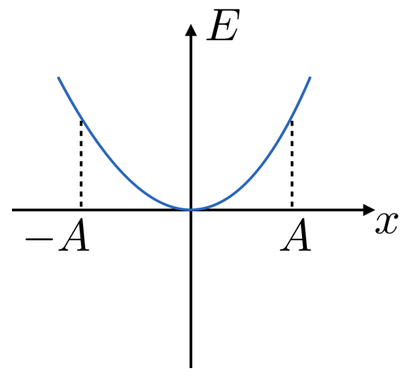
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{7.12}$$

Este tipo de fuerza deriva de la energía potencial elástica

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 = E_P \qquad \text{tal que} \qquad -V'(x) = -kx. \tag{7.13}$$

Entonces la energía potencial es como función del tiempo

$$E_P(t) = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \alpha), \tag{7.14}$$



que se hace máxima en las puntos de retroceso $x = \pm A$. Mientras que la energía cinética como función del tiempo es

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \alpha), \tag{7.15}$$

de forma que la energía total se mantiene constante:

$$E = E_P + E_K = \frac{1}{2}kA^2. \tag{7.16}$$

En los puntos de retroceso $x = \pm A$, la energía es exclusivamente potencial y la energía cinética se anula, mientras que en el punto de equilibrio $x = 0$, la energía potencial se anula y la energía cinética es máxima. En el punto de equilibrio, la velocidad de la partícula viene dado por

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2 \qquad\qquad v = \sqrt{\frac{k}{m}}A = \omega A. \tag{7.17}$$

Desde un punto de vista dinámica, el oscilador armónica es la solución general de la ecuación de movimiento

$$m\ddot{x} + kx = 0 \qquad\qquad \text{o bien} \qquad\qquad \ddot{x} + \omega^2 x = 0. \tag{7.18}$$

La solución general (7.3) incluye dos constante A y α. Vemos ahora como se relacionan estas constantes con las condiciones iniciales $x_0 = x(t=0)$ y $v_0 = \dot{x}(t=0)$. De (7.3)

$$x_0 = A \sin\alpha \qquad\qquad v_0 = A\omega\cos\alpha. \tag{7.19}$$

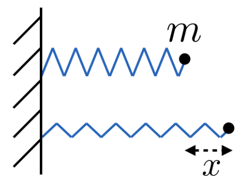
Por tanto

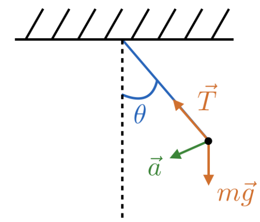
$$\tan\alpha = \frac{\omega x_0}{v_0} \qquad\qquad A = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega^2} \tag{7.20}$$

Notamos que la ecuación por $\tan\alpha$ tiene dos soluciones $\alpha = \arctan(\omega x_0/v_0)$ or $\alpha = \pi + \arctan(\omega x_0/v_0)$. Dado que A y ω son positivos, la fase inicial se determina con el signo de x_0 y de v_0.

7.3. Ejemplos

Vemos a continuación unos ejemplos de oscilador armónico. El mas obvio es una masa unida a un muelle con constante elástica k, donde x es la elongación del muelle.





Otro ejemplo que hemos visto es el péndulo simple para pequeñas oscilaciones. La ecuación de movimiento es

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \quad \text{o bien} \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0 \qquad (7.21)$$

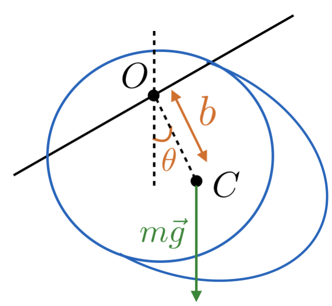
Para pequeñas oscilaciones $\sin\theta \simeq \theta$. La ecuación se convierte en

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0, \qquad (7.22)$$

que corresponde a un oscilador armónico $\theta(t) = A\sin(\omega t + \alpha)$, donde la amplitud A es el máximo ángulo de oscilación del péndulo (que suponemos pequeño) y con frecuencia angular

$$\omega^2 = \frac{g}{\ell} \qquad\qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}. \qquad (7.23)$$

Otro ejemplo interesante es el péndulo compuesto. Se trata de un solido rígido que puede oscilar rotando al rededor de un eje horizontal fijo (eje z). Como el cuerpo tiene un eje fijo, la posición del sistema puede mover con un grado de libertad. Tomamos el ángulo que toma el segmento OC con la vertical, siendo C el centro de masa y O el pie dela perpendicular desde en centro de masa al eje de rotación. Las fuerzas que actúa sobre el cuerpo son su peso $m\vec{g}$ y la reacción del eje. Tomando torque con respecto al ponto O para eliminar la reacción, obtenemos



$$\tau = -mgb\sin\theta, \qquad (7.24)$$

siendo $b = \overline{OC}$, la distancia desde el centro de masa al eje de rotación. Entonces la ecuación de movimiento es

$$\tau = I\frac{d\omega}{dt} = I\ddot{\theta}, \qquad (7.25)$$

donde I es el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje de rotación y $d\omega/dt$ es la aceleración angular. Entonces obtenemos

$$I\ddot{\theta} = -mgb\sin\theta \qquad \text{o bien} \qquad I\ddot{\theta} + mgb\sin\theta = 0. \qquad (7.26)$$

Con la cual para pequeñas oscilaciones tenemos la ecuación de un oscilador armónico,

$$\ddot{\theta} + \frac{mgb}{I}\theta = 0 \qquad (7.27)$$

con frecuencia angular $\omega = \sqrt{mgb/I}$ y período $T = 2\pi\sqrt{I/mgb}$. Utilizando el teorema de Steiner podemos poner

$$I = I_c + mb^2 \tag{7.28}$$

donde I_c es el momento de inercia con respecto a un eje paralelo del eje de rotación que pasa por el centro de masa. Entonces el período toma la forma

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_c + mb^2}{mgb}} = 2\pi\sqrt{\frac{K^2 + b^2}{gb}}, \tag{7.29}$$

donde K es el radio de giro del cuerpo con respeto a un eje horizontal paralelo al eje de rotación que pasa por el centro de masa. Entonces introduciendo la longitud

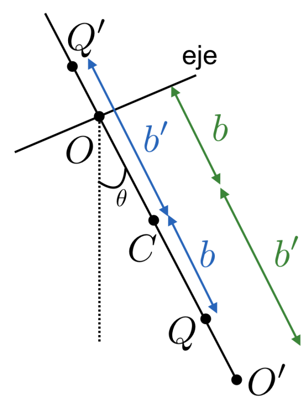
$$\ell_{\text{eq}} = \frac{K^2}{b} + b \tag{7.30}$$

el período puede expresarse como

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_{\text{eq}}}{g}} \tag{7.31}$$

que es el período correspondiente a un péndulo simple de longitud ℓ_{eq}. ℓ_{eq} se llama **longitud del péndulo simple equivalente**.

Prolongando la perpendicular desde el centro de masa al eje de rotación de una distancia $b' = K^2/b$, alcanzamos un punto O' con la siguiente propiedad: si hacemos oscilar un péndulo a un eje horizontal que pasa por O', la longitud del péndulo simple equivalente será



$$\ell'_{\text{eq}} = b' + \frac{K^2}{b'} = \frac{K^2}{b} + \frac{K^2}{K^2/b} = \ell_{\text{eq}}. \tag{7.32}$$

Es decir la longitud del péndulo simple y por tanto el período del péndulo es el mismo. O y O' se llaman puntos conjugados. Existen otro par de puntos conjugados Q y Q' situados simétricamente respecto a las puntos O y O'.

El punto O' se llama centro de percusión. Esto es decir que si sobre este punto actúa un impacto o percusión , no efecto no se aprecia en el punto O. Esto es decir a que la fuerza instantánea F sobre el cuerpo rígido, le imprime una aceleración de traslación $a = F/m$. Pero ademas el momento con respecto al centro de masa de la fuerza F es $\tau = Fb'$ la cual imprime al cuerpo rígido una aceleración angular en torno al centro de masa dado por

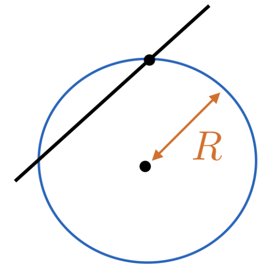
$$\alpha = \frac{Fb'}{I_c} = \frac{Fb'}{mK^2} = a\frac{b'}{K^2} = \frac{a}{b}. \tag{7.33}$$

Con la cual en el punto O se compensa la aceleración de traslación del centro de masa con la aceleración de rotación en torno al centro de masa, de modo que O permanece en reposo y por eso no nota el efecto de la percusión.

Vemos a continuación un par de ejemplos de péndulo físico.

Consideremos un anillo de masa m y de radio R suspendido de una varilla. Entonces

$$I_c = mR^2 \qquad\qquad K = R \tag{7.34}$$



Entonces la longitud del péndulo simple equivalente es

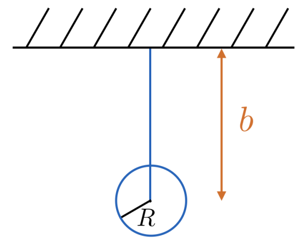
$$\ell = b + \frac{K^2}{b} = R + \frac{R^2}{R} = 2R. \tag{7.35}$$

Y por tanto el período es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}} \tag{7.36}$$

Como un secundo ejemplo, consideremos una esfera de masa m y radio R suspendida desde un punto fijo por una cuerda. Entonces

$$I_c = \frac{2}{5}mR^2 \qquad \rightarrow \qquad K = \sqrt{\frac{2}{5}}R. \tag{7.37}$$



La longitud del péndulo equivalente es

$$\ell = b + \frac{K^2}{b} = b + \frac{2}{5}\frac{R^2}{b}, \tag{7.38}$$

y el periodo es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g}}\sqrt{b + \frac{2}{5}\frac{R^2}{b}}. \tag{7.39}$$

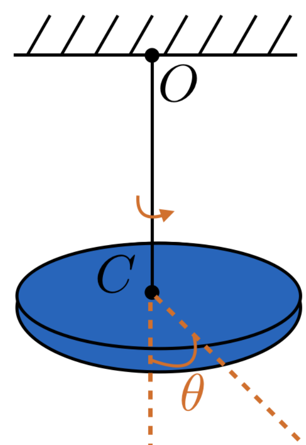
Por $R \ll b$ tenemos

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{b}{g}}\sqrt{1 + \frac{2}{5}\frac{R^2}{b^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{b}{g}}\left(1 + \frac{1}{5}\frac{R^2}{b^2} + \dots\right), \tag{7.40}$$

que nos da la corrección al periodo de un péndulo por efecto del tamaño de la bola suspendida.

Como en último ejemplo de oscilador armónico consideremos el **péndulo de torsión**. Se trata de un cuerpo suspendido por un alambre o fibra, de manera que la linea de suspensión OC pasa por el centro de masa. Cuando el cuerpo se rota de un ángulo θ, el alambre se retuerce y que produce un torque que tiene a eliminar la torsión, y que si el ángulo es pequeño, resulta proporcional a dicho ángulo

$$\tau = -\kappa\theta. \tag{7.41}$$



donde κ es llamado el **coeficiente de torsión** del alambre. Entonces si I es el momento de inercia del cuerpo en torno del eje OC, tenemos

$$I\ddot{\theta} = \tau = -\kappa\theta \qquad \text{o bien} \qquad \ddot{\theta} + \frac{\kappa}{I}\theta = 0, \tag{7.42}$$

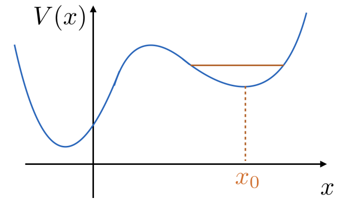
que es la ecuación de movimiento de un oscilador armónico con frecuencia angular

$$\omega^2 = \frac{\kappa}{I} \qquad \rightarrow \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}. \tag{7.43}$$

el péndulo de torsión se puede emplear para medir momentos de inercia, midiendo periodos, si conocemos el coeficiente de torsión de alambre.

7.4. Universalidad del oscilador armónico

El oscilador armónico no es un sistema dinámico mas, sino que es único y muy importante. La razón de ello es que es **universal**: Es el comportamiento que tiene cualquier sistema conservativo para oscilaciones pequeñas en torno a un mínimo. En efecto, consideremos una función de energía potencial $V(x)$ que tiene un mínimo en el punto $x = x_0$. Entonces utilizando el desarrollo de Taylor tenemos



$$V(x) = V(x_0) + V'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots \quad (7.44)$$

Al tratarse de un mínimo tenemos

$$V'(x_0) = 0 \qquad \text{y} \qquad V''(x_0) > 0 \quad (7.45)$$

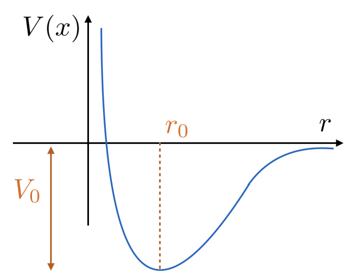
Con lo cual tomando el cero de energía potencial en $V_0 = V(x_0)$, es decir $E_P(x) = V(x) - V_0$, tenemos una función de energía potencial de la forma

$$E_P = V(x) - V_0 = \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots \quad (7.46)$$

que para pequeña oscilaciones, corresponde a un oscilador armónico con constante elástica $\kappa = V''(x_0)$ y frecuencia angular de oscilación

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{m}} = \sqrt{\frac{V''(x_0)}{m}}. \quad (7.47)$$

Por ejemplo, la interacción entre dos moléculas de gas puede describirse aproximadamente por el **potencial de Lennard-Jones**, dado por la expresión



$$V(r) = -V_0 \left[2\left(\frac{r_0}{r}\right)^6 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{12}\right], \quad (7.48)$$

donde r es la distancia entre las moléculas. Derivando

$$V'(r) = V_0 \left[12\left(\frac{r_0}{r}\right)^6 \frac{1}{r} - 12\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12} \frac{1}{r}\right] = 0, \quad (7.49)$$

que nos da la posición de equilibrio $r = r_0$, y en este punto $V(r_0) = -V_0$. Entonces

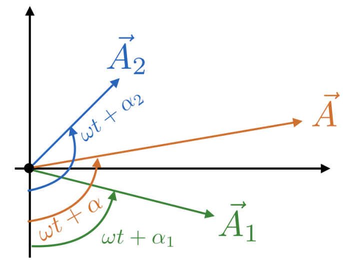
$$V''(r_0) = -V_0 \left[84\frac{r_0^6}{r^8} - 156\frac{r_0^{12}}{r^{14}}\right]_{r=r_0} = 72\frac{V_0}{r_0^2}, \quad (7.50)$$

con la cual la constante elástica y la frecuencia de oscilación son

$$\kappa = 72\frac{V_0}{r_0^2} \qquad \text{y} \qquad \omega = \frac{6}{r_0}\sqrt{\frac{2V_0}{\mu}}, \quad (7.51)$$

donde μ es la masa reducida del sistema formando por las dos moléculas.

7.5. Superposición de movimientos armónicos simples



Consideremos ahora la superposición o composición de movimientos armónicos simples. Consideremos primero el caso de movimientos de igual dirección y frecuencia:

$$x_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \alpha_1), \qquad x_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \alpha_2). \tag{7.52}$$

Entonces para obtener el movimiento resultando de la superposición

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega t + \alpha_2). \tag{7.53}$$

Consideremos los movimientos circulares uniformes cuya proyección sobre el eje x dan los movimientos armónicos simples

$$\vec{A}_1 = \vec{i} A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) - \vec{j} A_1 \cos(\omega t + \alpha_1), \tag{7.54a}$$

$$\vec{A}_2 = \vec{i} A_2 \sin(\omega t + \alpha_2) - \vec{j} A_2 \cos(\omega t + \alpha_2). \tag{7.54b}$$

El radio del movimiento circular resultando y por tanto la amplitud del movimiento armónico simple resultando será

$$A = |\vec{A}| = |\vec{A}_1 + \vec{A}_2| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta} \tag{7.55}$$

donde δ es el desfasaje, entre los dos movimientos. De la figura se ve

$$\delta = (\omega t + \alpha_2) - (\omega t + \alpha_1) = \alpha_2 - \alpha_1. \tag{7.56}$$

Entonces el movimiento armónico simple resultando será

$$x(t) = A \sin(\omega t + \alpha), \tag{7.57}$$

donde la amplitud está dado por (7.55), la frecuencia angular es la misma ω, ya que las tres vectores $\vec{A}_1$, $\vec{A}_2$ y $\vec{A}$ rotan con la misma velocidad angular, y la fase inicial α ponemos obtenerla de la expresión

$$\vec{A} = \vec{i} A \sin(\omega t + \alpha) - \vec{j} A \cos(\omega t + \alpha) = \vec{A}_1 + \vec{A}_2, \tag{7.58}$$

poniendo $t = 0$. Entonces

$$A\cos\alpha = A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2 \qquad A\sin\alpha = A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2. \tag{7.59}$$

Dividimos para obtener

$$\tan\alpha = \frac{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2} \tag{7.60}$$

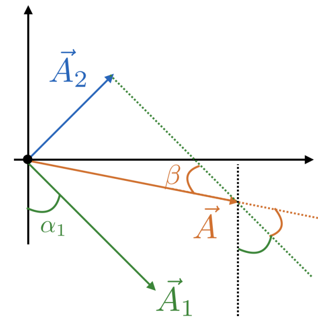
Consideremos algunos casos especiales. Si $\alpha_1 = \alpha_2$, el desfasaje es $\delta = 0$, y decimos que **los movimientos están en fase**. En este caso tenemos vectores rotando paralelos y

$$A = A_1 + A_2 \qquad \text{y} \qquad \tan\alpha = \frac{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_1}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_1} = \tan\alpha_1 \qquad \to \qquad \alpha = \alpha_1. \tag{7.61}$$

Los movimientos interfieren constructivamente. Por contra si $\delta = \pi$, decimos que los movimientos están en **oposición de fase**, e interfieren destructivamente. Tenemos en este caso

$$A = A_1 - A_2 \qquad \tan\alpha = \frac{A_1\sin\alpha_1 - A_2\sin\alpha_1}{A_1\cos\alpha_1 - A_2\cos\alpha_1} = \tan\alpha_1 \qquad \to \qquad \alpha = \alpha_1. \tag{7.62}$$

Cuando $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi/2$, $\delta = \pi/2$, decimos que los movimientos están en cuadratura. Entonces de (7.55)



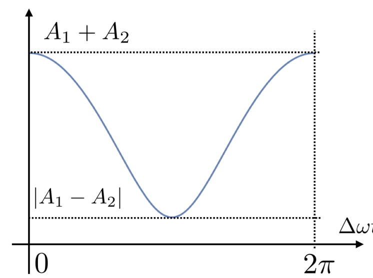
$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}, \tag{7.63}$$

y de (7.60)

$$\begin{aligned}\tan\alpha &= \frac{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin(\alpha_1+\pi/2)}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos(\alpha_1+\pi/2)} = \frac{A_1\sin\alpha_1 + A_2\cos\alpha_1}{A_1\cos\alpha_1 - A_2\sin\alpha_1} \\ &= \frac{\tan\alpha_1 + (A_2/A_1)}{1-(A_2/A_1)\tan\alpha_1} = \frac{\tan\alpha_1 + \tan\beta}{1-\tan\alpha_1\tan\beta} \\ &= \tan(\alpha_1+\beta) \end{aligned} \tag{7.64}$$

con la notación $\beta = \arctan A_2/A_1$.

Consideremos ahora la superposición de dos movimientos armónicos simples con igual dirección y diferentes frecuencias. En este caso vamos a considerar, por simplicidad, que los dos movimientos están en fase. Tenemos que



$$x_1(t) = A_1\sin\omega_1 t \tag{7.65a}$$
$$x_2(t) = A_2\sin\omega_2 t. \tag{7.65b}$$

En este caso, los movimientos circulares pulses son

$$\vec{A}_1 = -\vec{j}A_1\cos\omega_1 t + \vec{i}A_1\sin\omega_1 t\vec{A}_2 \quad = -\vec{j}A_2\cos\omega_2 t + \vec{i}A_2\sin\omega_2 t. \tag{7.66}$$

Entonces para la amplitud del movimiento resultado tenemos

$$\begin{aligned}A = |\vec{A}_1 + \vec{A}_2| &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\left(\cos\omega_1 t\cos\omega_2 t + \sin\omega_1 t\sin\omega_2 t\right)} \\ &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\omega_1-\omega_2)t} \end{aligned} \tag{7.67}$$

que oscila entre un valor máximo $A_{\text{max}} = A_1 + A_2$ cuando $(\omega_1 - \omega_2)t = 2n\pi$ y un valor mínimo $A_{\text{min}} = |A_1 - A_2|$ cuando $(\omega_1-\omega_2)t = 2n\pi+\pi$. Resulten por tanto un movimiento con amplitud modulada. La frecuencia de oscilación de la amplitud es

$$\nu = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi} = \nu_1 - \nu_2. \tag{7.68}$$

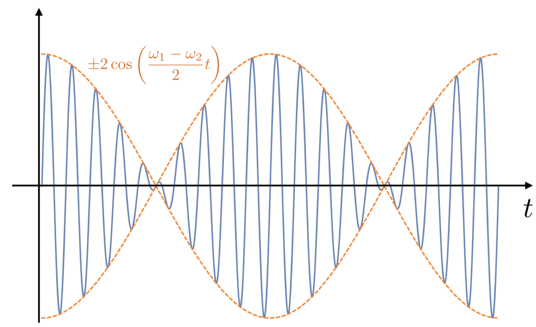
Es decir la diferencia de frecuencia de los movimientos que se componen.

Esta situación tiene lugar cuando, por ejemplo, dos vibraciones de frecuencias muy próxima, de modo que $\omega_1 - \omega_2$ es pequeña, vibran simultanamente en lugares cercanos. Se observara unas fluctuaciones en la intensidad del sonido, llamadas pulsaciones o batimentos (en música) que se deben a la modulación de la amplitud.

En el caso particular de $A_1 = A_2$, utilizando que $\sin(a\pm b) = \sin a\cos b \pm \sin b\cos a$, obtenemos que

$$\begin{aligned}x = x_1 + x_2 &= A_1(\sin\omega_1 t + \sin\omega_2 t) \\ &= A_1\left[\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t + \frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right) + \sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t - \frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\right] \\ &= 2A_1\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right) \end{aligned} \tag{7.69}$$

que nos da un movimiento oscilatorio con frecuencia angular igual a la media $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$ y amplitud modulada



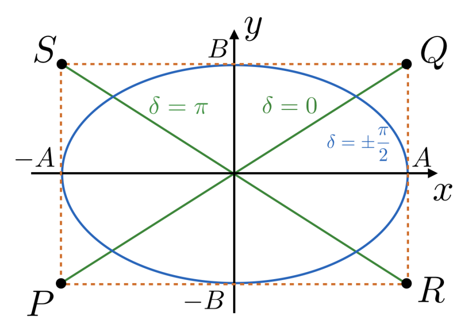
$$A(t) = 2A_1 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right). \tag{7.70}$$

Se obtiene lo mismo resultado desde (7.67), utilizando que $1 + \cos a = 2\cos^2 \frac{a}{2}$:

$$\begin{aligned} A &= A_1\sqrt{2}\sqrt{1+\cos(\omega_1-\omega_2)t} \\ &= 2A_1 \cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right) \end{aligned} \tag{7.71}$$

7.6. Superposición de movimientos armónico de direcciones perpendiculares

Consideremos ahora el caso de una partícula que se mueve en un plano, de modo que los coordenadas x y y ejecuten un movimiento armónico simple. Elegimos el origen de tiempo de modo que



$$x(t) = A\sin\omega t \qquad y(t) = B\sin(\omega t + \delta). \tag{7.72}$$

δ es el desfasaje entre el movimiento horizontal y el movimiento vertical. La trayectoria de la partícula está limitada al rectángulo

$$[-A, A] \times [-B, B]. \tag{7.73}$$

Consideremos algunos casos particulares. Si $\delta = 0$, tenemos $y = (B/A)x$ y el movimiento es un movimiento armónico simple a la largo de la diagonal del rectángulo PQ. Si r es la distancia desde el origen y θ el ángulo, tenemos

$$r(t) = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{A^2+B^2}\sin\omega t, \qquad \tan\theta(t) = \frac{y}{x} = \frac{B}{A}. \tag{7.74}$$

$\sqrt{A^2+B^2}$ es la amplitud del movimiento armónico simple resultante. Si el desfasaje es $\delta = \pi$, tenemos $y = -(B/A)x$ y el movimiento resultante es un movimiento armónico simple sobre la diagonal RS. En el caso $\delta = 0, \pi$ decimos que tenemos una **polarización rectilínea**.

Cuando $\delta = \pi/2$ (movimiento en cuadratura):

$$y = B\sin(\omega t + \pi/2) = B\cos\omega t, \qquad \text{con la cual} \qquad \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \tag{7.75}$$

que es la ecuación de una elipse. El vector posición en este caso, y entonces el vector velocidad, son

$$\delta = \frac{\pi}{2} \qquad \to \qquad \vec{r} = \vec{i}A\sin\omega t + \vec{j}B\cos\omega t, \tag{7.76a}$$

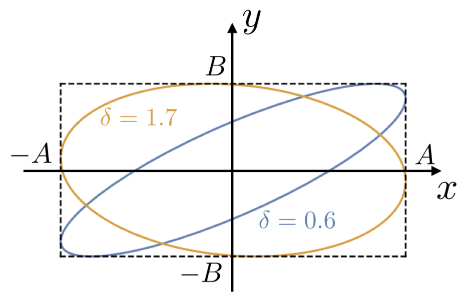
$$\delta = \frac{\pi}{2} \qquad \to \qquad \vec{V} = \vec{i}A\omega\cos\omega t - \vec{j}B\omega\sin\omega t. \tag{7.76b}$$

Observemos que para el punto $(A,0)$, $\omega t=\pi/2$, y por tanto $\vec{V}(A)=-B\omega\vec{j}$ y concluimos que la elipse se recorre en sentido horario.

Cuando $\delta=3\pi/2$, tenemos $y=B\sin(\omega t+3\pi/2)=-B\cos\omega t$, y en este caso

$$\delta=\frac{3\pi}{2}\qquad\rightarrow\qquad\vec{r}=\vec{i}A\sin\omega t-\vec{j}B\cos\omega t,\qquad\vec{V}=\vec{i}A\omega\cos\omega t+\vec{j}B\omega\sin\omega t.\tag{7.77}$$

Por el punto $(A,0)$, tenemos $\omega t=\pi/2$ y $\vec{V}(A)=B\omega\vec{j}$ de modo que la elipse se recorre en sentido anti-horario.



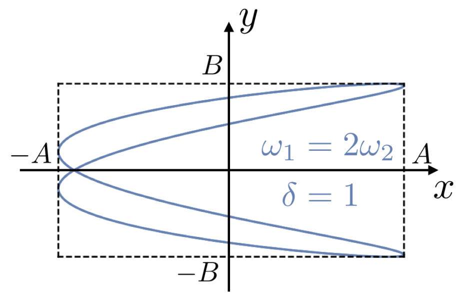
Para $\delta=\pi/2,3\pi/2$ hablamos de polarización elíptica. Cuando $A=B$, la elipse es una circunferencia de radio A y hablamos de polarización circular.

Para otros valores de δ, la trayectoria es también una elipse pero con las ejes fijados con respecto a los ejes x y y.

La fuerza que produce estos movimientos es

$$\vec{F}=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}=-\kappa x\vec{i}-\kappa y\vec{j}=-\kappa\vec{r},\tag{7.78}$$

con $\kappa=m\omega^2$. Se trata de un fuerza central conservativa con energía potencial



$$V(x,y)=\frac{1}{2}k(x^2+y^2).\tag{7.79}$$

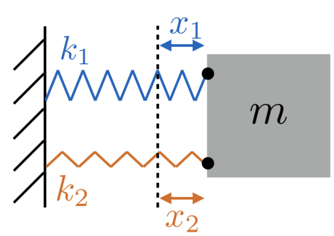
En el caso de dos movimientos oscilatorios perpendiculares con frecuencias diferentes

$$x=A_1\sin\omega_1 t\qquad\qquad y=A_2\sin(\omega_2 t+\delta).\tag{7.80}$$

Si ω_2/ω_1 es un número racional se forman unas trayectorias cerradas llamadas **figuras de Lissajous** que se puede producir fácilmente en el laboratorio utilizando un osciloscopio.

7.7. Asociación de muelles

Consideremos ahora brevemente la asociación de muelle en serie y en paralelo. En paralelo los dos muelles verifican la misma elongación $x=x_1=x_2$. Entonces la fuerza total que ejercen los dos muelles es



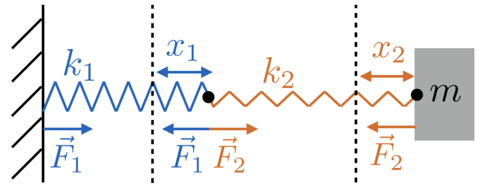
$$F=F_1+F_2=-k_1x_1-k_2x_2=-(k_1+k_2)x.\tag{7.81}$$

Es decir, la asociación de dos muelles en paralelo equivalente a un único muelle con constante elástica $k=k_1+k_2$. Si asociamos n muelles con constantes elásticas $k_1,\ldots,k_n$ en paralelo, el resultado es un único muelle con constante elástica igual a la suma de las constantes elásticas $k=k_1+\ldots+k_n$.

Consideremos ahora la asociación de dos muelle en serie. Llamamos x_1 y x_2 a las elongaciones de las muelles 1 y 2 con constantes k_1 y k_2. La fuerza que actúa sobre la masa m es la fuerza debida al muelle 2, $F_2=-k_2x_2$. Pero el desplazamiento total es $x=x_1+x_2$, entonces buscamos $k_{\rm eq}$ tal que $F_2=k_{\rm eq}x$. Por otra parte si pensamos a una pequeña masa m_0 entre los muelles k_1 y k_2, la ecuación de movimiento de esa masa seria $m_0a=F_2-F_1$. Pero no como no hay tal masa $m_0=0$ y las fuerzas de los dos muelles deben equilibrase $F_2=F_1$. Por tanto debe cumplirse $k_1x_1=k_2x_2$. Entonces $x_1=(k_2/k_1)x_2$ que nos relacionan las elongaciones x_1 y x_2.

Con la cual la longitud total es

$$x = x_1 + x_2 = x_2\left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right) = \frac{k_1 + k_2}{k_1}x_2, \tag{7.82}$$



que substituíamos en $F_2 = -k_2x_2$ y nos da

$$F_2 = \frac{k_1k_2}{k_1 + k_2}x = \left(\frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}\right)x. \tag{7.83}$$

Así pues la asociación de dos muelles en serie equivale a un único muelle con constante elástica

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}. \tag{7.84}$$

Si asociamos n muelles de constantes elásticas $k_1, \ldots, k_n$ en serie, tendremos una fuerza equivalente a un único muelle con constante elástica k tal que

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \cdots + \frac{1}{k_n}. \tag{7.85}$$

7.8. Osciladores amortiguadas

En un movimiento armónico simple, producido por una fuerza elástica $F = -kx$, las oscilaciones tiene una amplitud que se mantiene. Sin embargo, muchas veces, además de la fuerza elástica, hay una fuerza de fricción que amortigua el movimiento y hace que disminuye la amplitud del movimiento. Consideremos una fuerza de fricción proporcional a la velocidad y que se opone a ella. Es decir

$$F_f = -\lambda v. \tag{7.86}$$

Entonces cuando actúa la fuerza elástica y la fuerza de fricción, tenemos la ecuación de movimiento

$$ma = -kx - \lambda v \qquad \text{o bien} \qquad m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \lambda\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = 0. \tag{7.87}$$

Este ecuación se puede reescribir en la forma

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2x = 0 \qquad \text{donde} \qquad \gamma = \frac{\lambda}{2m} \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}. \tag{7.88}$$

ω_0 es la frecuencia que tendría el oscilador armónico sin amortiguamiento, y γ es la constante de amortiguamiento. Estudiamos ahora la solución de la ecuación (7.88) para el caso de pequeño amortiguamiento, que se define por la desigualdad $\gamma < \omega_0$. La solución tiene entonces la forma

$$x = Ae^{-\gamma t}\sin(\omega t + \alpha). \tag{7.89}$$

En efecto,

$$\dot{x} = -\gamma Ae^{-\gamma t}\sin(\omega t + \alpha) + A\omega e^{-\gamma t}\cos(\omega t + \alpha) \tag{7.90a}$$

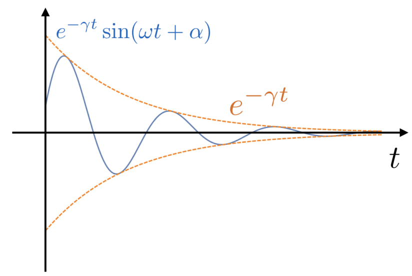
$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \gamma^2Ae^{-\gamma t}\sin(\omega t + \alpha) - 2A\gamma\omega e^{-\gamma t}\cos(\omega t + \alpha) - A\omega^2e^{-\gamma t}\sin(\omega t + \alpha)\\ &= Ae^{-\gamma t}\left[(\gamma^2 - \omega^2)\sin(\omega t + \alpha) - 2\gamma\omega\cos(\omega t + \alpha)\right]\end{aligned} \tag{7.90b}$$

Entonces, substituimos para obtener

$$\begin{aligned}\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2x &= Ae^{-\gamma t}\left[(\gamma^2 - \omega^2 - 2\gamma^2 + \omega_0^2)\sin(\omega t + \alpha) + (2\gamma\omega - 2\gamma\omega)\cos(\omega t + \alpha)\right]\\ &= -Ae^{-\gamma t}(\gamma^2 + \omega^2 - \omega_0^2)\sin(\omega t + \alpha) = 0\end{aligned} \tag{7.91}$$

Por tanto la ecuación para el oscilador armónico amortiguado se cumple si

$$\gamma^2 + \omega^2 - \omega_0^2 = 0. \tag{7.92}$$



Es decir si la frecuencia del oscilador amortiguado es

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\lambda}{4m^2}}. \tag{7.93}$$

Notamos que como consecuencia del **amortiguamiento desciende la frecuencia de las oscilaciones**, ya que $\omega < \omega_0$. Por otro parte la amplitud de las oscilaciones no es constante sino que disminuye con el factor $e^{-\gamma t}$.

Las constante del movimiento A y α, la amplitud y la fase inicial, se relacionan con los valores iniciales x_0 y $\dot{x}_0$.

Si el amortiguamiento no es pequeño, $\gamma > \omega_0$, la formula (7.93) nos dice que ω se hace imaginario, $\omega = \pm i\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \equiv \pm i\beta$. En general, utilizando que $e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$, la solución general de (7.88) es $x = Ae^{(-\gamma+i\omega)t} = Ae^{(-\gamma\pm\beta)t}$. Podemos verificar que $x = Ae^{-\delta t}$ es una solución de la ecuación (7.88). Substituíamos para obtener

$$\delta^2 - 2\delta\gamma + \omega_0^2 = 0 \qquad \rightarrow \qquad \delta = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \tag{7.94}$$

Entonces, en el caso, $\gamma > \omega_0$, la ecuación diferencial (7.88) tiene las dos soluciones independientes

$$x = Ae^{-\gamma t}e^{\pm\beta t} = Ae^{-(\gamma\mp\beta)t} \qquad \beta = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \tag{7.95}$$

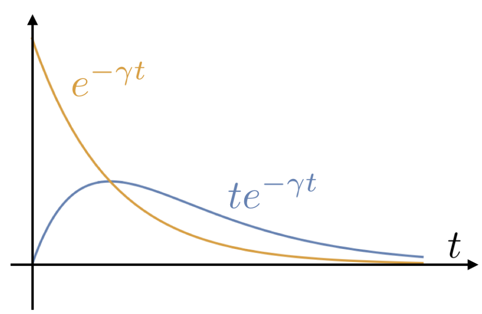
Notemos que $\beta < \gamma$ de modo que los dos soluciones son exponencialmente decreciente a $t \to \infty$. La combinación lineal particular de las dos soluciones (7.95) se determina con las condiciones iniciales x_0 y $\dot{x}_0$. En este caso, la partícula no oscile sino que se amortigua hasta la posición de equilibrio. La energía perdida por la partícula en las oscilaciones amortiguadas es absorbida por el medio que la rodea.

Si $\gamma = \omega_0$, probamos la solución $x = At^{\alpha}e^{-\beta t}$. Substituíamos en (7.88) para obtener

$$t^2(\omega_0^2 - 2\gamma\beta + \beta^2) + 2t\alpha(\gamma - \beta) + \alpha(\alpha - 1) = 0, \tag{7.96}$$

que nos da las condiciones

$$\beta = \gamma \qquad \omega_0^2 = \gamma^2 \qquad \alpha = 0, 1. \tag{7.97}$$



La solución física tiene $\beta > 0$. Entonces las dos soluciones independientes son

$$x = Ae^{-\gamma t} \qquad \text{y} \qquad x = Ate^{-\gamma t}. \tag{7.98}$$

7.9. Oscilaciones forzadas

Otro problema importante es el de las vibraciones de un oscilador armónico sometido a una fuerza elástica, que es obligado a vibrar por efecto de una fuerza oscilante. Esto ocurre por ejemplo cuando una onda sonora alcanza una cuerda que puede vibrar, o cuando las ondas electromagnéticas absorbidas por una antena y amplificadas actúan sobre las circuitos de un televisor produciendo oscilaciones eléctricas forzadas.

Suponemos que la partícula está sometida a la fuerza oscilante

$$F = F_0 \cos \omega_f t \tag{7.99}$$

y también a la fuerza elástica $-kx$, y a la fuerza de amortiguamiento $-\lambda v$. La ecuación de movimiento es

$$ma = F - \lambda v - kx \qquad \text{o bien} \qquad m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega_f t \tag{7.100}$$

Introduciendo $\gamma = \lambda/(2m)$ y $\omega_0^2 = k/m$, se reescribe en la forma

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega_f t. \tag{7.101}$$

La ecuación (7.101) es la version inhomogénea, es decir con segundo miembro distinto de cero, de la ecuación homogénea para el oscilador amortiguado. la solución general de la ecuación (7.101) es de la forma

$$x(t) = x_a(t) + x_p(t). \tag{7.102}$$

donde $x_a(t)$ es la solución de la ecuación homogénea, es decir satisface

$$\ddot{x}_a + 2\gamma\dot{x}_a + \omega_0^2 x_a = 0. \tag{7.103}$$

$x_p(t)$ es una solución particular de la ecuación inhomogénea o sea

$$\ddot{x}_p + 2\gamma\dot{x}_p + \omega_0^2 x_a = \frac{F_0}{m} \cos \omega_f t. \tag{7.104}$$

La solución general $x_a(t)$ contiene las constantes arbitrarias A y α que sirven para ajustar las condiciones iniciales x_0 y $\dot{x}_0$, pero al ser exponencialmente decreciente con el tiempo, $x_a(t)$ represente un transitorio que deja de ser relevante a tiempos largos ($t \to \infty$), para los que sólo cuenta la solución particular.

Para obtener la solución particular $x_p(t)$ utilizamos la intuición física. Esperemos, que a tiempos largos, cuando desparece el transitorio, el sistema no oscile no con la frecuencia angular correspondiente a la fuerza elástica ω_0, ni con la frecuencia amortizada $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ sino con la frecuencia forzante ω_f. Ensayamos por tanto una expresión de la forma

$$x_p(t) = A \sin(\omega_f t - \beta), \tag{7.105}$$

donde el signo menos en $-\beta$ se introduce por conveniencia posterior. Desarrollando en la forma, y derivando

$$x_p(t) = A \cos\beta \sin\omega_f t - A \sin\beta \cos\omega_f t \tag{7.106a}$$
$$\dot{x}_p(t) = A\omega_f \cos\beta \cos\omega_f t + A\omega_f \sin\beta \sin\omega_f t \tag{7.106b}$$
$$\ddot{x}_p(t) = -A\omega_f^2 \cos\beta \sin\omega_f t + A\omega_f^2 \sin\beta \cos\omega_f t \tag{7.106c}$$

Substituyendo en la ecuación (7.104) y igualando los coeficientes de $\cos \omega_f t$ es decir F_0/m, y de $\sin \omega_f t$, es decir cero, obtenemos

$$A\left(\omega_f^2 \sin\beta + 2\gamma\omega_f \cos\beta - \omega_0^2 \sin\beta\right) = \frac{F_0}{m} \tag{7.107a}$$

$$-\omega_f^2 \cos\beta + 2\gamma\omega_f \sin\beta + \omega_0^2 \cos\beta = 0. \tag{7.107b}$$

La secunda ecuación nos da

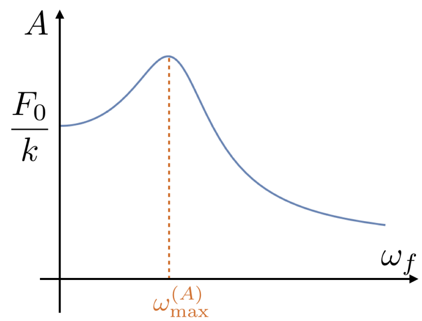
$$\tan\beta = \frac{\omega_f^2 - \omega_0^2}{2\gamma\omega_f}, \tag{7.108}$$

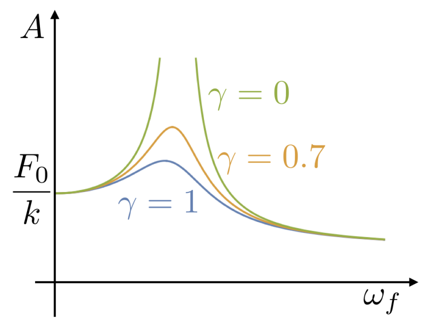
de donde obtenemos

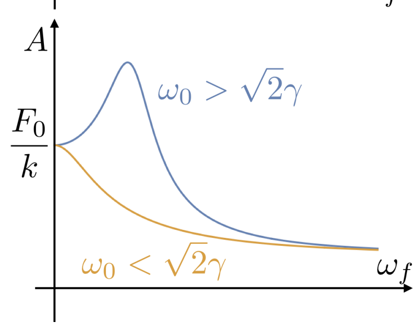
$$\cos^2\beta = \frac{1}{1+\tan^2\beta} = \frac{(2\gamma\omega_f)^2}{(2\gamma\omega_f)^2 + (\omega_f^2 - \omega_0^2)^2}. \tag{7.109}$$

Ahora reescribimos la primera ecuación como

$$A\cos\beta\left[(\omega_f^2 - \omega_0^2)\tan\beta + 2\gamma\omega_f\right) = \frac{F_0}{m}, \tag{7.110}$$







de done obtenemos la amplitud

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}}. \tag{7.111}$$

Notemos que la amplitud A y el desfasaje β, que aparecen en la solución particular no son constantes a determinar sino que están fijas por las parámetros F_0, ω_f, ω_0 m y γ.

Si representamos la amplitud como función de la frecuencia ω_f, fijando a el valor de los restantes parámetros, observamos que la amplitud alcanza un máximo cuando el denominador en (7.111) se hace mínimo.

El denominador se hace mínimo cuando

$$4\omega_f(\omega_f^2 - \omega_0^2) + 8\gamma^2\omega_f = 0 \quad \rightarrow \quad (\omega_f^2 - \omega_0^2) = -2\gamma^2 \tag{7.112}$$

Es decir el máximo en la amplitud se alcanza para

$$\omega_{\max}^{(A)} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\lambda^2}{2m^2}}. \tag{7.113}$$

Esta expresión es valida solamente para amortiguamiento pequeño, $\omega_0 > \sqrt{2}\gamma$. En caso contrario, no hay máximo, sino que el máximo se alcanza para $\omega_f = 0$.

En caso $\omega_f = \omega_{\max}$ decimos que hay **resonancia en la amplitud**.

Analizamos ahora como varia la amplitud máxima cuando variamos el amortiguamiento. La amplitud máxima es

$$A_{\max} = \frac{F_0}{m}\frac{1}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}. \tag{7.114}$$

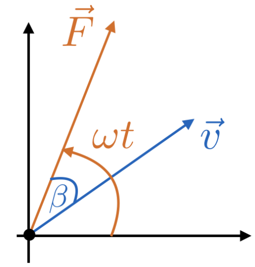
$A_{\max}$ diverge para $\gamma = 0$. El cero cuando $\omega_0 = \gamma$ no existe porque $\omega_0 > \sqrt{2}\gamma$.

La velocidad del oscilador forzado es

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \omega_f A \cos(\omega_f t - \beta) = v_0 \cos(\omega_f t - \beta). \tag{7.115}$$

Comparando con la expresión para la fuerza $F = F_0 \cos \omega_f t$, vemos que el desfasaje β es el desfasaje de la velocidad, que ve retrasada una fase β con respecto a la fuerza.

La amplitud v_0 para la velocidad es



$$v_0 = \omega_f A = \frac{\omega_f F_0/m}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}}, \tag{7.116}$$

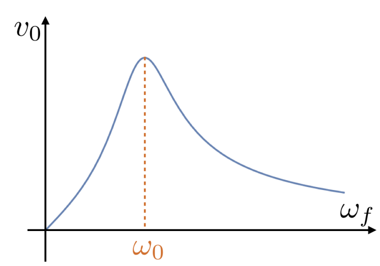
que puede también escribirse en la forma

$$v_0 = \frac{F_0}{\sqrt{(m\omega_f - \frac{k}{\omega_f})^2 + \lambda^2}}. \tag{7.117}$$

Si representamos la amplitud de la velocidad como función de la frecuencia forzante ω_f, vemos que alcanza un máximo cuando el denominador en (7.117) es mínimo, o sea

$$m\omega_f - \frac{k}{\omega_f} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \omega_{\max}^{(V)} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0. \tag{7.118}$$

Entonces cuando la frecuencia de forzamiento coincide con la frecuencia natural ω_0 correspondiente a la fuerza elástica, la amplitud en la velocidad es máxima



$$v_{\max} = \frac{F_0}{2\gamma m} = \frac{F_0}{\lambda}, \tag{7.119}$$

y decimos que hay **resonancia en la energía**. Notemos también que substituyendo $\omega_{\max}^{(V)}$ en el desfasaje (7.108), obtenemos $\beta = 0$, es decir cuando $\omega_f = \omega_0$, la velocidad está en fase con la fuerza forzante.

Estas son las condiciones mas favorables para la transferencia de energía al oscilador por la fuerza oscilante, ya que la potencia Fv se hace máxima cuando F y v están en fase. De acuerdo con (7.113) cuando el amortiguamiento γ es pequeño hay poca diferencia entre la frecuencia de resonancia en la amplitud y en la energía.

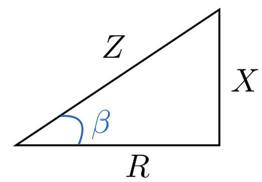
7.10. Impedancia de un oscilador

Introducimos ahora un concepto útil también en circuitos eléctricos oscilantes. La cantidad que aparece en el denominador de (7.117) se llama **impedancia del oscilador**:

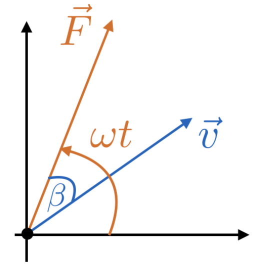
$$Z = \sqrt{\left(m\omega_f - \frac{k}{\omega_f}\right)^2 + \lambda^2} = \frac{m}{\omega_f}\sqrt{\left(\omega_f^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\gamma^2}. \tag{7.120}$$

La resistencia R y la reactancia X se definen como

$$R = \lambda, \qquad\qquad X = m\omega_f - \frac{k}{\omega_f}, \tag{7.121}$$



de modo que $Z = \sqrt{X^2 + R^2}$. Tenemos pues $v_0 = F_0/Z$. El ángulo β en el triangulo formando por R, X y Z es el desfasaje entre la fuerza y la velocidad. En efecto



$$\tan\beta = \frac{X}{R} = \frac{m\omega_f - \frac{k}{\omega_f}}{\lambda} = \frac{m}{\omega_f}\frac{\omega_f^2 - \omega_0^2}{\lambda} = \frac{\omega_f^2 - \omega_0^2}{2\gamma\omega_f}. \tag{7.122}$$

La potencia transferida al oscilador es

$$P = Fv = F_0\cos\omega_f t \times v_0\cos(\omega_f t - \beta) \tag{7.123a}$$
$$= \frac{F_0^2}{Z}\cos\omega_f t\cos(\omega_f t - \beta) \tag{7.123b}$$
$$= \frac{F_0^2}{Z}\left(\cos^2\omega_f t\cos\beta + \cos\omega_f t\sin\omega_f t\sin\beta\right) \tag{7.123c}$$
$$= \frac{F_0^2}{2Z}\left((1 + \cos 2\omega_f t)\cos\beta + \sin 2\omega_f t\sin\beta\right) \tag{7.123d}$$

Ahora bien

$$\overline{\cos 2\omega_f t} = \int_0^{2\pi/\omega_f}\cos 2\omega_f t dt = 0 \qquad \overline{\sin 2\omega_f t} = \int_0^{2\pi/\omega_f}\sin 2\omega_f t dt = 0 \tag{7.124}$$

con la cual la potencia promedia (en una periodo de fuerza) es

$$\overline{P} = \frac{F_0^2}{2Z}\cos\beta = \frac{1}{2}F_0 v_0\cos\beta = \frac{1}{2}\frac{F_0^2 R}{Z^2} = \frac{1}{2}Rv_0^2 \tag{7.125}$$

En (7.125) vemos que la máxima transferencia de energía al oscilador se produce cuando v_0 es máximo y que R está fijo. En la resonancia $\beta = 0$, $X = 0$ y $Z = R$, con la cual

$$\overline{P_{\text{res}}} = \frac{F_0^2}{2R}. \tag{7.126}$$