EXAMEN DE MATEMÁTICAS - 3º parcial

GRADO EN CIENCIAS AMBIENTALES

9 de Enero de 2014

1. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Calcula su determinante y di si es invertible (razona tu respuesta).

   b) Calcula su inversa utilizando el método de Gauss-Jordan.

   c) ¿Cómo comprobarías que el resultado obtenido es correcto?

   (4 puntos)

   a) Aplicando la regla de Sarrus, tenemos que $|A| = -4 - (2 - 12) = 6$. La matriz sí es invertible, ya que $|A| \neq 0$.

   b) Tenemos que trabajar sobre la matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

   Realizamos sucesivamente las siguientes operaciones elementales: $2f_3 + f_1$, $f_3 - 2f_2$, $3f_1 + f_3$ y $f_2 + f_3$. Llegamos de este modo a la matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

   Finalmente dividimos cada fila respectivamente por 6, -2 y -3, obteniendo:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & -2/3 \end{array}\right)$$

   La matriz que queda a la derecha es la inversa, A^{-1}.

   c) Podemos comprobar que el resultado anterior es correcto multiplicando A por A^{-1}. Debe salir la identidad.

2. Calcula los autovalores y autovectores de la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   A partir de estos datos, ¿dirías que es diagonalizable? (razona tu respuesta)

   (4 puntos)

Cálculo de autovalores

Empezamos por calcular el polinomio característico:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & -2 \\ 4 & -3-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

Desarrollando por la fila 3 tenemos:

$$P(\lambda) = (-1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)\{(3-\lambda)(-3-\lambda)+8\} = (-1-\lambda)(\lambda^2-1)$$

Los autovalores son las raíces de este polinomio, es decir:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1(\text{doble}) \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

Cálculo de autovectores

- Autovectores de $\lambda_1 = -1$ (multiplicidad algebráica 2).

  Debemos resolver el sistema $(A - \lambda_1 I)x = 0$. Observamos que

  $$(A - \lambda_1 I) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  luego el conjunto de autovectores asociados a $\lambda_1 = -1$ queda definido por una sola ecuación:

  $$4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0$$

  Dando valores paramétricos a x_1 y x_2 tenemos:

  $$x_1 = \alpha \qquad x_2 = \beta \qquad x_3 = 2\alpha - \beta$$

  Entonces,

  $$\begin{cases} \alpha = 1, \beta = 0 & \rightarrow & v_1^1 = (1,0,2) \\ \alpha = 0, \beta = 1 & \rightarrow & v_1^2 = (0,1,-1) \end{cases}$$

  Hemos encontrado dos autovectores linealmente independientes, luego la multiplicidad geométrica de λ_1 es 2, que coincide con su multiplicidad algebraica.

- Autovectores de $\lambda_2 = 1$.

  Debemos resolver el sistema $(A - \lambda_2 I)x = 0$. Observamos que

  $$(A - \lambda_2 I) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 4 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

  luego el conjunto de autovectores asociados a $\lambda_2 = 1$ queda definido por las ecuaciones:

  $$x_1 = x_2 \quad \text{y} \quad x_3 = 0$$

  Las soluciones serán entonces de la forma:

  $$x_1 = \alpha \qquad x_2 = \alpha \qquad x_3 = 0$$

  Por ejemplo, para $\alpha = 1$, tenemos el autovector $v_2 = (1,1,0)$.

Hemos comprobado que en ambos autovalores, la multiplicidad algebraica y geométrica coinciden. Esto significa que la matriz sí es diagonalizable.

3. Estamos estudiando la evolución de una población mediante un modelo de Leslie con dos clases de edad (jóvenes y adultos). La tasa de fertilidad de los jóvenes es 1 y la de los adultos es 4. Además sabemos que el 50 % de los jóvenes sobreviven hasta la edad adulta.

   a) Dada una población inicial de 100 jóvenes, ¿cuántos individuos adultos habrá al cabo de 2 generaciones?

   b) El autovalor dominante esta matriz es $\lambda = 2$ y su autovector asociado $v = (9.7, 2.4)$. ¿Cómo podemos interpretar estos datos?

   (2 puntos)

   a) La matriz de Leslie en este caso es $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$. Entonces, el vector de población en la siguiente generación será:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix}$$

   A su vez, el vector de población tras dos generaciones será:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 50 \end{pmatrix}$$

   Luego la respuesta es 50. Al cabo de dos generaciones habrá 50 individuos adultos.

   b) El autovalor dominante representa la “tasa de crecimiento asintótico”. Al ser mayor que 1, indica que la población experimentará a largo plazo un crecimiento exponencial. Concretamente, por ser $\lambda = 2$, sabemos que doblará su tamaño en cada generación.

   A su vez, como $9{,}7 + 2{,}4 = 12{,}1$, tenemos que la proporción de individuos jóvenes se aproximará a $9{,}7/12{,}1$ (80.17 %) y la de individuos adultos a $2{,}4/12{,}1$ (19.83 %).

OBSERVACIONES:

- Tiempo: 1 hora y 20 minutos.
- El examen ha de realizarse sin utilizar calculadora.
- No se permite entregar el examen escrito con lápiz ó bolígrafo rojo.
- Los distintos problemas deben entregarse en hojas separadas.