EXAMEN DE MATEMÁTICAS - 2º parcial

GRADO EN CIENCIAS AMBIENTALES

28 de Noviembre de 2013

1. Resuelve los siguientes problemas de valor inicial:

   a) $y' = y - e^{-x}$ con $y(0) = 1$

   b) $y' - 2y^2 - 2 = 0$ con $y(0) = 0$

   (4 puntos)

   a) Tenemos que $y' - y = -e^{-x}$, luego se trata de una ecuación lineal con $p(x) = -1$ y $q(x) = -e^{-x}$. Aplicamos el método de variación de constantes:

   - Paso 1
   $$v(x) = e^{-\int p(x)dx} = e^{\int dx} = e^x$$
   - Paso 2
   $$c(x) = \int \frac{q(x)}{v(x)} dx = \int \frac{-e^{-x}}{e^x} dx = \int -e^{-2x} dx = \frac{1}{2} e^{-2x} + C$$
   - Paso 3
   $$y = c(x)v(x) = \left(\frac{1}{2} e^{-2x} + C \right) e^x = \frac{1}{2} e^{-x} + Ce^x$$

   Ahora, aplicando la condición $y(0) = 1$, deducimos que debe ser $C = 1/2$, luego la solución particular en este caso será
   $$y = \frac{1}{2}(e^{-x} + e^x)$$

   b) Se trata de una ecuación de variables separables, ya que $y' = 2y^2 + 2 = 2(y^2 + 1)$, es decir $\frac{y'}{y^2 + 1} = 2$. Integrando en ambos miembros:
   $$\int \frac{dy}{y^2 + 1} = \int 2dx \Rightarrow \arctan(y) = 2x + C \Rightarrow y = \tan(2x + C)$$
   Aplicando la condición $y(0) = 0$, deducimos que $C = 0$, luego la solución particular en este caso es $y = \tan(2x)$.

2. Calcula las derivadas de segundo orden de $f(x, y) = e^{x+y^2}$.

   (2 puntos)

   Tenemos que
   $$f_x(x, y) = e^{x+y^2} \qquad f_y(x, y) = e^{x+y^2} 2y$$
   Entonces las derivadas de segundo orden serán:
   $$f_{xx}(x, y) = e^{x+y^2} \quad f_{yx}(x, y) = f_{xy}(x, y) = e^{x+y^2} 2y$$
   $$f_{yy}(x, y) = e^{x+y^2} 4y^2 + e^{x+y^2} 2 = e^{x+y^2}(4y^2 + 2)$$

3. Encuentra la única función que verifica las tres condiciones siguientes:

   - $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2 + ye^x$

- $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^x$
- $f(0, 1) = 4$

(2 puntos)

a) Paso 1: Integramos $\partial f/\partial x$ respecto de x.

$$f(x, y) = \int (2 + ye^x) dx = 2x + ye^x + C(y)$$

b) Paso 2: Derivamos la función obtenida respecto de y y comparamos con la que nos dan.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^x + C'(y)$$

De aquí deducimos que debe ser $C'(y) = 0$, luego $C(y) = C$, y la función que buscamos será

$$f(x, y) = 2x + ye^x + C$$

c) Paso 3: Aplicando la condición $f(0, 1) = 4$, deducimos que debe ser $C = 3$, luego la solución es

$$f(x, y) = 2x + ye^x + 3$$

4. Comprueba que la función $y = x \ln x$ es solución de la ecuación diferencial $yy'' = \ln x$.
(2 puntos)
Tenemos que

$$y' = \ln x + x \cdot 1/x = \ln x + 1 \quad , , \quad y'' = 1/x$$

Ahora, sustituyendo y e y'' en la ecuación, comprobamos que es cierta para todo x.

OBSERVACIONES:

- Tiempo: 1 hora y 20 minutos.
- El examen ha de realizarse sin utilizar calculadora.
- No se permite entregar el examen escrito con lápiz ó bolígrafo rojo.
- Los distintos problemas deben entregarse en hojas separadas.