EXAMEN DE MATEMÁTICAS - 1º parcial

GRADO EN CIENCIAS AMBIENTALES

8 de Noviembre de 2013

1. *a*) Calcula el dominio de la función:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-5}}$$

   b) Calcula las asíntotas de la función

$$f(x) = \frac{2x^3 + 2x - 1}{x^2 - 3x + 2}$$

(4 puntos)

   a) Primero debemos estudiar el signo del radicando y eliminar los puntos en que salga negativo. Vemos que el numerador es negativo para $x < -1$y positivo para $x > -1$. A su vez, el denominador es negativo para $x < 5$ y positivo para $x > 5$. En consecuencia, el cociente será negativo si $-1 < x < 5$. Estos puntos quedan fuera del dominio. Asimismo, el punto $x = 5$ debe ser eliminado porque anula el denominador. Finalmente, el dominio resulta ser

$$Dom(f) = (-\infty, -1] \cup (5, +\infty)$$

   b) Para empezar, observamos que la función tiene dos asíntotas verticales, ya que el denominador tiene dos raíces: $x = 1$ y $x = 2$, que no anulan el numerador.

   En cuanto asíntotas horizontales, no hay, ya que los límites $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ divergen.

   Veamos si hay asíntotas oblicuas:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 + 2x - 1}{x^3 - 3x^2 + 2x} = 2$$

$$n = \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 + 2x - 1}{x^2 - 3x + 2} - 2x =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 + 2x - 1 - (2x^3 - 6x^2 + 4x)}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x^2 - 2x - 1}{x^2 - 3x + 2} = 6$$

   Tenemos por tanto la asíntota $y = 2x + 6$. Si calculamos los límites en $x \to -\infty$ obtenemos la misma asíntota.

   Recapitulando, hemos obtenido dos asíntotas verticales: $x = 1$ y $x = 2$, y una asíntota oblicua: $y = 2x + 6$.

2. El tamaño de una población de bacterias (en miles de individuos) viene dado, en función del tiempo (en minutos) por la siguiente función:

$$P(t) = 1 + te^{-t}$$

   a) Calcula los extremos relativos de esta función en el intervalo $(0, +\infty)$.

   b) Dibuja una gráfica aproximada de la función a partir del instante $t = 0$. Ten en cuenta el punto de partida, el comportamiento a largo plazo y la información obtenida en el apartado anterior.

c) Calcula la tangente a dicha gráfica en el punto $t = 2$ (déjala expresada en función de e^{-2}).

(3 puntos)

a) Primero calculamos la derivada: $P'(t) = (1-t)e^{-t}$. Esta derivada se hace cero en $t = 1$. Además, observamos que $P'(t) > 0$ a la izquierda de $t = 1$ y $P'(t) < 0$ a la derecha. Esto quiere decir que en $t = 1$ hay un máximo relativo. El punto completo es el $p = (1, 1 + e^{-1})$.

b) La población inicial es $P(0) = 1$. El comportamiento a largo plazo viene dado por el límite:

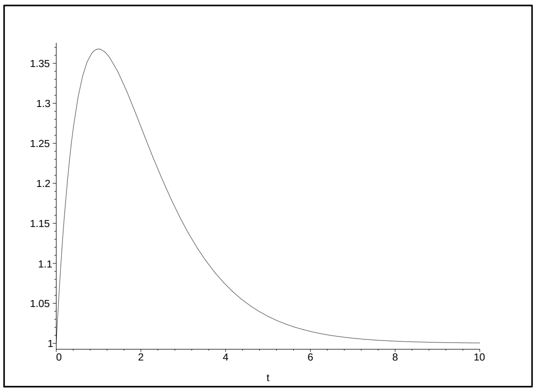
$$\lim_{t\to+\infty} P(t) = 1 + \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^t} = \frac{\infty}{\infty}$$

Aplicando L'Hopital, tenemos que

$$\lim_{t\to+\infty} P(t) = 1 + \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{e^t} = 1 + 0 = 1$$

luego esta función tiene una asíntota horizontal en $y = 1$.

Teniendo en cuenta estos datos y el máximo obtenido en el apartado anterior, la gráfica tendrá el siguiente aspecto:



Obsérvese que el eje vertical está graduado a partir de 1 en adelante.

c) Tenemos que $P(2) = 1 + 2e^{-2}$ y $P'(2) = -e^{-2}$. Entonces, la recta tangente en $x = 2$ será:

$$y - P(2) = P'(2)(x-2)$$

$$y - (1 + 2e^{-2}) = -e^{-2}(x-2)$$

Simplificando, obtenemos:

$$y = 1 + 4e^{-2} - e^{-2}x$$

3. Calcula las siguientes integrales:

$$\text{a)} \int_1^e x \ln x dx \qquad \text{b)} \int_0^1 \frac{(\ln x)^3}{x} dx$$

(3 puntos)

a) Esta integral se puede hacer por partes, mediante el cambio $u = \ln x$ y $dv = xdx$. Entonces tenemos que $du = dx/x$ y $v = x^2/2$. Ahora, la integral indefinida será:

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

De aquí obtenemos la integral definida como:

$$\int_1^e x \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} - \left(0 - \frac{1}{4} \right) = \frac{e^2 + 1}{4}$$

b) Es una integral impropia ya que la función $\frac{(\ln x)^3}{x}$ tiene una asíntota vertical en $x = 0$. Entonces:

$$\int_0^1 \frac{(\ln x)^3}{x} dx = \lim_{a \to 0^+} \int_a^1 \frac{(\ln x)^3}{x} dx$$

Llamando $f = \ln x$ y $f' = 1/x$, tenemos que esta integral se puede expresar como $\int f^3 f' = f^4/4$, luego

$$\int_1^1 \frac{(\ln x)^3}{x} dx = \left[\frac{(\ln x)^4}{4} \right]_a^1 = 0 - \frac{(\ln a)^4}{4}$$

Finalmente,

$$\lim_{a \to 0^+} -\frac{(\ln a)^4}{4} = -\infty$$

luego la integral diverge.

OBSERVACIONES:

- Tiempo: 1 hora y 20 minutos.
- El examen ha de realizarse sin utilizar calculadora.
- No se permite entregar el examen escrito con lápiz ó bolígrafo rojo.