# CALCULO DIFERENCIAL (MATEMATICAS II)

**EXAMEN FINAL SEPTIEMBRE DE 2012**

**PARTE TEORICA**

**1.** Sea $z$ un número complejo no nulo.

(a) (**10 puntos**) Definir el módulo de $z$. ¿Cuando se dice que un ángulo $\Theta$ es un argumento de $z$?

(b) (**10 puntos**) Escribir las expresiones de los módulos y argumentos de las raíces cúbicas de $z$. ¿Qué figura geométrica forman dichas raíces cúbicas?

**2.** (a) (**10 puntos**) Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función real definida en un subconjunto no vacío $X$ de $\mathbb{R}$ y sean $c \in X$, $l \in \mathbb{R}$. Definir: • $\lim_{x \to c} f(x) = l$, • $f$ continua en $c$, • $f$ continua en $X$.

(b) (**10 puntos**) Decir cuales de las siguientes implicaciones son ciertas.

(b.1) $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ continua en $[0,2] \Longrightarrow$ existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [0,2]$.

(b.2) $f : (0,2) \to \mathbb{R}$ continua en $(0,2) \Longrightarrow$ existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in (0,2)$.

(b.3) $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ continua en $[0,2]$ y $f(x) \neq 0$ para todo $x \in [0,2] \Longrightarrow$ o bien $f(x) > 0$ para todo $x \in [0,2]$, o bien $f(x) < 0$ para todo $x \in [0,2]$.

(c) (**10 puntos**) Elegir una implicación falsa y dar un ejemplo que muestre que en efecto dicha implicación no es cierta.

**3.** (**10 puntos**) Sea $f : (2,3) \to \mathbb{R}$ una función indefinidamente derivable en (2.3). Se sabe que $f''$ tiene exactamente dos raíces en $(2,3)$. ¿Cual es el número máximo de raíces que puede tener $f$ en $(2,3)$? Razónese la respuesta.

**4.** Sea $I \subset \mathbb{R}^2$ el producto cartesiano de dos intervalos abiertos en $\mathbb{R}$, sea $f : I \to \mathbb{R}^3$ la función definida por $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y), f_3(x,y))$. Sea $\overline{c} = (a,b) \in I$.

(a) (**10 puntos**) Escribir las definiciones de:

(a.1) Matriz Jacobiana de $f$ en $\overline{c}$.

(a.2) Derivabilidad de $f$ en $\overline{c}$.

(b) (**10 puntos**) Escribir:

(b.1) Una condición suficiente para que $f$ sea derivable en $\overline{c}$.

(b.2) Una relación entre la derivabilidad de $f$ en $\overline{c}$ y la derivabilidad de $f_1, f_2, f_3$ en $\overline{c}$.

## NOTAS.

• La calificación de esta parte teórica será la media aritmética de las calificaciones obtenidas en cada una de las 8 preguntas de la misma.

• La calificación de este examen final será la media aritmética de las calificaciones obtenidas en su parte teórica y en su parte práctica.

**CALCULO DIFERENCIAL (MATEMATICAS II)**

**EXAMEN FINAL SEPTIEMBRE DE 2012**

**PARTE PRACTICA**

**1.** Sea $(a_n)_n$ la sucesión en $\mathbb{R}$ definida por

$$a_n = \frac{2^3 \ln(\cos(5)) + 3^3 \ln(\cos(5/2)) + \ldots + (n+1)^3 \ln(\cos(5/n))}{n^2} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

(a) (**10 puntos**) Calcular $\lim_n a_n$.
(b) (**10 puntos**) ¿Puede ser la serie $\sum_n a_n$ convergente? Razónese la respuesta.

**2.** Sea $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^x - \ln(1+x) & \text{si } -1 < x < 0 \\ \cos x & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

(a) (**10 puntos**) Estudiar los valores de $x$ para los que $f$ es derivable y para los que no es derivable.
(b) (**10 puntos**) Probar que $f(x) > 1$ para todo $x \in (-1, 0)$.
(c) (**10 puntos**) Utilizando el polinomio de Taylor de grado 2 de $f$ en el punto adecuado, calcular un valor aproximado de $\cos(1.01\,\pi)$.

**3.** (**10 puntos**) Estudiar los valores de $x$ para los que converge y para los que diverge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sqrt{n}\, x^n}{(2n+1)(n+5)}.$$

**4.** Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3 y^2)(e^y - 1)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) (**10 puntos**) Estudiar los puntos $(x, y)$ para los que $f$ es continua y para los que no es continua.
(b) (**10 puntos**) Calcular la ecuación del plano tangente a la gráfica de $f$ en el punto $(0, 0)$.

**NOTAS.**

• La calificación de esta parte práctica será la media aritmética de las calificaciones obtenidas en cada una de las 8 preguntas de la misma.

• La calificación de este examen final será la media aritmética de las calificaciones obtenidas en su parte teórica y en su parte práctica.