CALCULO DIFERENCIAL (MATEMATICAS II)

EXAMEN FINAL FEBRERO DE 2013

PARTE TEORICA

1. (**10 puntos**) Sea $z = r\,e^{i\theta}$ un número complejo no nulo. En cada una de las siguientes afirmaciones, sustituir ...... por la expresión que corresponda.

(a) $\overline{z} = r\,e^{\cdots\cdots}$.

(b) $z^4 = r^{\cdots\cdots}\,e^{\cdots\cdots}$.

(c) Todas las raices cúbicas de z tienen como módulo ....

(d) Una raiz cúbica de z es ......

2. (a) (**10 puntos**) Definición de supremo de un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$.

(b) (**10 puntos**) Definición de que una sucesión $(a_n)_n$ en $\mathbb{R}$ converge a un número real a.

(c) (**10 puntos**) Sea $(a_n)_n$ una sucesión estrictamente creciente en $\mathbb{R}$. Decir cuales de las siguientes afirmaciones son ciertas.

(c.1) $\lim_n a_n = \infty$.

(c.2) Si $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado superiormente, entonces $(a_n)_n$ es convergente y su límite es $\sup(A)$.

(c.3) Si $(a_n)_n$ es convergente, entonces A está acotado.

(c.4) Si A no está acotado superiormente, entonces $\lim_n a_n = \infty$.

(d) (**10 puntos**) Elegir una de las afirmaciones en la que la respuesta es negativa y dar un ejemplo que muestre que dicha afirmación en efecto es falsa.

3. (a) (**10 puntos**) Definir el radio de convergencia r de una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n$ y enunciar el resultado que establece los puntos en los que converge y en los que no converge dicha serie.

(b) (**10 puntos**) Se sabe que:

(b.1) $r = 1$.

(b.2) $(a_n)_n$ es estrictamente decreciente y converge a 0.

(b.3) $a_n \geq \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Probar que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n$ converge en el intervalo $[-1, 1)$ y no converge fuera de este intervalo.

4. (**10 puntos**) Sean $F_1, F_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ funciones derivables en $\mathbb{R}^4$ tales que

$$\frac{\partial F_1}{\partial u}(x, y, u, v) = e^u \qquad \frac{\partial F_1}{\partial v}(x, y, u, v) = vy - ux$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial u}(x, y, u, v) = ux - vy \qquad \frac{\partial F_2}{\partial v}(x, y, u, v) = e^v.$$

Probar que las ecuaciones

$$F_1(x, y, u, v) = 0 \qquad F_2(x, y, u, v) = 0$$

definen de manera única u, v como funciones derivables de x, y, cerca de todo punto (x, y, u, v). Enunciar el teorema utilizado en dicha prueba.

NOTAS.

• La calificación de esta parte teórica será la media aritmética de las calificaciones obtenidas en cada una de las 8 preguntas de la misma.

• La calificación de este examen final será la media aritmética de las calificaciones obtenidas en su parte teórica y en su parte práctica.

CALCULO DIFERENCIAL (MATEMATICAS II)

EXAMEN FINAL FEBRERO DE 2013

PARTE PRACTICA

1. (**10 puntos**) Calcular, en caso de existir, el supremo e ínfimo del conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : |x-1| < x+5\}.$$

2. Sea $(a_n)_n$ la sucesión en $\mathbb{R}$ definida por

$$a_n = \frac{\sin(1) + \sin(1/2) + \cdots + \sin(1/n)}{\ln(n+3)}.$$

(a) (**10 puntos**) Calcular el valor de $\lim_n a_n$. Aplicarlo para probar que la serie $\sum_n a_n$ no converge.

(b) (**10 puntos**) Probar que la serie $\sum_n \frac{a_n}{n^3}$ converge.

3. Sea $f : (-\frac{\pi}{2}, \infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tan(x)-\sin(x)}{x} & \text{si } -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ e^x - x - 3 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

(a) (**10 puntos**) Calcular las derivadas laterales de f en $x = 0$. ¿Es f derivable en $x = 0$?

(b) (**10 puntos**) Probar que f tiene exactamente una raíz real en $(1, \infty)$.

Ayuda. Tomar 2.7183 como valor del número e.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función definida por

$$f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y)),$$

siendo

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \frac{(1-\cos(xy))\sin^3(y)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases} \qquad f_2(x,y) = e^{x^2}\sin(y).$$

(a) (**10 puntos**) Estudiar la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.

(b) (**10 puntos**) Calcular la ecuación del plano tangente a la gráfica de f_1 en el punto $(0,0)$.

(c) (**10 puntos**) Utilizando el polinomio de Taylor de grado 2 de f_2 en el punto adecuado, calcular un valor aproximado de $e^{1.21}\sin(1.01\pi)$.

NOTAS.

• La calificación de esta parte práctica será la media aritmética de las calificaciones obtenidas en cada una de las 8 preguntas de la misma.

• La calificación de este examen final será la media aritmética de las calificaciones obtenidas en su parte teórica y en su parte práctica.