# Examen — Solución

## Probabilidades y Estadística II

Graduado/a en Matemáticas e Informática

Martes 4 de Abril de 2016, Tiempo: 110 minutos.

**Instrucciones:**

Realizar cada problema en hojas diferentes y poner nombre, apellidos y $n^0$ de matrícula en todas las hojas.

Se pueden utilizar libros y/o apuntes.

**Problema-1/Tema 1, CMTC**

En un programa de radio participan 3 personas: A, B y C. Tras analizar algunos programas emitidos se puede afirmar:

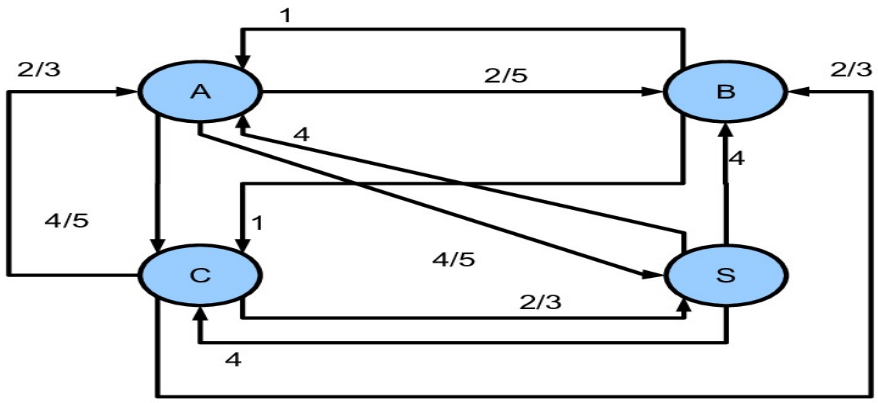
- i El tiempo que toma la palabra cada uno de ellos se distribuye exponencialmente con media 30 seg.
- ii En principio respetan el turno de palabra y no hablan a la vez.
- iii Si A termina de hablar toma la palabra B con probabilidad 1/5 o se produce una pausa (silencio) con probabilidad 2/5.
- iv Si termina B de hablar inmediamente habla A o C con igual probabilidad.
- v Si termina C de hablar, con probabilidad 1/3 se produce una pausa y con probabilidad 1/3 habla A.
- vi Tras una pausa, cuya duración se distribuye exponencialmente con media 5 segundos, habla una de las tres personas con igual probabilidad.

Se pide:

1. Dibujar el diagrama de transición de la cadena de Markov en tiempo continuo que represente el diálogo en el programa de radio.

   Sean los estados {A,B,C,S}, donde $A$ es la persona $A$ habla, analogamente para las personas $B$ y $C$, y $S$ es una pausa en el diálogo.

| $Q$ | A | B | C | S |
|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 2/5 | 4/5 | 4/5 |
| B | 1 | 0 | 1 | 0 |
| C | 2/3 | 2/3 | 0 | 2/3 |
| S | 4 | 4 | 4 | 0 |




2. ¿Cuál de las tres personas habla a largo plazo más tiempo?

$$
\begin{aligned}
2\pi_A &= 1\pi_B + 2/3\pi_C + 4\pi_S \\
2\pi_B &= 2/5\pi_A + 2/3\pi_C + 4\pi_S \\
2\pi_C &= 4/5\pi_A + 1\pi_B + 4\pi_S \\
12\pi_S &= 4/5\pi_A + 2/3\pi_C \\
\pi_A + \pi_B + \pi_C + \pi_S &= 1
\end{aligned}
$$

$C$ habla a largo plazo más tiempo.
$A$: $\sum q_{A,j} = 1 + 2/3 + 4 = 5.667$
$B$: $\sum q_{A,j} = 2/5 + 2/3 + 4 = 5.067$
$C$: $\sum q_{A,j} = 4/5 + 1 + 4 = 5.8$

Los tres tienen igual tasa de permanencia y la suma de tasas de entrada a $C$ es la mayor.

3. Calcular una aproximación lineal de las funciones de probabilidades transición, $P(t)$, dada la condición inicial $p_{i,j}(1\ segundo) = 0.25\ \forall i, j$ (solución de las ecuaciones diferenciales hacia adelante de Kolmogorov).

$$P(t) = e^{tG} + K = I + tG + t^2G^2/2! + \ldots + t^nG^n/n! + \ldots + K \sim I + tG + K$$

$$K = [0.25]_{4,4} - e^G$$

| $G$ | A | B | C | S |
|---|---|---|---|---|
| A | -2 | 2/5 | 4/5 | 4/5 |
| B | 1 | -2 | 1 | 0 |
| C | 2/3 | 2/3 | -2 | 2/3 |
| S | 4 | 4 | 4 | -12 |

$$P(t) =$$

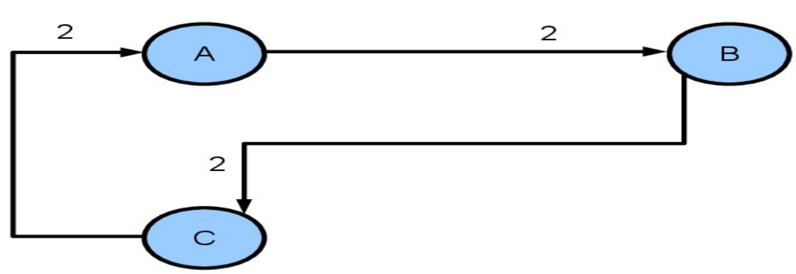
| $p_{ij}(t)$ | A | B | C | S |
|---|---|---|---|---|
| A | 9/4-2t | -3/20 + 2/5t | -11/20 + 4/5t | -11/20 + 4/5t |
| B | -3/4 + t | 9/4-2t | -3/4 + t | 1/4 |
| C | -5/12+2/3t | -5/12+2/3t | 9/4-2t | -5/12+2/3t |
| S | -15/4+4t | -15/4+4t | -15/4+4t | 49/4-12t |

donde

$$P(t)$$

es estocástica

4. Durante una discusión el programa continua, pero ahora: A no responde a B, B no responde a C y C no responde a A, y no se producen pausas, ( $i$ no responde a $j$ si $i$ no toma la palabra al terminar $j$). ¿Cuál es el modelo de la cadena de Markov en tiempo continuo que represente la discusión?, ¿La discusión es un proceso de nacimiento y muerte?, ¿Cuál la probabilidad de que A hable durante más de 5 minutos?



No es un proceso de nacimiento y muerte.

$P(t_A > 5\ min) = e^{(-2*5)} = 4.54e-05$

**Problema-2/Tema 1, CMTC**

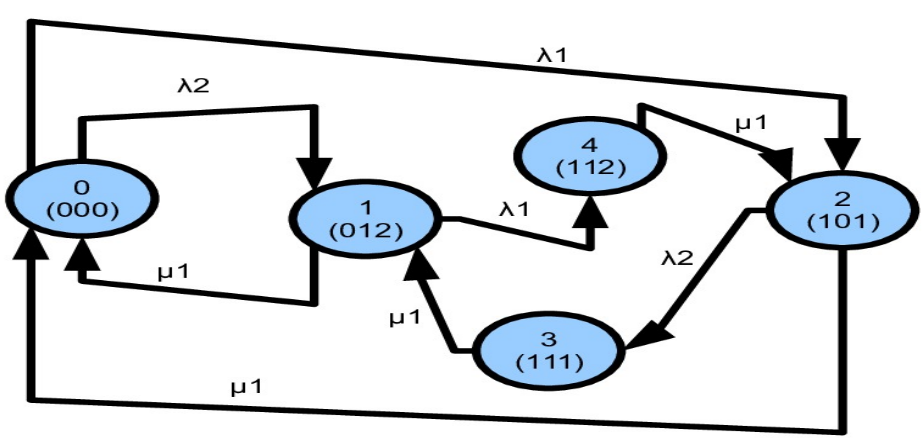
Un padre debe ayudar a sus dos hijos en la tarea que traen del colegio. Cada hijo $h$ trabaja durante durante un tiempo exponencial con tasa $\lambda_h, h = 1, 2$, antes de pedir ayuda. Cuando un hijo pide ayuda el padre le atiende en exclusiva hasta que resuelven la cuestión. Los tiempos de atención para ambos hijos son exponenciales de tasa $\mu_p$. El proceso de interés consiste en conocer la autonomía de cada hijo y la actividad del padre.

1. Construir un modelo para el proceso: definir los estados, dibujar el diagrama de transición de estados del proceso y calcular las tasas $q_{ij}, \forall i, j$ en función de $\lambda_1$, $\lambda_2$ y $\mu_p$.

   Sean los estados {0,1,2,3,4}, donde $H1 = 0$ es el hijo H1 trabaja solo y $H1 = 1$ es el hijo H1 trabaja con ayuda de su padre, analogamente para el hijo H2, $P = 0$ es el padre no está ayudando a ninguno de sus hijos, $P = 1$ es el padre ayuda al hijo H1, $P = 1$ es el padre ayuda al hijo H2.

| | H1 | H2 | P |
|---|---|---|---|
| 0: | 0 | 0 | 0 |
| 1: | 0 | 1 | 2 |
| 2: | 1 | 0 | 1 |
| 3: | 1 | 1 | 1 |
| 4: | 1 | 1 | 2 |

| $Q$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0: | 0 | $\lambda_2$ | $\lambda_1$ | 0 | 0 |
| 1: | $\mu_1$ | 0 | 0 | 0 | $\lambda_1$ |
| 2: | $\mu_1$ | 0 | 0 | $\lambda_2$ | 0 |
| 3: | 0 | $\mu_1$ | 0 | 0 | 0 |
| 4: | 0 | 0 | $\mu_1$ | 0 | 0 |



2. Dados $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ y $\mu_p = 4$, se observa que cuando ambos hijos piden ayuda las proporciones de tiempo a largo plazo que el padre les atiende a cualquiera de los dos son iguales.

   Suponemos las tasas en unidades de peticiones / hora.

   *a*) Calcular el tiempo medio de permanencia en cada estado.

   $v_i = \sum_j q_{i,j}$
   $v_0 = \lambda_1 + \lambda_2 = 5,\ E[t_0] = 1/5,$
   $v_1 = \mu_1 + \lambda_1 = 6,\ E[t_1] = 1/6,$
   $v_2 = \mu_1 + \lambda_2 = 7,\ E[t_2] = 1/7,$
   $v_3 = \mu_1 = 4,\ E[t_3] = 1/4,$
   $v_4 = \mu_1 = 4,\ E[t_4] = 1/4$

   *b*) Calcular las probabilidades de transición entre estados.

   $p_{ij} = q_{ij}/v_i$

| $P$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0: | 0 | 2/5 | 3/5 | 0 | 0 |
| 1: | 4/6 | 0 | 0 | 0 | 2/6 |
| 2: | 4/7 | 0 | 0 | 3/7 | 0 |
| 3: | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 4: | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

   *c*) ¿Cuál es el estado que tiene mayor probabilidad a largo plazo?

$$\begin{aligned} 5\pi_0 &= 4\pi_1 + 4\pi_2 \\ 6\pi_1 &= 3\pi_0 + 4\pi_3 \\ 7\pi_2 &= 2\pi_0 + 4\pi_4 \\ 4\pi_3 &= 3\pi_2 \\ 4\pi_4 &= 2\pi_1 \end{aligned}$$

   $\pi_0 = 1/3, \pi_1 = 1/4, \pi_2 = 1/6, \pi_3 = 1/8, \pi_4 = 1/8.$

   *d*) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos hijos trabajen sin perdir ayuda más de una hora?

   $P(t_0 > 1) = e^{-5*1} = 0.0067$

3. Construir un modelo para un proceso análogo con el padre y la madre y 2 hijos: definir los estados, dibujar el diagrama de transición de estados del proceso y calcular las tasas $q_{0j}, \forall j$ en función de $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\mu_p$ y $\mu_m$.

   Sean los estados {0,1,2,3,4,5,6}, donde $H1 = 0$ es el hijo H1 trabaja solo y $H1 = 1$ es el hijo H1 trabaja con ayuda del padre o la madre, analogamente para el hijo H2, $P = 0$ es el padre no está ayudando a niunguno de los hijos,

$P = 1$ es el padre ayuda al hijo H1, $P = 2$ es el padre ayuda al hijo H2, analogamente para la madre.

| | H1 | H2 | P | M |
|---|---|---|---|---|
| 0: | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1: | 0 | 1 | 2 | 0 |
| 2: | 0 | 0 | 1 | 2 |
| 3: | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 4: | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 5: | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 6: | 1 | 1 | 2 | 1 |

| $Q$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $\lambda_2$ | $\lambda_2$ | $\lambda_1$ | $\lambda_1$ | | |
| 1 | | 0 | | | | | |
| 2 | | | 0 | | | | |
| 3 | | | | 0 | | | |
| 4 | | | | | 0 | | |
| 5 | | | | | | 0 | |
| 6 | | | | | | | 0 |

Considerar el estado 0: ambos hijos trabajan sin pedir ayuda.