Problema examen diciembre 2011. El circuito de la figura 1 representa un generador trifásico equilibrado de tensiones, de 400V de tensión de línea, 50Hz de frecuencia, que alimenta a 2 cargas. La primera es un motor M de 1kW de potencia y $\cos\varphi_M$=0,7. La segunda carga es una carga trifásica equilibrada compuesta en total por 6 lámparas incandescentes de 50W cada una. Las lámparas incandescentes se supone que son resistencias R ideales.

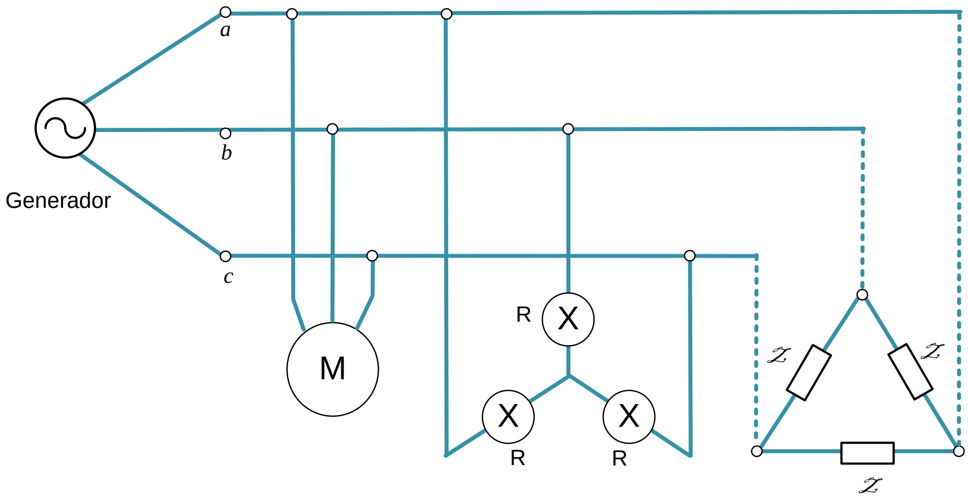

Figura 1.

Se pide:

a) *Obtener la potencia reactiva Q1 consumida por el motor (carga 1).*

Método 1.- Con los datos del motor y la definición de potencia activa, se tiene la potencia aparente:

$$P_1 = S_1 \cdot \cos\varphi_M \; ; \; S_1 = \frac{P_1}{\cos\varphi_M}$$

$$S_1 = \frac{1\text{kW}}{0{,}7} = 1{,}428\text{kVA}$$

Y con la definición de potencia reactiva:

$$Q_1 = S_1 \cdot \text{sen}\varphi_M \; ; \; \varphi_M = \arccos(0{,}7) = 45{,}57^\circ$$

$$\boxed{Q_1 = 1{,}428\text{kVA} \cdot \text{sen}(45{,}57^\circ) = 1{,}02\text{kVAr}}$$

Método 2.- A partir de la potencia aparente obtenida antes y con la definición de potencia activa, reactiva y aparente:

$$S_1^2 = P_1^2 + Q_1^2 \; ; \; Q_1^2 = S_1^2 - P_1^2$$

$$\boxed{Q_1 = \sqrt{1{,}428^2 - 1^2} = 1{,}02\text{kVAr}}$$

Método 3.- Directamente, sustituyendo la potencia reactiva por su valor en función de la potencia activa: $Q_1 = P_1 \cdot \tan\varphi_M$

$$\boxed{Q_1 = 1\text{kW} \cdot \tan(45{,}57^\circ) = 1{,}02\text{kVAr}}$$

b) *Obtener la potencia activa P_2 consumida por las lámparas incandescentes (carga 2).*

Al ser todas las lámparas resistencias ideales, la carga 2 sólo consume potencia activa P_2, por lo tanto su factor de potencia $\cos\varphi_2$=1. El total de potencia consumida por las lámparas resulta:

$$\boxed{P_2 = 6 \cdot 50\text{W} = 300\text{W}}$$

c) *Obtener el factor de potencia de las 2 cargas conjuntamente ($\cos\varphi_C$).*

Método 1.- Conocida la potencia consumida por cada una de las 2 cargas, se obtiene la potencia activa y reactiva total un simple balance de potencias (Teorema de Boucherot). Nótese que la carga 2 sólo consume potencia activa, por lo que la potencia reactiva Q_2 es nula:

$$P_C = P_1 + P_2\,;\; P_C = 1\text{kW} + 0{,}3\text{kW}$$

$$\boxed{P_C = 1{,}3\text{kW}}$$

$$Q_C = Q_1 + Q_2\,;\;\; Q_C = 1{,}02\text{kVAr} + 0\text{kVAr}$$

$$\boxed{Q_C = 1{,}02\text{kVAr}}$$

Y a partir de ahí se obtiene el factor de potencia de toda la carga:

$$\tan\varphi_C = \frac{Q_C}{P_C} = \frac{1{,}02\text{kVAr}}{1{,}3\text{kW}} = 0{,}7846\,; \qquad \varphi_C = \operatorname{atan}\left(\frac{Q_C}{P_C}\right) = \operatorname{atan}(0{,}7846) = 38{,}11^{\circ}$$

$$\boxed{\cos\varphi_C = \cos(38{,}11^{\circ}) = 0{,}78}$$

Método 2.- También se puede obtener a partir de la potencia aparente y de la definición de potencia activa:

$$S_C = \sqrt{P_C^{\,2} + Q_C^{\,2}} = \sqrt{1{,}3^2 + 1{,}02^2} = 1{,}652\text{kVA}\,;\quad P_C = S_C \cdot \cos\varphi_C\,;$$

$$\boxed{\cos\varphi_C = \frac{P_C}{S_C} = 0{,}78}$$

d) *Obtener la intensidad de línea total (módulo y argumento).*

Método 1.- Conocidas las potencias activas y reactivas totales de la carga, la tensión de línea (U_{LC}) y el factor de potencia total de la carga ($\cos\varphi_C$) se puede obtener la intensidad de línea total:

$$P_C = \sqrt{3} \cdot U_{LC} I_{LC} \cdot \cos\varphi_C\,;\quad \varphi_C = 38{,}11^{\circ}\,;\quad U_{LC} = 400\text{V}$$

$$I_{LC} = \frac{P_C}{\sqrt{3} \cdot U_{LC} \cdot \cos\varphi_C} = \frac{1{,}3\text{kW}}{\sqrt{3} \cdot 400\text{V} \cdot 0{,}78} = 2{,}38\text{A}$$

$$\boxed{\mathcal{I}_{LC} = 2{,}38\text{A}\angle -38{,}11^{\circ} = 1{,}87 - j1{,}47\,\text{A}}$$

El signo menos proviene de que la carga total se comporta como una carga con componente inductiva (de la forma $R+jX_L$), al ser la potencia reactiva Q_C positiva, y por tanto la corriente va retrasada respecto de la tensión.

Método2.- También podría obtenerse a partir de la potencia reactiva, de manera análoga a la anterior:

$$Q_C = \sqrt{3} \cdot U_{LC} I_{LC} \cdot \operatorname{sen}\varphi_C \, ; \quad \varphi_C = 38{,}11^{\circ} \, ; \quad U_{LC} = 400\text{V}$$

$$I_{LC} = \frac{Q_C}{\sqrt{3} \cdot U_{LC} \cdot \operatorname{sen}\varphi_C} = \frac{1{,}02\text{kVAr}}{\sqrt{3} \cdot 400\text{V} \cdot 0{,}62} = 2{,}38\text{A}$$

$$\boxed{\mathcal{I}_{LC} = 2{,}38\text{A} \angle -38{,}11^{\circ} = 1{,}87 - j1{,}47\,\text{A}}$$

e) *Obtener la intensidad consumida por el motor (módulo y argumento).*

Método 1.- Conocida, por ejemplo, la potencia activa, la tensión de línea (U_{LC}) que es la que ve el motor y el factor de potencia del motor ($\cos\varphi_M$) se puede obtener la corriente por el motor:

$$P_1 = \sqrt{3} \cdot U_{LC} I_1 \cdot \cos\varphi_M \, ; \quad \varphi_M = 45{,}57^{\circ} \, ; \quad U_{LC} = 400\text{V}$$

$$I_1 = \frac{P_1}{\sqrt{3} \cdot U_{LC} \cdot \cos\varphi_M} = \frac{1\text{kW}}{\sqrt{3} \cdot 400\text{V} \cdot 0{,}7} = 2{,}06\text{A}$$

$$\boxed{\mathcal{I}_1 = 2{,}06\text{A} \angle -45{,}57^{\circ} = 1{,}44 - j1{,}47\,\text{A}}$$

El signo menos proviene de que un motor se comporta como una carga con componente inductiva (de la forma $R+jX_L$), al ser la potencia reactiva Q_1 positiva, y por tanto la intensidad va retrasada respecto de la tensión.

Método 2.- También podría obtenerse a partir de la potencia reactiva, de manera análoga a la anterior:

$$Q_1 = \sqrt{3} \cdot U_{LC} I_1 \cdot \operatorname{sen}\varphi_M \, ; \quad \varphi_M = 45{,}57^{\circ} \, ; \quad U_{LC} = 400\text{V}$$

$$I_1 = \frac{Q_1}{\sqrt{3} \cdot U_{LC} \cdot \operatorname{sen}\varphi_M} = \frac{1{,}02\text{kVAr}}{\sqrt{3} \cdot 400\text{V} \cdot 0{,}71} = 2{,}06\text{A}$$

$$\boxed{\mathcal{I}_1 = 2{,}06\text{A} \angle -45{,}57^{\circ} = 1{,}44 - j1{,}47\,\text{A}}$$

f) *Obtener la intensidad consumida por las lámparas incandescentes (módulo y argumento).*

Las lámparas se comportan como resistencias ideales, por lo que sólo consumen potencia activa. Conocida la potencia activa, la tensión de línea (U_{LC}) que es la que ven las lámparas (puntos a', b', c') y su factor de potencia ($\cos\varphi_2=1$) se puede obtener la corriente por las lámparas:

$$P_2 = \sqrt{3} \cdot U_{LC} I_2 \cdot \cos\varphi_2 \, ; \quad \varphi_2 = 0^{\circ} \, ; \quad U_{LC} = 400\text{V}$$

$$I_2 = \frac{P_2}{\sqrt{3} \cdot U_{LC}} = \frac{300\text{W}}{\sqrt{3} \cdot 400\text{V}} = 0{,}43\text{A}$$

$$\boxed{\mathcal{I}_2 = 0{,}43\text{A} \angle 0^{\circ} = 0{,}43\,\text{A}}$$

g) *Para compensar el factor de potencia de las 3 cargas hasta un valor de cosφ_C=0,9, se conectan unos condensadores en triángulo representados en la figura 2 por $\mathcal{Z}$. Calcula el valor de dichos condensadores.*

Por el apartado *c)* se tiene que el factor de potencia inicial de la carga es cosφ_C=0,78. Se desea un nuevo factor de potencia, cosφ_{Cn}=0,9, mejor que el anterior, añadiendo para ello condensadores, que únicamente modifican la potencia reactiva total a la carga. El nuevo factor de potencia será

$$\tan \varphi_{Cn} = \frac{Q_N}{P_C} = \frac{Q_C + Q_Z}{P_C};$$

$$\varphi_{Cn} = \arccos(0{,}9) = 25{,}84^{\circ};\ \tan \varphi_{Cn} = 0{,}48$$

Donde la potencia reactiva nueva, Q_N, es la suma de la potencia reactiva de la carga existente, Q_C, más la potencia reactiva del banco de condensadores añadir, Q_Z.

Por tanto la potencia reactiva del banco de condensadores a añadir es:

$$Q_Z = P_C \cdot \tan \varphi_{Cn} - Q_C;$$

$$Q_Z = 1{,}3\text{kW} \cdot 0{,}48 - 1{,}02\text{kVAr} = \text{-}396\text{VAr}$$

El signo "-" indica que para conseguir ese factor de potencia se necesitan condensadores, cuya potencia reactiva es negativa, como ya nos indica el enunciado.

La potencia reactiva de un banco trifásico de condensadores es 3 veces la de uno de los condensadores. Dado que se conoce la tensión de línea en la carga y los condensadores están en triángulo, la tensión de línea coincide con la tensión de fase en los condensadores, por la que la potencia reactiva, en función la tensión de línea, resulta:

$$Q_Z = 3 \cdot \left(\frac{U_L^2}{X_C} \right) = 3 \cdot \left(\frac{U_L^2}{-1/\omega C} \right);$$

$$C = \frac{-Q_Z}{3\omega C \cdot U_L^2};\quad C = \frac{396\text{VAr}}{3 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50\text{Hz} \cdot 400^2\text{V}}$$

$$\boxed{C = 2{,}59\mu F}$$