Nombre: .... Apellidos: ....

DNI: .... Grado: ....

EVALUACIÓN CONTINUA O FINAL ....

Examen de Cálculo - Convocatoria ordinaria primer semestre

Grados en Ingeniería EPSE

Universidad Miguel Hernández de Elche - Martes 22 de Enero de 2019

- **INSTRUCCIONES** : Leer atentamente antes de empezar el examen.
- El tiempo disponible es de **3 horas para la EVALUACIÓN CONTINUA** y de **3 horas y 30 minutos para la EVALUACIÓN FINAL**.
- En el examen de teoría y problemas se deben realizar los ejercicios 1 y 2, y dos a elegir entre el 3, el 4 y el 5.
  El examen de prácticas sólo lo harán los que opten por EVALUACIÓN FINAL.
- Para los alumnos que elijan EVALUACIÓN CONTINUA, el examen de teoría y problemas puntúa sobre 7 puntos correspondientes al 70% de la nota final de la asignatura. Los ejercicios 1 y 2 valen 2 puntos y los Ejercicios 3, 4 y 5 valen 1.5 puntos cada uno, siendo igual el valor de los apartados en todos los ejercicios. Para optar a aprobar la asignatura es necesario obtener en este examen al menos 3 puntos de los 7.
- Para los alumnos que elijan EVALUACIÓN FINAL, el examen de teoría y problemas puntúa sobre 8.5 puntos correspondientes al 85% de la nota final de la asignatura. El Ejercicio 1 vale 2 puntos, el Ejercicio 2 vale 2.5 puntos y los Ejercicios 3, 4 y 5 valen 2 puntos cada uno, siendo igual el valor de los apartados en todos los ejercicios.
  El examen de prácticas consta del ejercicio 6 y puntua sobre 1.5 puntos correspondientes al 15% de la nota final de la asignatura.

Examen de teoría y problemas

Ejercicio 1: Tipo test; consta de cinco preguntas tipo test, cada una con tres opciones a elegir. Para cada pregunta hay una única opción correcta. Se debe elegir una única opción. Si la respuesta elegida es correcta suma 0.4 puntos. Si la respuesta es incorrecta resta 0.2 puntos. Las preguntas sin responder no suman ni restan. Un resultado negativo se contará como cero.

Test 1) El límite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos(x))\ln(1+2x)}{2x\sin(3x^2)}$ vale:

☐ $1/6$

☐ 4

☐ $+\infty$

Test 2) El conjunto $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 2x\} \cap \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\geq x\}$ verifica que:

☐ Tiene interior vacío

☐ No tiene puntos adherentes o de acumulación

☐ Es compacto

Test 3) Sea $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dada por $h(x,y) = (2x^2+3y^2, 3y^2-3)$ y sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ una función de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$ tal que su matriz Jacobiana en el punto $(5,0)$ vale $Jf(5,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Se tiene que $J(f\circ h)(1,1)$ vale:

☐ $\begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 20 & 16 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 8 & 18 \\ 20 & 48 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 8 & 20 \\ 12 & 48 \end{pmatrix}$

Test 4) Sabiendo que la ecuación $z^3+2z+e^{x-2y+3z}+x+y^2-\cos(x-y+z)=0$ define a cualquiera de sus variables como función implícita de las otras dos en un entorno de $(x,y,z)=(0,0,0)$, se tiene que:

☐ $\dfrac{\partial x}{\partial y}(0,0)+\dfrac{\partial x}{\partial z}(0,0)=1$

☐ $\dfrac{\partial y}{\partial x}(0,0)+\dfrac{\partial y}{\partial z}(0,0)=5/2$

☐ $\dfrac{\partial z}{\partial x}(0,0)+\dfrac{\partial z}{\partial y}(0,0)=0$

Test 5) La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(n+1)\,n!}{4^n}$ verifica:

☐ Converge absolutamente

☐ No converge o diverge

☐ Converge, pero no absolutamente

Ejercicio 2: Sea Γ la frontera, orientada positivamente, del conjunto D dado por

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 1,\ y \geq 0\right\}.$$

Se pide calcular $\displaystyle\oint_\Gamma x^2 dx + xydy$:

a) Por la definición de integral de línea

b) Por el Teorema de Green

Elegir dos, y sólo dos, de los ejercicios 3, 4 y 5:

Ejercicio 3: Consideremos la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Se pide:

a) Estudiar la continuidad de f en el punto $(0,0)$.

b) Estudiar la existencia de las derivadas direccionales de f en el punto $(0,0)$.

c) Estudiar la diferenciabilidad de f en el punto $(0,0)$.

Ejercicio 4: Hallar los valores máximo y mínimo absolutos de $f(x,y) = xy$ en el conjunto compacto K dado por

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 20,\ y \geq x^2\right\}.$$

Ejercicio 5: Calcular $\displaystyle\iint_D sen\,(x)\ \ d\,(x,y)$, siendo D el conjunto dado por

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq \pi\right\}.$$

Examen de prácticas

El examen de prácticas es el ejercicio 6 y se encuentra en folio aparte. Consta de tres apartados y las puntuaciones se especifican en cada uno. Se proporcionan imágenes capturadas del programa Derive 6 con el que se imparten las clases de prácticas. Con el fin de reducir el tamaño de las figuras, se han utilizado a través de la línea de edición varias funciones de Derive que normalmente se ejecutan a golpe de click en los menús. Aunque son muy intuitivas y seguramente se han visto en clase de prácticas se detallan a continuación:

- La función $GRAD(\varphi(x,y),[x,y])$ devuelve el vector gradiente de la función φ.
- Al hacer $GRAD(GRAD(\varphi(x,y),[x,y]),[x,y])$ se obtiene la matriz Hessiana de la función φ.
- La función $SOLVE([\varphi_1(x,y),\varphi_2(x,y)] = [0,0],[x,y],Real)$ devuelve las soluciones reales del sistema $\left\{\begin{array}{l} \varphi_1(x,y) = 0 \\ \varphi_2(x,y) = 0 \end{array}\right.$
- La función $NSOLVE(\varphi(x) = 0, x)$ devuelve las soluciones de la ecuación $\varphi(x) = 0$ obtenidas de forma numérica.
- La función $APPROX(\alpha)$ proporciona una aproximación decimal de los elementos que definen a α, pudiendo ser α un número real, un vector, una matriz, etc.

Ejercicio 6: Resolver los siguientes tres apartados:

a) (0,3 pts.) Se quieren calcular con el programa Derive las raíces de la función $f(x) = x^3 + \ln x - e^x$ cuya gráfica se encuentra en la Figura 1. En la Figura 2 encontramos el cuadro de diálogo que aparece con la opción *Resolver, Expresión* y se ha comprobado que seleccionando las opciones *Numérico, Real* sólo se obtiene la raíz más pequeña. Completa sobre el cuado de diálogo de la Figura 2 las opciones (que no són únicas) para que Derive proporcione la raíz más grande.

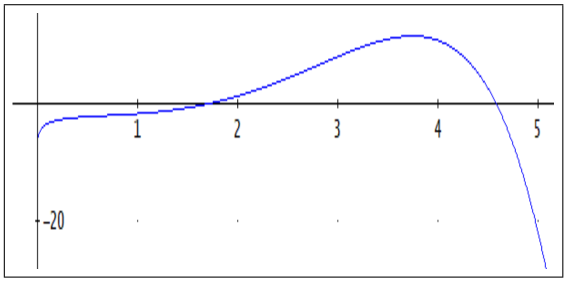


Figura 1

Figura 2

b) Dada la función $f(x,y) = x^3y + xy^2 + 2x$ se han realizado con Derive los cálculos y las gráficas que se encuentran en la Figura 3. Contesta a las siguientes preguntas:

(0,2 pts.) Los puntos críticos de f son $\Big(\qquad , \qquad \Big)$ y $\Big(\qquad , \qquad \Big)$.

(0,3 pts.) En el primero de ellos f presenta un ________________ y en el segundo un ________________

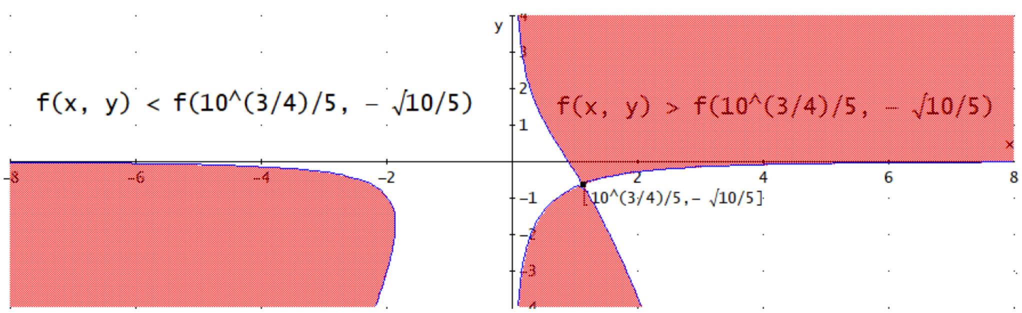
(indíquese máximo relativo, mínimo relativo, punto de silla).

#1: $f(x, y) := x^3 \cdot y + x \cdot y^2 + 2 \cdot x$

#2: $\text{GRAD}(f(x, y), [x, y]) = \left[3 \cdot x^2 \cdot y + y^2 + 2,\ x^3 + 2 \cdot x \cdot y\right]$

#3: $\text{SOLVE}\left(\left[3 \cdot x^2 \cdot y + y^2 + 2,\ x^3 + 2 \cdot x \cdot y\right] = [0, 0], [x, y], \text{Real}\right)$

#4: $\left[x = \dfrac{10^{3/4}}{5} \wedge y = -\dfrac{\sqrt{10}}{5},\ x = -\dfrac{10^{3/4}}{5} \wedge y = -\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right]$



#5: $\text{GRAD}(\text{GRAD}(f(x, y), [x, y]), [x, y]) = \begin{bmatrix} 6 \cdot x \cdot y & 3 \cdot x^2 + 2 \cdot y \\ 3 \cdot x^2 + 2 \cdot y & 2 \cdot x \end{bmatrix}$

#6: $H(x, y) := \begin{bmatrix} 6 \cdot x \cdot y & 3 \cdot x^2 + 2 \cdot y \\ 3 \cdot x^2 + 2 \cdot y & 2 \cdot x \end{bmatrix}$

#7: $H\left(-\dfrac{10^{3/4}}{5}, -\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{12 \cdot 10^{1/4}}{5} & \dfrac{4 \cdot \sqrt{10}}{5} \\ \dfrac{4 \cdot \sqrt{10}}{5} & -\dfrac{2 \cdot 10^{3/4}}{5} \end{bmatrix}$

#8: $\text{DET}\left(H\left(-\dfrac{10^{3/4}}{5}, -\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)\right) = -16$

Figura 3

c) Se quieren calcular los extremos absolutos de la función $f(x,y) = x^2y^2 - 6x + y + 10$ en el conjunto $K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(x^2 - 4x - y\right)\left(x^2 - 2x - y\right) \leq 0, y \leq 0\right\}$ cuya gráfica se encuentra en la figura Figura 4. Denotamos $S1 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\right\}$, $S2 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 - 2x\right\}$ y $S3 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 - 4x\right\}$. Se han realizado unos cálculos con Derive que se encuentran en la Figura 5. Se pide hallar:

a) (0,1 pts) Los puntos críticos de f en $int\,(K)$:

b) (0,1 pts) Los vértices de K:

b) (0,1 pts) Los puntos en $S1 \cap K$ candidatos a que f alcance en K sus extremos absolutos salvo los vértices de K:

c) (0,1 pts) Los puntos en $S2 \cap K$ candidatos a que f alcance en K sus extremos absolutos salvo los vértices de K:

d) (0,1 pts) Los puntos en $S3 \cap K$ candidatos a que f alcance en K sus extremos absolutos salvo los vértices de K:

f) (0,1 pts) El mínimo absoluto de f en K es ____________ y se alcanza en $\Big(\qquad , \qquad \Big)$

g) (0,1 pts) El máximo absoluto de f en K es ____________ y se alcanza en $\Big(\qquad , \qquad \Big)$

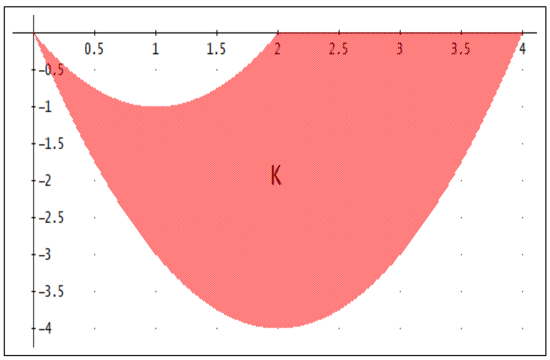


Figura 4

```
#1:   f(x, y) := x^2·y^2 - 6·x + y + 10

#2:   APPROX(SOLVE(GRAD(f(x, y), [x, y]) = [0, 0], [x, y], Real))

#3:   x = 0.4367902323 ∧ y = -2.620741394

#4:   NSOLVE((d/dx)^1 f(x, 0) = 0, x)

#5:   false

#6:   NSOLVE((d/dx)^1 f(x, x^2 - 2·x) = 0, x, Real)

#7:   x = 2.091664064

#8:   APPROX(SUBST(x^2 - 2·x, x, 2.091664064)) = 0.1917304286

#9:   NSOLVE((d/dx)^1 f(x, x^2 - 4·x) = 0, x, Real)

#10:  x = 0.5923605185 ∨ x = 4.003868645 ∨ x = 2.635102189

#11:  APPROX(SUBST(x^2 - 4·x, x, 0.5923605185)) = -2.01855109

#12:  APPROX(SUBST(x^2 - 4·x, x, 4.003868645)) = 0.01548954641

#13:  APPROX(SUBST(x^2 - 4·x, x, 2.635102189)) = -3.596645209

#14:  APPROX [ f(0.4367902323, -2.620741394) ]   [ 6.068887908 ]
             [ f(2.091664064, 0.1917304286)  ]   [ -2.197424364 ]
             [ f(0.5923605185, -2.01855109)  ]   [ 5.857008132 ]
             [ f(4.003868645, 0.01548954641) ] = [ -14.00387607 ]
             [ f(2.635102189, -3.596645209)  ]   [ 80.41627226 ]
             [ f(0, 0)                       ]   [ 10 ]
             [ f(2, 0)                       ]   [ -2 ]
             [ f(4, 0)                       ]   [ -14 ]
```

Figura 5

Nombre: .... Apellidos: ....

DNI: .... Grado: ....

EVALUACIÓN CONTINUA O FINAL ....

Examen de Cálculo - Convocatoria ordinaria primer semestre

Grados en Ingeniería EPSE

Universidad Miguel Hernández de Elche - Martes 22 de Enero de 2019

- **INSTRUCCIONES** : Leer atentamente antes de empezar el examen.
- El tiempo disponible es de **3 horas para la EVALUACIÓN CONTINUA** y de **3 horas y 30 minutos para la EVALUACIÓN FINAL**.
- En el examen de teoría y problemas se deben realizar los ejercicios 1 y 2, y dos a elegir entre el 3, el 4 y el 5.
  El examen de prácticas sólo lo harán los que opten por EVALUACIÓN FINAL.
- Para los alumnos que elijan EVALUACIÓN CONTINUA, el examen de teoría y problemas puntúa sobre 7 puntos correspondientes al 70% de la nota final de la asignatura. Los ejercicios 1 y 2 valen 2 puntos y los Ejercicios 3, 4 y 5 valen 1.5 puntos cada uno, siendo igual el valor de los apartados en todos los ejercicios. Para optar a aprobar la asignatura es necesario obtener en este examen al menos 3 puntos de los 7.
- Para los alumnos que elijan EVALUACIÓN FINAL, el examen de teoría y problemas puntúa sobre 8.5 puntos correspondientes al 85% de la nota final de la asignatura. El Ejercicio 1 vale 2 puntos, el Ejercicio 2 vale 2.5 puntos y los Ejercicios 3, 4 y 5 valen 2 puntos cada uno, siendo igual el valor de los apartados en todos los ejercicios.
  El examen de prácticas consta del ejercicio 6 y puntua sobre 1.5 puntos correspondientes al 15% de la nota final de la asignatura.

Examen de teoría y problemas

Ejercicio 1: Tipo test; consta de cinco preguntas tipo test, cada una con tres opciones a elegir. Para cada pregunta hay una única opción correcta. Se debe elegir una única opción. Si la respuesta elegida es correcta suma 0.4 puntos. Si la respuesta es incorrecta resta 0.2 puntos. Las preguntas sin responder no suman ni restan. Un resultado negativo se contará como cero.

Test 1) La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)}{4^n\ n!}$ verifica:

☐ Converge absolutamente

☐ Converge, pero no absolutamente

☐ No converge o diverge

Test 2) El límite $\lim_{x\to 0} \frac{x^2\,(e^x-1)\sin x}{(1-\cos x)^2}$ vale:

☐ $+\infty$

☐ 4

☐ $1/2$

Test 3) El conjunto $A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1\right\} \cap \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 2y\right\}$ verifica que:

☐ Tiene frontera vacía

☐ No es compacto

☐ Es conexo

Test 4) Sea $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dada por $h\,(x,y) = \left(3x^2-2y^2, y^2-3xy\right)$ y sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ una función de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$ tal que su matriz Jacobiana en el punto $(1,-2)$ vale $Jf\,(1,-2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Se tiene que $J\,(f\circ h)\,(1,1)$ vale:

☐ $\begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 21 & -23 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 9 & -9 \\ 21 & -23 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 9 & -9 \\ 21 & 23 \end{pmatrix}$

Test 5) Sabiendo que la ecuación $z^3+2z+e^{x-2y+3z}+x+y^2-\cos(x-y+z)=0$ define a cualquiera de sus variables como función implícita de las otras dos en un entorno de $(x,y,z)=(0,0,0)$, se tiene que:

☐ $\frac{\partial x}{\partial y}(0,0) + 2\frac{\partial x}{\partial z}(0,0) = -4$

☐ $\frac{\partial y}{\partial x}(0,0) + 2\frac{\partial y}{\partial z}(0,0) = 5$

☐ $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) + 2\frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = 2$

Ejercicio 2: Sea Γ la frontera, orientada positivamente, del conjunto D dado por

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 1,\ y \geq 0\right\}.$$

Se pide calcular $\oint_\Gamma x^2 dx + xy dy$:

a) Por la definición de integral de línea

b) Por el Teorema de Green

Elegir dos, y sólo dos, de los ejercicios 3, 4 y 5:

Ejercicio 3: Consideremos la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Se pide:

a) Estudiar la continuidad de f en el punto $(0,0)$.

b) Estudiar la existencia de las derivadas direccionales de f en el punto $(0,0)$.

c) Estudiar la diferenciabilidad de f en el punto $(0,0)$.

Ejercicio 4: Hallar los valores máximo y mínimo absolutos de $f(x,y) = xy$ en el conjunto compacto K dado por

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 20,\ y \geq x^2\right\}.$$

Ejercicio 5: Calcular $\iint_D sen\,(x)\ \ d(x,y)$, siendo D el conjunto dado por

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq \pi\right\}.$$

Examen de prácticas

El examen de prácticas es el ejercicio 6 y se encuentra en folio aparte. Consta de tres apartados y las puntuaciones se especifican en cada uno. Se proporcionan imágenes capturadas del programa Derive 6 con el que se imparten las clases de prácticas. Con el fin de reducir el tamaño de las figuras, se han utilizado a través de la línea de edición varias funciones de Derive que normalmente se ejecutan a golpe de click en los menús. Aunque son muy intuitivas y seguramente se han visto en clase de prácticas se detallan a continuación:

- La función $GRAD(\varphi(x,y),[x,y])$ devuelve el vector gradiente de la función φ.
- Al hacer $GRAD(GRAD(\varphi(x,y),[x,y]),[x,y])$ se obtiene la matriz Hessiana de la función φ.
- La función $SOLVE([\varphi_1(x,y),\varphi_2(x,y)] = [0,0],[x,y],Real)$ devuelve las soluciones reales del sistema $\begin{cases} \varphi_1(x,y) = 0 \\ \varphi_2(x,y) = 0 \end{cases}$
- La función $NSOLVE(\varphi(x) = 0, x)$ devuelve las soluciones de la ecuación $\varphi(x) = 0$ obtenidas de forma numérica.
- La función $APPROX(\alpha)$ proporciona una aproximación decimal de los elementos que definen a α, pudiendo ser α un número real, un vector, una matriz, etc.

Ejercicio 6: Resolver los siguientes tres apartados:

a) (0,3 pts.) Se quieren calcular con el programa Derive las raíces de la función $f(x) = x^3 + \ln x - e^x$ cuya gráfica se encuentra en la Figura 1. En la Figura 2 encontramos el cuadro de diálogo que aparece con la opción *Resolver, Expresión* y se ha comprobado que seleccionando las opciones *Numérico, Real* sólo se obtiene la raíz más pequeña. Completa sobre el cuado de diálogo de la Figura 2 las opciones (que no són únicas) para que Derive proporcione la raíz más grande.

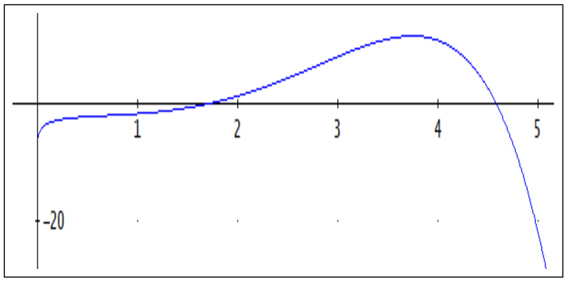


Figura 1

Figura 2

b) Dada la función $f(x, y) = x^3y + xy^2 + 2x$ se han realizado con Derive los cálculos y las gráficas que se encuentran en la Figura 3. Contesta a las siguientes preguntas:

(0,2 pts.) Los puntos críticos de f son $\left(\qquad , \qquad \right)$ y $\left(\qquad , \qquad \right)$.

(0,3 pts.) En el primero de ellos f presenta un ________________ y en el segundo un ________________

(indíquese máximo relativo, mínimo relativo, punto de silla).

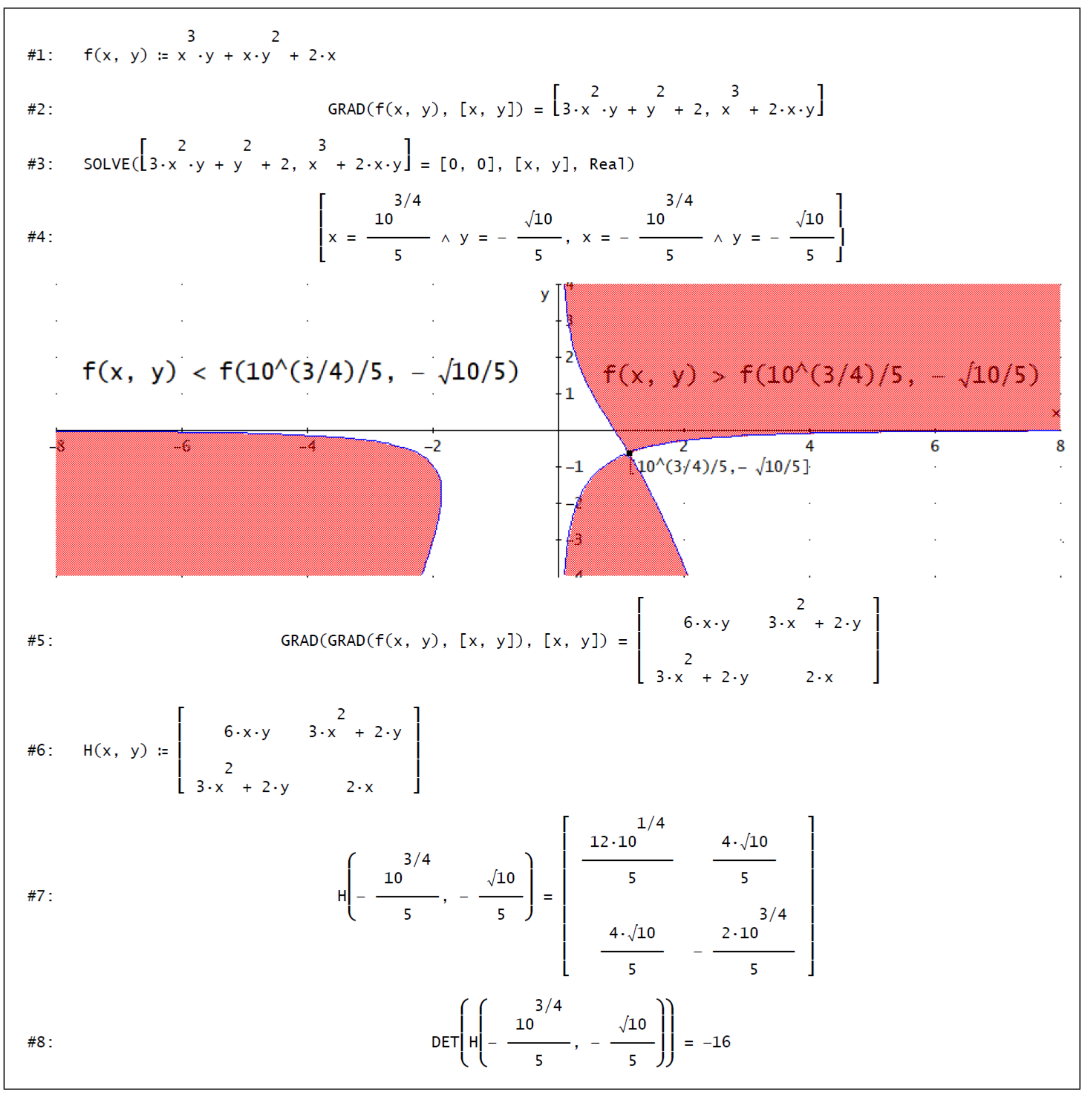


Figura 3

c) Se quieren calcular los extremos absolutos de la función $f(x,y) = x^2y^2 - 6x + y + 10$ en el conjunto $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2-4x-y)(x^2-2x-y) \leq 0, y \leq 0\}$ cuya gráfica se encuentra en la figura Figura 4. Denotamos $S1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$, $S2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 - 2x\}$ y $S3 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 - 4x\}$. Se han realizado unos cálculos con Derive que se encuentran en la Figura 5. Se pide hallar:

a) (0,1 pts) Los puntos críticos de f en $int\,(K)$:

b) (0,1 pts) Los vértices de K:

b) (0,1 pts) Los puntos en $S1 \cap K$ candidatos a que f alcance en K sus extremos absolutos salvo los vértices de K:

c) (0,1 pts) Los puntos en $S2 \cap K$ candidatos a que f alcance en K sus extremos absolutos salvo los vértices de K:

d) (0,1 pts) Los puntos en $S3 \cap K$ candidatos a que f alcance en K sus extremos absolutos salvo los vértices de K:

f) (0,1 pts) El mínimo absoluto de f en K es __________ y se alcanza en $\big(\quad , \quad \big)$

g) (0,1 pts) El máximo absoluto de f en K es __________ y se alcanza en $\big(\quad , \quad \big)$

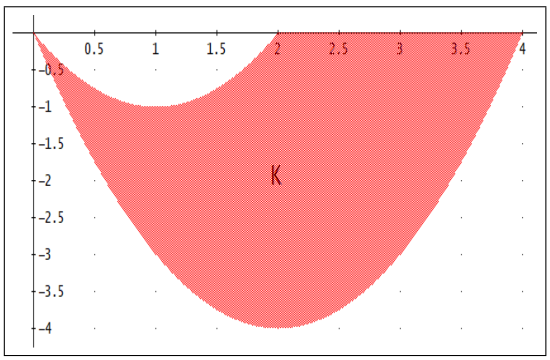


Figura 4

```
#1:   f(x, y) := x^2·y^2 - 6·x + y + 10

#2:   APPROX(SOLVE(GRAD(f(x, y), [x, y]) = [0, 0], [x, y], Real))

#3:   x = 0.4367902323 ∧ y = -2.620741394

#4:   NSOLVE((d/dx)^1 f(x, 0) = 0, x)

#5:   false

#6:   NSOLVE((d/dx)^1 f(x, x^2 - 2·x) = 0, x, Real)

#7:   x = 2.091664064

#8:   APPROX(SUBST(x^2 - 2·x, x, 2.091664064)) = 0.1917304286

#9:   NSOLVE((d/dx)^1 f(x, x^2 - 4·x) = 0, x, Real)

#10:  x = 0.5923605185 ∨ x = 4.003868645 ∨ x = 2.635102189

#11:  APPROX(SUBST(x^2 - 4·x, x, 0.5923605185)) = -2.01855109

#12:  APPROX(SUBST(x^2 - 4·x, x, 4.003868645)) = 0.01548954641

#13:  APPROX(SUBST(x^2 - 4·x, x, 2.635102189)) = -3.596645209
```

$$\#14:\quad \text{APPROX}\begin{bmatrix} f(0.4367902323, -2.620741394) \\ f(2.091664064, 0.1917304286) \\ f(0.5923605185, -2.01855109) \\ f(4.003868645, 0.01548954641) \\ f(2.635102189, -3.596645209) \\ f(0, 0) \\ f(2, 0) \\ f(4, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.068887908 \\ -2.197424364 \\ 5.857008132 \\ -14.00387607 \\ 80.41627226 \\ 10 \\ -2 \\ -14 \end{bmatrix}$$

Figura 5

Nombre: .... Apellidos: ....

DNI: .... Grado: ....

EVALUACIÓN CONTINUA O FINAL ....

Examen de Cálculo - Convocatoria ordinaria primer semestre

Grados en Ingeniería EPSE

Universidad Miguel Hernández de Elche - Martes 22 de Enero de 2019

- **INSTRUCCIONES** : Leer atentamente antes de empezar el examen.
- El tiempo disponible es de **3 horas para la EVALUACIÓN CONTINUA** y de **3 horas y 30 minutos para la EVALUACIÓN FINAL**.
- En el examen de teoría y problemas se deben realizar los ejercicios 1 y 2, y dos a elegir entre el 3, el 4 y el 5.
  El examen de prácticas sólo lo harán los que opten por EVALUACIÓN FINAL.
- Para los alumnos que elijan EVALUACIÓN CONTINUA, el examen de teoría y problemas puntúa sobre 7 puntos correspondientes al 70% de la nota final de la asignatura. Los ejercicios 1 y 2 valen 2 puntos y los Ejercicios 3, 4 y 5 valen 1.5 puntos cada uno, siendo igual el valor de los apartados en todos los ejercicios. Para optar a aprobar la asignatura es necesario obtener en este examen al menos 3 puntos de los 7.
- Para los alumnos que elijan EVALUACIÓN FINAL, el examen de teoría y problemas puntúa sobre 8.5 puntos correspondientes al 85% de la nota final de la asignatura. El Ejercicio 1 vale 2 puntos, el Ejercicio 2 vale 2.5 puntos y los Ejercicios 3, 4 y 5 valen 2 puntos cada uno, siendo igual el valor de los apartados en todos los ejercicios.
  El examen de prácticas consta del ejercicio 6 y puntua sobre 1.5 puntos correspondientes al 15% de la nota final de la asignatura.

Examen de teoría y problemas

Ejercicio 1: Tipo test; consta de cinco preguntas tipo test, cada una con tres opciones a elegir. Para cada pregunta hay una única opción correcta. Se debe elegir una única opción. Si la respuesta elegida es correcta suma 0.4 puntos. Si la respuesta es incorrecta resta 0.2 puntos. Las preguntas sin responder no suman ni restan. Un resultado negativo se contará como cero.

Test 1) Sabiendo que la ecuación $z^3+2z+e^{x-2y+3z}+x+y^2-\cos(x-y+z)=0$ define a cualquiera de sus variables como función implícita de las otras dos en un entorno de $(x,y,z)=(0,0,0)$, se tiene que:

☐ $\dfrac{\partial x}{\partial y}(0,0)+5\dfrac{\partial x}{\partial z}(0,0)=3/2$

☐ $\dfrac{\partial y}{\partial x}(0,0)+5\dfrac{\partial y}{\partial z}(0,0)=27/2$

☐ $\dfrac{\partial z}{\partial x}(0,0)+5\dfrac{\partial z}{\partial y}(0,0)=5/2$

Test 2) La serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n!}{(n+1)\,4^n}$ verifica:

☐ Converge, pero no absolutamente

☐ Converge absolutamente

☐ No converge o diverge

Test 3) El límite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(1-\cos(3x))}{x\tan(x/4)}$ vale:

☐ 4

☐ 18

☐ $+\infty$

Test 4) El conjunto $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\geq 2y\right\}\cap\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y<x\right\}$ verifica que:

☐ Es conexo

☐ Es acotado

☐ No tiene puntos de acumulación

Test 5) Sea $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dada por $h(x,y)=\left(3x^2+y^2,2y^2-3x^2\right)$ y sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ una función de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$ tal que su matriz Jacobiana en el punto $(4,-1)$ vale $Jf(4,-1)=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}$. Se tiene que $J(f\circ h)(1,1)$ vale:

☐ $\begin{pmatrix}6&8\\12&24\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}6&8\\12&22\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}6&16\\12&22\end{pmatrix}$

Ejercicio 2: Sea Γ la frontera, orientada positivamente, del conjunto D dado por

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 1,\ y \geq 0\right\}.$$

Se pide calcular $\oint_{\Gamma} x^2 dx + xy dy$:

a) Por la definición de integral de línea

b) Por el Teorema de Green

Elegir dos, y sólo dos, de los ejercicios 3, 4 y 5:

Ejercicio 3: Consideremos la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) := \begin{cases} \dfrac{x^2 y^2}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Se pide:

a) Estudiar la continuidad de f en el punto $(0, 0)$.

b) Estudiar la existencia de las derivadas direccionales de f en el punto $(0, 0)$.

c) Estudiar la diferenciabilidad de f en el punto $(0, 0)$.

Ejercicio 4: Hallar los valores máximo y mínimo absolutos de $f(x, y) = xy$ en el conjunto compacto K dado por

$$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 20,\ y \geq x^2\right\}.$$

Ejercicio 5: Calcular $\iint_D sen(x)\ d(x, y)$, siendo D el conjunto dado por

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq \pi\right\}.$$

Examen de prácticas

El examen de prácticas es el ejercicio 6 y se encuentra en folio aparte. Consta de tres apartados y las puntuaciones se especifican en cada uno. Se proporcionan imágenes capturadas del programa Derive 6 con el que se imparten las clases de prácticas. Con el fin de reducir el tamaño de las figuras, se han utilizado a través de la línea de edición varias funciones de Derive que normalmente se ejecutan a golpe de click en los menús. Aunque son muy intuitivas y seguramente se han visto en clase de prácticas se detallan a continuación:

- La función $GRAD(\varphi(x, y), [x, y])$ devuelve el vector gradiente de la función φ.
- Al hacer $GRAD(GRAD(\varphi(x, y), [x, y]), [x, y])$ se obtiene la matriz Hessiana de la función φ.
- La función $SOLVE([\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)] = [0, 0], [x, y], Real)$ devuelve las soluciones reales del sistema $\begin{cases} \varphi_1(x, y) = 0 \\ \varphi_2(x, y) = 0 \end{cases}$
- La función $NSOLVE(\varphi(x) = 0, x)$ devuelve las soluciones de la ecuación $\varphi(x) = 0$ obtenidas de forma numérica.
- La función $APPROX(\alpha)$ proporciona una aproximación decimal de los elementos que definen a α, pudiendo ser α un número real, un vector, una matriz, etc.

Ejercicio 6: Resolver los siguientes tres apartados:

a) (0,3 pts.) Se quieren calcular con el programa Derive las raíces de la función $f(x) = x^3 + \ln x - e^x$ cuya gráfica se encuentra en la Figura 1. En la Figura 2 encontramos el cuadro de diálogo que aparece con la opción *Resolver, Expresión* y se ha comprobado que seleccionando las opciones *Numérico, Real* sólo se obtiene la raíz más pequeña. Completa sobre el cuado de diálogo de la Figura 2 las opciones (que no són únicas) para que Derive proporcione la raíz más grande.

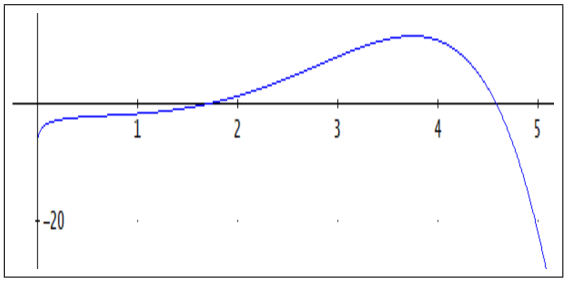


Figura 1

Figura 2

b) Dada la función $f(x, y) = x^3y + xy^2 + 2x$ se han realizado con Derive los cálculos y las gráficas que se encuentran en la Figura 3. Contesta a las siguientes preguntas:

(0,2 pts.) Los puntos críticos de f son $\Big(\qquad , \qquad \Big)$ y $\Big(\qquad , \qquad \Big)$.

(0,3 pts.) En el primero de ellos f presenta un ________________ y en el segundo un ________________

(indíquese máximo relativo, mínimo relativo, punto de silla).

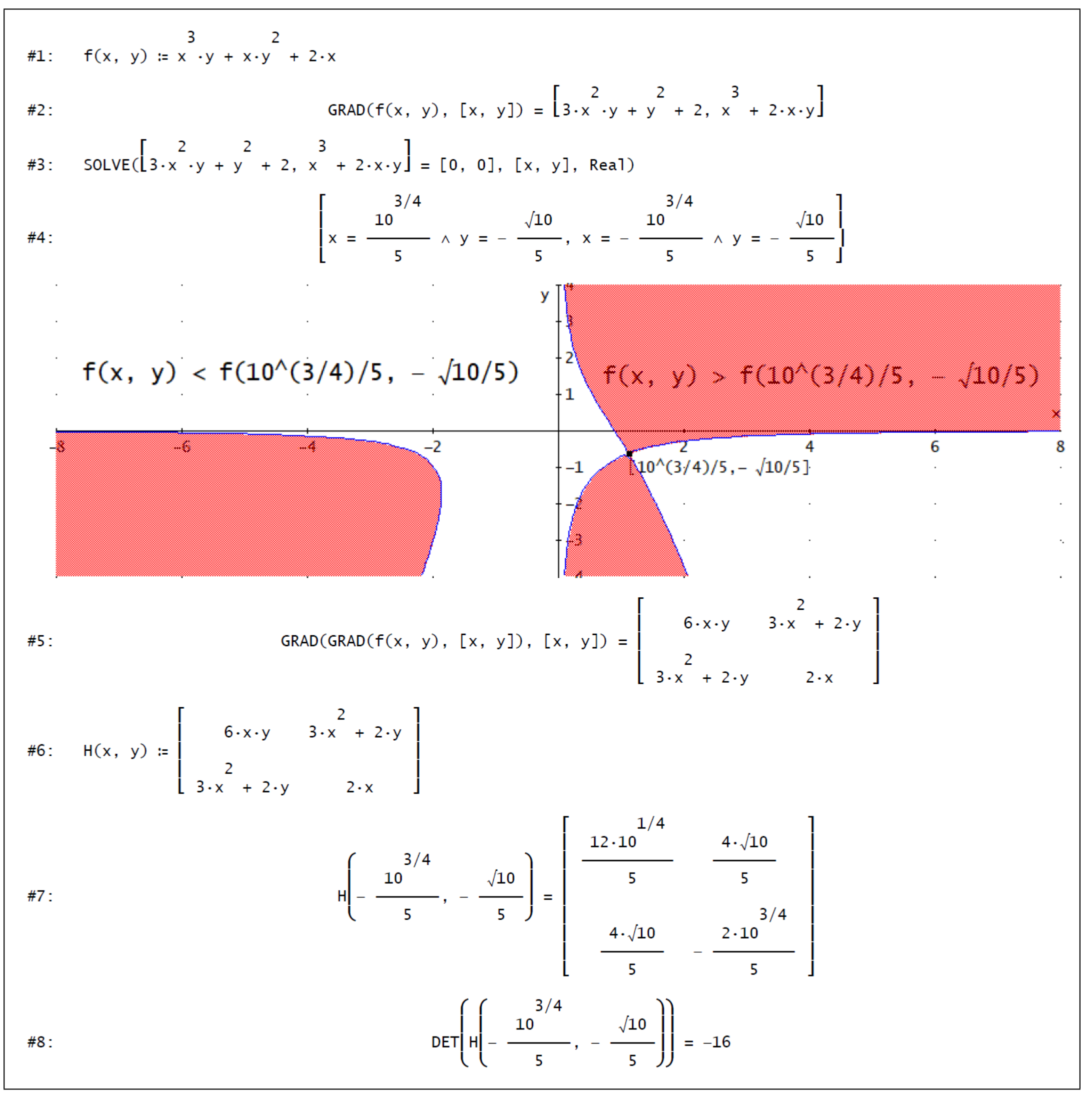


Figura 3

c) Se quieren calcular los extremos absolutos de la función $f(x,y) = x^2y^2 - 6x + y + 10$ en el conjunto $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2-4x-y)(x^2-2x-y) \leq 0, y \leq 0\}$ cuya gráfica se encuentra en la figura Figura 4. Denotamos $S1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$, $S2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 - 2x\}$ y $S3 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 - 4x\}$. Se han realizado unos cálculos con Derive que se encuentran en la Figura 5. Se pide hallar:

a) (0,1 pts) Los puntos críticos de f en $int\,(K)$:

b) (0,1 pts) Los vértices de K:

b) (0,1 pts) Los puntos en $S1 \cap K$ candidatos a que f alcance en K sus extremos absolutos salvo los vértices de K:

c) (0,1 pts) Los puntos en $S2 \cap K$ candidatos a que f alcance en K sus extremos absolutos salvo los vértices de K:

d) (0,1 pts) Los puntos en $S3 \cap K$ candidatos a que f alcance en K sus extremos absolutos salvo los vértices de K:

f) (0,1 pts) El mínimo absoluto de f en K es ____________ y se alcanza en $\left(\quad , \quad \right)$

g) (0,1 pts) El máximo absoluto de f en K es ____________ y se alcanza en $\left(\quad , \quad \right)$

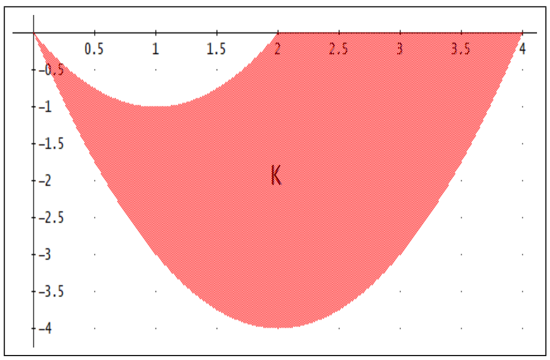


Figura 4

```
#1:   f(x, y) := x^2·y^2 - 6·x + y + 10

#2:   APPROX(SOLVE(GRAD(f(x, y), [x, y]) = [0, 0], [x, y], Real))

#3:   x = 0.4367902323 ∧ y = -2.620741394

#4:   NSOLVE((d/dx)^1 f(x, 0) = 0, x)

#5:   false

#6:   NSOLVE((d/dx)^1 f(x, x^2 - 2·x) = 0, x, Real)

#7:   x = 2.091664064

#8:   APPROX(SUBST(x^2 - 2·x, x, 2.091664064)) = 0.1917304286

#9:   NSOLVE((d/dx)^1 f(x, x^2 - 4·x) = 0, x, Real)

#10:  x = 0.5923605185 ∨ x = 4.003868645 ∨ x = 2.635102189

#11:  APPROX(SUBST(x^2 - 4·x, x, 0.5923605185)) = -2.01855109

#12:  APPROX(SUBST(x^2 - 4·x, x, 4.003868645)) = 0.01548954641

#13:  APPROX(SUBST(x^2 - 4·x, x, 2.635102189)) = -3.596645209

#14:  APPROX [ f(0.4367902323, -2.620741394) ]   [  6.068887908 ]
             [ f(2.091664064, 0.1917304286)  ]   [ -2.197424364 ]
             [ f(0.5923605185, -2.01855109)  ]   [  5.857008132 ]
             [ f(4.003868645, 0.01548954641) ] = [ -14.00387607 ]
             [ f(2.635102189, -3.596645209)  ]   [  80.41627226 ]
             [ f(0, 0)                       ]   [  10          ]
             [ f(2, 0)                       ]   [ -2           ]
             [ f(4, 0)                       ]   [ -14          ]
```

Figura 5

Nombre: .... Apellidos: ....

DNI: .... Grado: ....

EVALUACIÓN CONTINUA O FINAL ....

Examen de Cálculo - Convocatoria ordinaria primer semestre

Grados en Ingeniería EPSE

Universidad Miguel Hernández de Elche - Martes 22 de Enero de 2019

- **INSTRUCCIONES** : Leer atentamente antes de empezar el examen.
- El tiempo disponible es de **3 horas para la EVALUACIÓN CONTINUA** y de **3 horas y 30 minutos para la EVALUACIÓN FINAL**.
- En el examen de teoría y problemas se deben realizar los ejercicios 1 y 2, y dos a elegir entre el 3, el 4 y el 5.
  El examen de prácticas sólo lo harán los que opten por EVALUACIÓN FINAL.
- Para los alumnos que elijan EVALUACIÓN CONTINUA, el examen de teoría y problemas puntúa sobre 7 puntos correspondientes al 70% de la nota final de la asignatura. Los ejercicios 1 y 2 valen 2 puntos y los Ejercicios 3, 4 y 5 valen 1.5 puntos cada uno, siendo igual el valor de los apartados en todos los ejercicios. Para optar a aprobar la asignatura es necesario obtener en este examen al menos 3 puntos de los 7.
- Para los alumnos que elijan EVALUACIÓN FINAL, el examen de teoría y problemas puntúa sobre 8.5 puntos correspondientes al 85% de la nota final de la asignatura. El Ejercicio 1 vale 2 puntos, el Ejercicio 2 vale 2.5 puntos y los Ejercicios 3, 4 y 5 valen 2 puntos cada uno, siendo igual el valor de los apartados en todos los ejercicios.
  El examen de prácticas consta del ejercicio 6 y puntua sobre 1.5 puntos correspondientes al 15% de la nota final de la asignatura.

Examen de teoría y problemas

Ejercicio 1: Tipo test; consta de cinco preguntas tipo test, cada una con tres opciones a elegir. Para cada pregunta hay una única opción correcta. Se debe elegir una única opción. Si la respuesta elegida es correcta suma 0.4 puntos. Si la respuesta es incorrecta resta 0.2 puntos. Las preguntas sin responder no suman ni restan. Un resultado negativo se contará como cero.

Test 1) Sea $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dada por $h(x,y)=\left(x^2-y^2,3x^2-3y^2\right)$ y sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ una función de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$ tal que su matriz Jacobiana en el punto $(0,0)$ vale $Jf(0,0)=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}$. Se tiene que $J(f\circ h)(1,1)$ vale:

☐ $\begin{pmatrix}10&-2\\28&8\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}10&-2\\26&-28\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}10&-10\\28&-28\end{pmatrix}$

Test 2) Sabiendo que la ecuación $z^3+2z+e^{x-2y+3z}+x+y^2-\cos(x-y+z)=0$ define a cualquiera de sus variables como función implícita de las otras dos en un entorno de $(x,y,z)=(0,0,0)$, se tiene que:

☐ $5\dfrac{\partial x}{\partial y}(0,0)+\dfrac{\partial x}{\partial z}(0,0)=5/2$

☐ $5\dfrac{\partial y}{\partial x}(0,0)+\dfrac{\partial y}{\partial z}(0,0)=13/2$

☐ $5\dfrac{\partial z}{\partial x}(0,0)+\dfrac{\partial z}{\partial y}(0,0)=8/5$

Test 3) La serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{4^n}{(n+1)\,n!}$ verifica:

☐ Converge, pero no absolutamente

☐ No converge o diverge

☐ Converge absolutamente

Test 4) El límite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1)\sin x}{1-\cos(x^2)}$ vale:

☐ $+\infty$

☐ 2

☐ 0

Test 5) El conjunto $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\right\}\cap\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\geq x\right\}$ verifica que:

☐ No es conexo

☐ Tiene interior vacío

☐ No es acotado

Ejercicio 2: Sea Γ la frontera, orientada positivamente, del conjunto D dado por

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 1,\ y \geq 0\right\}.$$

Se pide calcular $\oint_\Gamma x^2dx + xydy$:

a) Por la definición de integral de línea

b) Por el Teorema de Green

Elegir dos, y sólo dos, de los ejercicios 3, 4 y 5:

Ejercicio 3: Consideremos la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Se pide:

a) Estudiar la continuidad de f en el punto $(0,0)$.

b) Estudiar la existencia de las derivadas direccionales de f en el punto $(0,0)$.

c) Estudiar la diferenciabilidad de f en el punto $(0,0)$.

Ejercicio 4: Hallar los valores máximo y mínimo absolutos de $f(x,y) = xy$ en el conjunto compacto K dado por

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 20,\ y \geq x^2\right\}.$$

Ejercicio 5: Calcular $\iint_D sen(x)\ \ d(x,y)$, siendo D el conjunto dado por

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq \pi\right\}.$$

Examen de prácticas

El examen de prácticas es el ejercicio 6 y se encuentra en folio aparte. Consta de tres apartados y las puntuaciones se especifican en cada uno. Se proporcionan imágenes capturadas del programa Derive 6 con el que se imparten las clases de prácticas. Con el fin de reducir el tamaño de las figuras, se han utilizado a través de la línea de edición varias funciones de Derive que normalmente se ejecutan a golpe de click en los menús. Aunque son muy intuitivas y seguramente se han visto en clase de prácticas se detallan a continuación:

- La función $GRAD(\varphi(x,y),[x,y])$ devuelve el vector gradiente de la función φ.
- Al hacer $GRAD(GRAD(\varphi(x,y),[x,y]),[x,y])$ se obtiene la matriz Hessiana de la función φ.
- La función $SOLVE([\varphi_1(x,y),\varphi_2(x,y)] = [0,0],[x,y],Real)$ devuelve las soluciones reales del sistema $\begin{cases} \varphi_1(x,y) = 0 \\ \varphi_2(x,y) = 0 \end{cases}$
- La función $NSOLVE(\varphi(x) = 0, x)$ devuelve las soluciones de la ecuación $\varphi(x) = 0$ obtenidas de forma numérica.
- La función $APPROX(\alpha)$ proporciona una aproximación decimal de los elementos que definen a α, pudiendo ser α un número real, un vector, una matriz, etc.

Ejercicio 6: Resolver los siguientes tres apartados:

a) (0,3 pts.) Se quieren calcular con el programa Derive las raíces de la función $f(x) = x^3 + \ln x - e^x$ cuya gráfica se encuentra en la Figura 1. En la Figura 2 encontramos el cuadro de diálogo que aparece con la opción *Resolver, Expresión* y se ha comprobado que seleccionando las opciones *Numérico, Real* sólo se obtiene la raíz más pequeña. Completa sobre el cuado de diálogo de la Figura 2 las opciones (que no són únicas) para que Derive proporcione la raíz más grande.

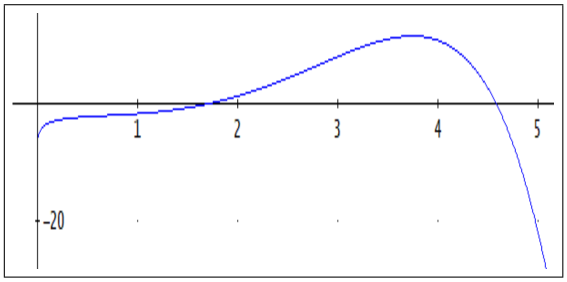


Figura 1

Figura 2

b) Dada la función $f(x, y) = x^3y + xy^2 + 2x$ se han realizado con Derive los cálculos y las gráficas que se encuentran en la Figura 3. Contesta a las siguientes preguntas:

(0,2 pts.) Los puntos críticos de f son $\Big(\qquad , \qquad \Big)$ y $\Big(\qquad , \qquad \Big)$.

(0,3 pts.) En el primero de ellos f presenta un ________________ y en el segundo un ________________

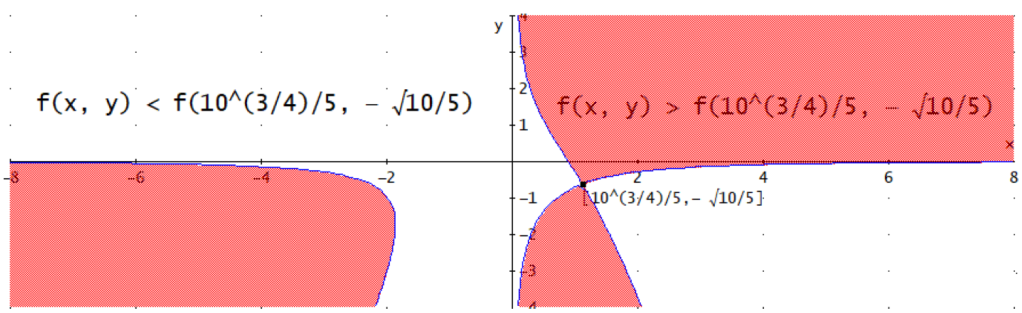
(indíquese máximo relativo, mínimo relativo, punto de silla).

#1: $f(x, y) := x^3\cdot y + x\cdot y^2 + 2\cdot x$

#2: $\mathrm{GRAD}(f(x, y), [x, y]) = \left[3\cdot x^2\cdot y + y^2 + 2,\ x^3 + 2\cdot x\cdot y\right]$

#3: $\mathrm{SOLVE}\left(\left[3\cdot x^2\cdot y + y^2 + 2,\ x^3 + 2\cdot x\cdot y\right] = [0, 0], [x, y], \mathrm{Real}\right)$

#4: $\left[x = \dfrac{10^{3/4}}{5} \wedge y = -\dfrac{\sqrt{10}}{5},\ x = -\dfrac{10^{3/4}}{5} \wedge y = -\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right]$



#5: $\mathrm{GRAD}(\mathrm{GRAD}(f(x, y), [x, y]), [x, y]) = \begin{bmatrix} 6\cdot x\cdot y & 3\cdot x^2 + 2\cdot y \\ 3\cdot x^2 + 2\cdot y & 2\cdot x \end{bmatrix}$

#6: $H(x, y) := \begin{bmatrix} 6\cdot x\cdot y & 3\cdot x^2 + 2\cdot y \\ 3\cdot x^2 + 2\cdot y & 2\cdot x \end{bmatrix}$

#7: $H\left(-\dfrac{10^{3/4}}{5}, -\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{12\cdot 10^{1/4}}{5} & \dfrac{4\cdot\sqrt{10}}{5} \\ \dfrac{4\cdot\sqrt{10}}{5} & -\dfrac{2\cdot 10^{3/4}}{5} \end{bmatrix}$

#8: $\mathrm{DET}\left(H\left(-\dfrac{10^{3/4}}{5}, -\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)\right) = -16$

Figura 3

c) Se quieren calcular los extremos absolutos de la función $f(x,y) = x^2y^2 - 6x + y + 10$ en el conjunto $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2-4x-y)(x^2-2x-y) \leq 0, y \leq 0\}$ cuya gráfica se encuentra en la figura Figura 4. Denotamos $S1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$, $S2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 - 2x\}$ y $S3 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 - 4x\}$. Se han realizado unos cálculos con Derive que se encuentran en la Figura 5. Se pide hallar:

a) (0,1 pts) Los puntos críticos de f en $int\,(K)$:

b) (0,1 pts) Los vértices de K:

b) (0,1 pts) Los puntos en $S1 \cap K$ candidatos a que f alcance en K sus extremos absolutos salvo los vértices de K:

c) (0,1 pts) Los puntos en $S2 \cap K$ candidatos a que f alcance en K sus extremos absolutos salvo los vértices de K:

d) (0,1 pts) Los puntos en $S3 \cap K$ candidatos a que f alcance en K sus extremos absolutos salvo los vértices de K:

f) (0,1 pts) El mínimo absoluto de f en K es ____________ y se alcanza en $\Big(\qquad , \qquad \Big)$

g) (0,1 pts) El máximo absoluto de f en K es ____________ y se alcanza en $\Big(\qquad , \qquad \Big)$

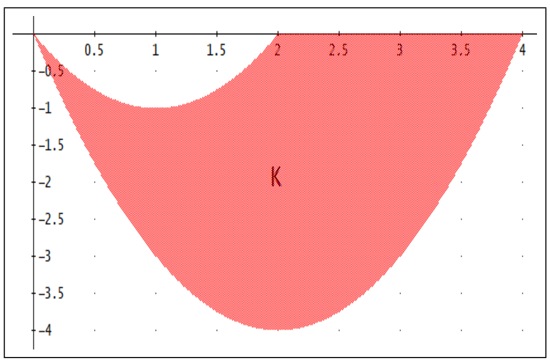


Figura 4

```
#1:   f(x, y) := x²·y² - 6·x + y + 10

#2:   APPROX(SOLVE(GRAD(f(x, y), [x, y]) = [0, 0], [x, y], Real))

#3:   x = 0.4367902323 ∧ y = -2.620741394

#4:   NSOLVE((d/dx)¹ f(x, 0) = 0, x)

#5:   false

#6:   NSOLVE((d/dx)¹ f(x, x² - 2·x) = 0, x, Real)

#7:   x = 2.091664064

#8:   APPROX(SUBST(x² - 2·x, x, 2.091664064)) = 0.1917304286

#9:   NSOLVE((d/dx)¹ f(x, x² - 4·x) = 0, x, Real)

#10:  x = 0.5923605185 ∨ x = 4.003868645 ∨ x = 2.635102189

#11:  APPROX(SUBST(x² - 4·x, x, 0.5923605185)) = -2.01855109

#12:  APPROX(SUBST(x² - 4·x, x, 4.003868645)) = 0.01548954641

#13:  APPROX(SUBST(x² - 4·x, x, 2.635102189)) = -3.596645209

#14:  APPROX [ f(0.4367902323, -2.620741394) ]   [ 6.068887908  ]
             [ f(2.091664064, 0.1917304286)  ]   [ -2.197424364 ]
             [ f(0.5923605185, -2.01855109)  ]   [ 5.857008132  ]
             [ f(4.003868645, 0.01548954641) ] = [ -14.00387607 ]
             [ f(2.635102189, -3.596645209)  ]   [ 80.41627226  ]
             [ f(0, 0)                       ]   [ 10           ]
             [ f(2, 0)                       ]   [ -2           ]
             [ f(4, 0)                       ]   [ -14          ]
```

Figura 5

Nombre: .... Apellidos: ....

DNI: .... Grado: ....

EVALUACIÓN CONTINUA O FINAL ....

Examen de Cálculo - Convocatoria ordinaria primer semestre

Grados en Ingeniería EPSE

Universidad Miguel Hernández de Elche - Martes 22 de Enero de 2019

- **INSTRUCCIONES** : Leer atentamente antes de empezar el examen.
- El tiempo disponible es de **3 horas para la EVALUACIÓN CONTINUA** y de **3 horas y 30 minutos para la EVALUACIÓN FINAL**.
- En el examen de teoría y problemas se deben realizar los ejercicios 1 y 2, y dos a elegir entre el 3, el 4 y el 5.
  El examen de prácticas sólo lo harán los que opten por EVALUACIÓN FINAL.
- Para los alumnos que elijan EVALUACIÓN CONTINUA, el examen de teoría y problemas puntúa sobre 7 puntos correspondientes al 70% de la nota final de la asignatura. Los ejercicios 1 y 2 valen 2 puntos y los Ejercicios 3, 4 y 5 valen 1.5 puntos cada uno, siendo igual el valor de los apartados en todos los ejercicios. Para optar a aprobar la asignatura es necesario obtener en este examen al menos 3 puntos de los 7.
- Para los alumnos que elijan EVALUACIÓN FINAL, el examen de teoría y problemas puntúa sobre 8.5 puntos correspondientes al 85% de la nota final de la asignatura. El Ejercicio 1 vale 2 puntos, el Ejercicio 2 vale 2.5 puntos y los Ejercicios 3, 4 y 5 valen 2 puntos cada uno, siendo igual el valor de los apartados en todos los ejercicios.
  El examen de prácticas consta del ejercicio 6 y puntua sobre 1.5 puntos correspondientes al 15% de la nota final de la asignatura.

Examen de teoría y problemas

Ejercicio 1: Tipo test; consta de cinco preguntas tipo test, cada una con tres opciones a elegir. Para cada pregunta hay una única opción correcta. Se debe elegir una única opción. Si la respuesta elegida es correcta suma 0.4 puntos. Si la respuesta es incorrecta resta 0.2 puntos. Las preguntas sin responder no suman ni restan. Un resultado negativo se contará como cero.

Test 1) El conjunto $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\right\} \cap \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\right\}$ verifica que:

☐ Es compacto

☐ No es conexo

☐ No es acotado

Test 2) Sea $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $h(x,y) = \left(7xy, x^2-2y^2\right)$ y sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$ tal que su matriz Jacobiana en el punto $(7,-1)$ vale $Jf(7,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Se tiene que $J(f \circ h)(1,1)$ vale:

☐ $\begin{pmatrix} 16 & 10 \\ 41 & 23 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 16 & 10 \\ 41 & 24 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 16 & 11 \\ 41 & 23 \end{pmatrix}$

Test 3) Sabiendo que la ecuación $z^3 + 2z + e^{x-2y+3z} + x + y^2 - \cos(x-y+z) = 0$ define a cualquiera de sus variables como función implícita de las otras dos en un entorno de $(x,y,z) = (0,0,0)$, se tiene que:

☐ $2\dfrac{\partial x}{\partial y}(0,0) + \dfrac{\partial x}{\partial z}(0,0) = 1/2$

☐ $2\dfrac{\partial y}{\partial x}(0,0) + \dfrac{\partial y}{\partial z}(0,0) = 7/2$

☐ $2\dfrac{\partial z}{\partial x}(0,0) + \dfrac{\partial z}{\partial y}(0,0) = -2/5$

Test 4) La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n 4^n}{(n+1)\, n!}$ verifica:

☐ Converge, pero no absolutamente

☐ Converge absolutamente

☐ No converge o diverge

Test 5) El límite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(2\sin x)^3}{(1-\cos(3x))\ln(1+x)}$ vale:

☐ 1/9

☐ 16/9

☐ 0

Ejercicio 2: Sea Γ la frontera, orientada positivamente, del conjunto D dado por

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 1,\ y \geq 0\right\}.$$

Se pide calcular $\oint_\Gamma x^2 dx + xydy$:

a) Por la definición de integral de línea

b) Por el Teorema de Green

Elegir dos, y sólo dos, de los ejercicios 3, 4 y 5:

Ejercicio 3: Consideremos la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) := \begin{cases} \dfrac{x^2 y^2}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Se pide:

a) Estudiar la continuidad de f en el punto $(0, 0)$.

b) Estudiar la existencia de las derivadas direccionales de f en el punto $(0, 0)$.

c) Estudiar la diferenciabilidad de f en el punto $(0, 0)$.

Ejercicio 4: Hallar los valores máximo y mínimo absolutos de $f(x, y) = xy$ en el conjunto compacto K dado por

$$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 20,\ y \geq x^2\right\}.$$

Ejercicio 5: Calcular $\iint_D sen(x)\ d(x, y)$, siendo D el conjunto dado por

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq \pi\right\}.$$

Examen de prácticas

El examen de prácticas es el ejercicio 6 y se encuentra en folio aparte. Consta de tres apartados y las puntuaciones se especifican en cada uno. Se proporcionan imágenes capturadas del programa Derive 6 con el que se imparten las clases de prácticas. Con el fin de reducir el tamaño de las figuras, se han utilizado a través de la línea de edición varias funciones de Derive que normalmente se ejecutan a golpe de click en los menús. Aunque son muy intuitivas y seguramente se han visto en clase de prácticas se detallan a continuación:

- La función $GRAD(\varphi(x, y), [x, y])$ devuelve el vector gradiente de la función φ.
- Al hacer $GRAD(GRAD(\varphi(x, y), [x, y]), [x, y])$ se obtiene la matriz Hessiana de la función φ.
- La función $SOLVE([\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)] = [0, 0], [x, y], Real)$ devuelve las soluciones reales del sistema $\begin{cases} \varphi_1(x, y) = 0 \\ \varphi_2(x, y) = 0 \end{cases}$
- La función $NSOLVE(\varphi(x) = 0, x)$ devuelve las soluciones de la ecuación $\varphi(x) = 0$ obtenidas de forma numérica.
- La función $APPROX(\alpha)$ proporciona una aproximación decimal de los elementos que definen a α, pudiendo ser α un número real, un vector, una matriz, etc.

Ejercicio 6: Resolver los siguientes tres apartados:

a) (0,3 pts.) Se quieren calcular con el programa Derive las raíces de la función $f(x) = x^3 + \ln x - e^x$ cuya gráfica se encuentra en la Figura 1. En la Figura 2 encontramos el cuadro de diálogo que aparece con la opción *Resolver, Expresión* y se ha comprobado que seleccionando las opciones *Numérico, Real* sólo se obtiene la raíz más pequeña. Completa sobre el cuado de diálogo de la Figura 2 las opciones (que no són únicas) para que Derive proporcione la raíz más grande.

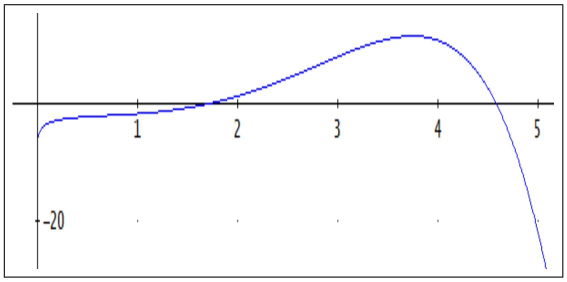


Figura 1

Figura 2

b) Dada la función $f(x,y) = x^3y + xy^2 + 2x$ se han realizado con Derive los cálculos y las gráficas que se encuentran en la Figura 3. Contesta a las siguientes preguntas:

(0,2 pts.) Los puntos críticos de f son $\Big(\qquad , \qquad \Big)$ y $\Big(\qquad , \qquad \Big)$.

(0,3 pts.) En el primero de ellos f presenta un ________________ y en el segundo un ________________

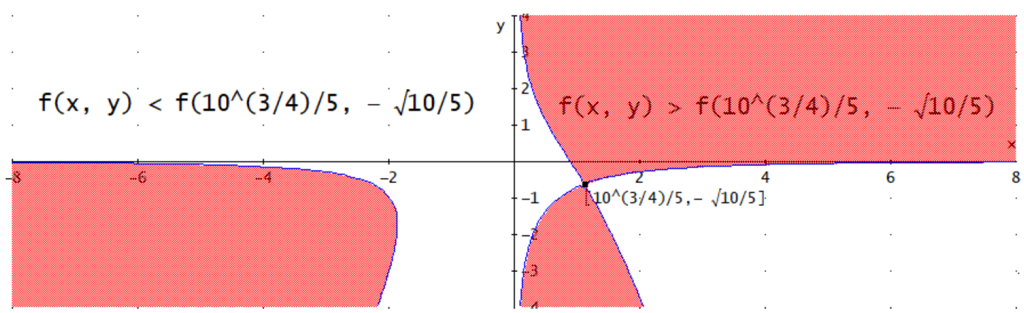
(indíquese máximo relativo, mínimo relativo, punto de silla).

#1: $f(x, y) := x^3 \cdot y + x \cdot y^2 + 2 \cdot x$

#2: $\text{GRAD}(f(x, y), [x, y]) = [3 \cdot x^2 \cdot y + y^2 + 2,\ x^3 + 2 \cdot x \cdot y]$

#3: $\text{SOLVE}([3 \cdot x^2 \cdot y + y^2 + 2,\ x^3 + 2 \cdot x \cdot y] = [0, 0], [x, y], \text{Real})$

#4: $\left[x = \frac{10^{3/4}}{5} \wedge y = -\frac{\sqrt{10}}{5},\ x = -\frac{10^{3/4}}{5} \wedge y = -\frac{\sqrt{10}}{5}\right]$



#5: $\text{GRAD}(\text{GRAD}(f(x, y), [x, y]), [x, y]) = \begin{bmatrix} 6 \cdot x \cdot y & 3 \cdot x^2 + 2 \cdot y \\ 3 \cdot x^2 + 2 \cdot y & 2 \cdot x \end{bmatrix}$

#6: $H(x, y) := \begin{bmatrix} 6 \cdot x \cdot y & 3 \cdot x^2 + 2 \cdot y \\ 3 \cdot x^2 + 2 \cdot y & 2 \cdot x \end{bmatrix}$

#7: $H\left(-\frac{10^{3/4}}{5}, -\frac{\sqrt{10}}{5}\right) = \begin{bmatrix} \frac{12 \cdot 10^{1/4}}{5} & \frac{4 \cdot \sqrt{10}}{5} \\ \frac{4 \cdot \sqrt{10}}{5} & -\frac{2 \cdot 10^{3/4}}{5} \end{bmatrix}$

#8: $\text{DET}\left(H\left(-\frac{10^{3/4}}{5}, -\frac{\sqrt{10}}{5}\right)\right) = -16$

Figura 3

c) Se quieren calcular los extremos absolutos de la función $f(x,y) = x^2y^2 - 6x + y + 10$ en el conjunto $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 - 4x - y)(x^2 - 2x - y) \le 0, y \le 0\}$ cuya gráfica se encuentra en la figura Figura 4. Denotamos $S1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$, $S2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 - 2x\}$ y $S3 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 - 4x\}$. Se han realizado unos cálculos con Derive que se encuentran en la Figura 5. Se pide hallar:

- **a)** (0,1 pts) Los puntos críticos de f en $int\,(K)$:
- **b)** (0,1 pts) Los vértices de K:
- **b)** (0,1 pts) Los puntos en $S1 \cap K$ candidatos a que f alcance en K sus extremos absolutos salvo los vértices de K:

- **c)** (0,1 pts) Los puntos en $S2 \cap K$ candidatos a que f alcance en K sus extremos absolutos salvo los vértices de K:

- **d)** (0,1 pts) Los puntos en $S3 \cap K$ candidatos a que f alcance en K sus extremos absolutos salvo los vértices de K:

- **f)** (0,1 pts) El mínimo absoluto de f en K es __________ y se alcanza en $\big(\quad , \quad \big)$
- **g)** (0,1 pts) El máximo absoluto de f en K es __________ y se alcanza en $\big(\quad , \quad \big)$

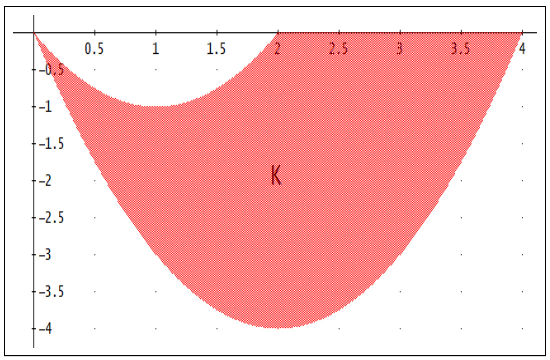


Figura 4

```
#1:   f(x, y) := x^2·y^2 - 6·x + y + 10

#2:   APPROX(SOLVE(GRAD(f(x, y), [x, y]) = [0, 0], [x, y], Real))

#3:   x = 0.4367902323 ∧ y = -2.620741394

#4:   NSOLVE((d/dx)^1 f(x, 0) = 0, x)

#5:   false

#6:   NSOLVE((d/dx)^1 f(x, x^2 - 2·x) = 0, x, Real)

#7:   x = 2.091664064

#8:   APPROX(SUBST(x^2 - 2·x, x, 2.091664064)) = 0.1917304286

#9:   NSOLVE((d/dx)^1 f(x, x^2 - 4·x) = 0, x, Real)

#10:  x = 0.5923605185 ∨ x = 4.003868645 ∨ x = 2.635102189

#11:  APPROX(SUBST(x^2 - 4·x, x, 0.5923605185)) = -2.01855109

#12:  APPROX(SUBST(x^2 - 4·x, x, 4.003868645)) = 0.01548954641

#13:  APPROX(SUBST(x^2 - 4·x, x, 2.635102189)) = -3.596645209

#14:  APPROX [ f(0.4367902323, -2.620741394)  ]   [ 6.068887908  ]
             [ f(2.091664064, 0.1917304286)   ]   [ -2.197424364 ]
             [ f(0.5923605185, -2.01855109)   ]   [ 5.857008132  ]
             [ f(4.003868645, 0.01548954641)  ] = [ -14.00387607 ]
             [ f(2.635102189, -3.596645209)   ]   [ 80.41627226  ]
             [ f(0, 0)                        ]   [ 10           ]
             [ f(2, 0)                        ]   [ -2           ]
             [ f(4, 0)                        ]   [ -14          ]
```

Figura 5