ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

Hoja 7. Espacios afines III

1. Demuestra que el baricentro de los tres vértices de un triángulo es el punto donde se cortan las medianas (rectas que unen un vértice con el punto medio del lado opuesto).

2. Determina ecuaciones implícitas de las variedades lineales $L_t = p_t + V$ de $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$, donde $p_t = (1, -2, 3, t)$ y $V = \langle \vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3} \rangle$ con $\vec{u_1} = (1, 1, 0, 0)$, $\vec{u_2} = (0, 0, 1, 1)$ y $\vec{u_3} = (1, 2, -1, 0)$ en un sistema de referencia fijado $\mathcal{R} = \{O; \vec{e_1}, \ldots, \vec{e_4}\}$. ¿Para qué valor de t pasa L_t por el punto O?

3. En $\mathbb{A}^3$, consideramos los puntos

$$A = (1, 1, 0),\ B = (2, 0, 2),\ C = (1, 2, \alpha),\ D = (3, 4, -1),$$

$$A' = (2, 1, 0),\ B' = (2, 2, 1),\ C' = (1, 1, 0),\ D' = (3, 0, 0),$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. Halla los valores de α para los que existe una aplicación afín $f\colon \mathbb{A}^3 \to \mathbb{A}^3$ tal que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$ y $f(D) = D'$.

4. Sean L_1 y L_2 dos rectas que se cruzan en $\mathbb{R}^3$. Determina el lugar geométrico de las imágenes de un punto dado $p \in \mathbb{R}^3$, por todas las afinidades que tienen a L_1 como recta de puntos fijos y que dejan a L_2 invariante (es decir, $f(L_2) \subset L_2$).

5. Sea A un espacio afín de dimensión 1 sobre un cuerpo K. Clasifica las afinidades de A. Si $K = \mathbb{F}_3$, da una lista de todas las afinidades de A.

6. Sea A un espacio afín de dimensión 2 sobre un cuerpo K. Clasifica las afinidades de A en función de su conjunto de puntos fijos. Da una interpretación geométrica de cada tipo de afinidad.

7. Halla las ecuaciones de la aplicación afín que transforma los puntos del sistema de referencia baricéntrico $\mathcal{R} = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ en los puntos $q_0 = (2, -3, 1, 1)$, $q_1 = (1, -2, 0, 2)$, $q_3 = (0, 4, -1, -2)$, y $q_4 = (3, -9, 2, 5)$ respectivamente, donde las coordenadas de los puntos q_i están referidas al sistema de referencia baricéntrico $\mathcal{R}$.

8. Comprueba que las aplicaciones afines son, exactamente, aquellas que conservan las combinaciones baricricas. Es decir, demuestra que, si $\mathbb{A}_1$ y $\mathbb{A}_2$ son espacios afines, entonces $f : \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_2$ es una aplicación afín si y sólo si, para cada familia finita de puntos $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{A}_1$ y cada familia de escalares $\mu_1, \ldots, \mu_r$ tales que $\sum_{j=1}^{r} \mu_j = 1$, se cumple que

$$f\Big(\sum_{j=1}^{r} \mu_j a_j\Big) = \sum_{j=1}^{r} \mu_j f(a_j).$$

9. Sea f una afinidad de un espacio afín real.

a) Demuestra que si f^2 tiene algún punto fijo, entonces f también.

b) Demuestra que si existe un número natural n tal que f^n tiene un punto fijo, entonces f también.

10. Demuestra que existe una única afinidad en un plano afín que transforma cada uno de los vértices de un triángulo dado en el punto medio del lado opuesto. Estudia esta afinidad. ¿Qué tipo de transformación es?