ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

Hoja 2. Espacios vectoriales euclídeos y hermíticos I

1. Considera la aplicación $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \mapsto (2x_1 - 2x_2 + 4x_3)y_1 + (-2x_1 - 2x_3)y_2 + (6x_3 + 4x_1 - 2x_2)y_3.$$

a) Calcula la matriz de ϕ en la base usual. ¿Es ϕ un producto escalar?
b) Calcula el conjunto de los vectores (x, y, z) que cumplen $\phi\left((x, y, z), (1, -1, -1)\right) = 0$.
c) Determina algún vector no nulo (x, y, z) que cumpla que $\phi\left((x, y, z), (x, y, z)\right) = 0$.

2. Sea $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineal dada por:

$$\psi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

a) Decide de manera razonada para qué valores de α es ϕ es un producto escalar.
b) Para el caso $\alpha = 2$, encuentra una base de $\mathbb{R}^3$ respecto a la que la matriz de ϕ es diagonal.

3. Considera la aplicación $\phi : \mathbb{M}_{3\times3}(\mathbb{R}) \times \mathbb{M}_{3\times3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por $\phi(A, B) = \text{traza }(AB^t)$. Demuestra que ϕ es un producto escalar en $\mathbb{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$. ¿La base usual de $\mathbb{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ es ortonormal para este producto escalar?

4. Dado un número natural n, definimos $V_n = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : \text{grado}(p(x)) \leq n\}$. Se define la aplicación $\phi : V_n \times V_n \to \mathbb{R}$ dada por

$$\phi(p(x), q(x)) = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt.$$

a) Demuestra que ϕ es un producto escalar.
b) Describe el subespacio de polinomios ortogonales al polinomio x.
c) Calcula una base ortonormal de V_3.

5. En el espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^3$ se considera el producto hermítico cuya matriz en la base canónica es la identidad. Aplica el algoritmo de Gram-Schmidt a los vectores $\overrightarrow{e_1} = (i, 0, 0)$, $\overrightarrow{e_2} = (0, i, 1)$, $\overrightarrow{e_1} = (1, 0, 1)$ para obtener a partir de ellos una base ortonormal.

6. En el mismo espacio hermítico del ejercicio anterior ($\mathbb{C}^3$ con el producto hermítico *usual*), ¿qué vectores son ortogonales al vector $(0, i, 1)$?

7. Determina una condición que debe cumplir necesariamente la matriz de cambio de base entre dos bases ortonormales para un mismo producto escalar. Idem en el caso de un producto hermítico. ¿Son condiciones también suficientes?

8. Sea (E, ϕ) un producto euclídeo, $F \subset E$ un subespacio vectorial de codimensión 1, y sea $\{\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_{n-1}}\}$ una base ortonormal de la restricción de ϕ a F. ¿De cuántas formas se puede añadir un vector adicional al conjunto $\{\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_{n-1}}\}$ para formar una base ortonormal de E?