ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

Hoja 1. Repaso de Álgebra Lineal

1. Sean $\overrightarrow{u_1} = (1, -1, t)$, $\overrightarrow{u_2} = (t+1, -2, 0)$, $\overrightarrow{u_3} = (-1, 1, 1)$. Sea $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$.
a) ¿Para qué valores $t \in \mathbb{R}$ es $\mathcal{B}$ una base de $\mathbb{R}^3$?
b) Se considera la base $\mathcal{B}$ anterior con $t = 0$. Sean (x_1, x_2, x_3) las coordenadas en esa base del vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. ¿Qué ecuación en (x_1, x_2, x_3) describe al subespacio vectorial de ecuación $x + y + z = 0$? ¿Qué ecuación en (x, y, z) describe al subespacio generado por $\overrightarrow{u_1}$ y $\overrightarrow{u_3}$?

2. Sean $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = 0, z + t = 0\}$ y G el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por $\{(1, 0, 0, 1), (1, -1, -1, 0), (1, 1, 1, 2)\}$.
a) Calcula una base de F y ecuaciones implícitas para G.
b) Calcula una base y ecuaciones implícitas para $F + G$.
c) Calcula una base y ecuaciones implícitas para $F \cap G$.

3. Demuestra que dado cualquier polinomio real $p(x)$ de grado menor o igual que 3 se pueden encontrar dos polinomios $p_1(x), p_2(x)$ de grado menor o igual que 3 tales que $p_1(1) = p_1'(1) = 0$ y $p_2(2) = p_2'(2) = 0$ (aquí p' indica la derivada) de modo que se cumpla $p = p_1 + p_2$. ¿Son p_1 y p_2 con esas condiciones únicos para el p dado?

4. Sea $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ el cuerpo de enteros módulo 3. Se considera el $\mathbb{F}_3$-espacio vectorial $V = \mathbb{F}_3^3$. ¿Cuántos subespacios vectoriales de dimensión 1 distintos hay en V? ¿Y de dimensión 2?

5. Se considera la aplicación lineal $f(x, y, z) = (x + y + z, x - y + z, x + z, 3y)$
a) ¿Cuál es la matriz de f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$?
b) ¿Cuál es la matriz de f respecto de las bases $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $\{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^4$?
c) Calcula una base del núcleo de f.
d) Calcula ecuaciones implícitas de la imagen de f.

6. Sea V_1 el espacio vectorial de los polinomios reales de grado menor que 3 y V_2 el de las matrices reales 2×2. Sea $f : V_1 \to V_2$ la aplicación lineal definida por $p \mapsto \begin{pmatrix} p(1) & p'(1) \\ p(2) & p'(2) \end{pmatrix}$.
a) Calcula la matriz de f respecto de las bases canónicas de V_1 y V_2.
b) ¿Es f inyectiva?

7. ¿Son $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ ó $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ diagonalizables?

8. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Calcula A^{2105}.

9. Demuestra que el endomorfismo $f : A \mapsto A^t$ del espacio V de matrices reales 2×2 dado por la transposición es diagonalizable. Calcula una base de V formada por autovectores de f.

10. ¿Cuál es la forma canónica de Jordan de $\begin{pmatrix} 9 & 10 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ sobre $\mathbb{R}$? ¿Y sobre $\mathbb{C}$?