4.7. Ejercicios

1. Si X es un conjunto finito de cardinal k. Llamamos número de Stirling, al número de particiones de X en n partes no vacías $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $1 \leq n \leq k$, y lo denotamos por $S(k,n)$. Los números de Stirling, para $2 \leq n \leq k-1$ verifican la ecuación de recurrencia siguiente:

$$S(k,n) = S(k-1,n-1) + nS(k-1,n).$$

a) Dado $X = \{a,b,c\}$, determina el valor de $S(3,2)$.

b) Dado $X = \{a,b,c,d\}$ determina los valores $S(4,2)$ y $S(4,3)$.

2. Desarrolla:

a) $\frac{1}{(1-x)^n}$.

b) $\frac{1}{(1+x)^n}$.

3. ¿Cuál es el coeficiente de x^{21} en el desarrollo de $\frac{1}{(1+x)^4}$.

Sol.: $-\binom{24}{21}$.

4. Calcular el coeficiente de x^{21} en la expresión $(x^3 + x^4 + \ldots + x^{10})^4$.

Sol.: 204.

5. Calcula el coeficiente de $x_1^3 x_2^2 x_3^4$ en $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^9$.

6. Calcular el coeficiente de x^{21} en la expresión: $(x^3 + x^4 + \ldots + x^{10})^4$.

7. Determinar el coeficiente de $x^3y^2z^3$, así como el número de términos, del desarrollo $(x+y+z)^8$.

Sol.: 560, 45.

8. Determina la función generadora asociada a las sucesiones:

a) $1, -2, 3, -8, 0, 0, \ldots$.

b) $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$

9. Repartimos 12 billetes de 100 euros entre tres personas: Antonio, Marta y María. Antonio debe recibir entre cuatrocientos y seiscientos euros, Marta debe recibir al menos doscientos euros y María no puede recibir más de quinientos euros. ¿De cuántas maneras puede hacerse la distribución?

Sol.: 15.

10. Calcular todas las particiones de $\{1,2,3\}$.

11. En un juego de cartas con una baraja de 40, se reparten cinco cartas a cada uno de los cuatro jugadores. ¿De cuántas formas se puede hacer el reparto?

Sol.: $\frac{40!}{20!(5!)^4}$.

12. Una herencia consta de siete fincas que se han de repartir tres personas: Amparo, Luis y Carlos. ¿De cuántas formas puede repartirse la herencia si se ha dispuesto que cualquiera que sea el reparto Carlos debe recibir una única finca?

Sol.: 448.

13. Calcular el coeficiente de x^{10} de $(x^2 + x^3 + x^4 + \ldots)^5$.

Sol.: 1.

14. ¿De cuántas formas se pueden aparcar un Seat, un Mercedes, un Audi, un Volvo y un Citroën en tres garajes distintos, si queremos que en el segundo garaje haya solo un coche?

Sol.: 80.

15. ¿De cuántas maneras podemos distribuir cuatro objetos distintos en tres cajas numeradas, de modo que cada caja debe tener al menos un objeto?

Sol: 36.

16. Hacer una tabla de los números de Stirling $S(k, n)$ hasta $k = 10$.

17. ¿De cuántas maneras se pueden separar las nueve letras $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ en tres grupos no vacíos?

Sol.: 3025.

18. ¿De cuántas formas se puede factorizar el número 30.030 en tres factores enteros positivos si:

a) Cada factor debe ser mayor que 1.

b) El 1 se admite como factor.

El orden no se cuenta; es decir, $30 \cdot 77 \cdot 13$ es el mismo que $13 \cdot 30 \cdot 77$.

Sol.: 90; 121.

19. Determina las funciones generadoras de las siguientes sucesiones:

a) $1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \ldots$.

b) $1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$.

c) $1, 4, 6, 4, 1, 0, 0, \ldots$.

d) $\binom{21}{0}, \binom{21}{1}, \binom{21}{2}, \ldots, \binom{21}{21}, 0, 0, \ldots$.

20. Determina el coeficiente de x^{97} en cada una de las siguientes funciones generadoras:

a) $g(x) = (1 - 2x)^{1000}$.

b) $g(x) = \frac{1}{1+3x}$.

c) $g(x) = \frac{1}{(1+3x)^2}$.

21. Determinar, haciendo uso de las funciones generadoras, el número de soluciones enteras de la ecuación $x + y + z = 5$ tal que $1 \leq x \leq 2, y, z \geq 0$.

22. Encontrar una función generadora $g(x)$, donde el coeficiente a_k de x^k signifique el número de soluciones enteras, no negativas, de la ecuación $2a + 3b + 5c = k$.

23. Plantear una función generadora y determinar cuál es el término cuyo coeficiente corresponde al número de formas de distribuir cien objetos iguales en cuatro cajas, de forma que cada caja contenga al menos un objeto en los casos siguientes:

a) Las cajas son distinguibles.

b) Las cajas son indistinguibles.

24. La sucesión de Fibonacci ($(f_n)_n = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots\}$) se define a través de la siguiente ecuación en recurrencia: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, para $n \geq 2$ y con valores iniciales $f_0 = 0$ y $f_1 = 1$. Determinar la función generadora de la sucesión de Fibonacci.

Sol: $F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$.

25. La directiva de una sociedad científica está formada por 25 personas, de las que 11 son mujeres y 14 son hombres. La Comisión ejecutiva está formada por 10 de estas personas. Sea $(m_n)_n$ la sucesión que indica la forma de elegir de entre las 11 a n mujeres y sea $(h_n)_n$ la sucesión que indica la forma de elegir de entre los 14 hombres a n hombres. Asignar a cada una de estas sucesiones una función generadora y a partir de ellas determinar el número de formas en que se puede elegir la comisión Ejecutiva.

Sol.: $\binom{25}{10}$.

26. Construir una tabla de las particiones de $n \in \mathbb{Z}^+$ en k sumandos ($p_k(n)$) y evaluar $p(7), p(8), p(9), p(10)$.

Sol.: $p(7) = 15$, $p(8) = 22$, $p(9) = 30$ y $p(10) = 42$.

27. Determina las particiones conjugadas de

a) $7 = 4 + 1 + 1 + 1$.

b) $9 = 6 + 2 + 1$.

c) $15 = 5 + 5 + 4 + 1$.

d) $13 = 4 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1$.

28. Probar que para $n \in \mathbb{Z}^+$ se verifica que $p(n) = p_n(2n)$.

29. Escribir un producto de polinomios cuyo desarrollo pueda ser usado para calcular:

a) El número de particiones de 38 con sumandos restringidos a 6, 7, 12 y 20.

b) El número de particiones de 15 con sumandos mayores que 2.

c) El número de particiones de 9 con sumandos distintos (desiguales).

30. ¿De cuántas maneras podemos cambiar un billete de 10 euros usando monedas de dos, cinco, veinte y cincuenta céntimos?

31. Un padre quiere distribuir 7 fincas entre sus tres hijos, ¿de cuántas formas puede hacerlo si su hijo mayor debe recibir una única finca?

Sol.: 448.

32. En las vacaciones de Navidad, Andrés quiere salir nueve noches, cada una con un único amigo entre siete amigos. Carlos dispone de 4 noches libres, Luis de 3, Ana de 4, Laura de 2, Ángel de 3, Pedro de 5 y Eva de 4. Además quiere salir. como mínimo, dos noches con Carlos. ¿De cuántas formas puede hacerlo?

33. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir diez objetos diferentes en cuatro cajas diferentes, de manera que en la primera caja haya tres objetos, en la segunda dos, en la tercera uno y en la cuarta cuatro?

Sol.: 12.600.

34. ¿De cuántas formas se pueden reunir 53 céntimos con monedas de 1, 5, 10 o 20 céntimos?

35. Haciendo uso de funciones generadoras determinar el número de soluciones enteras no negativas de la ecuación $x + y + z = 6$. ¿Y si se buscan las soluciones enteras positivas?

36. Haciendo uso de funciones generadoras determinar el número de soluciones enteras de la ecuación $x + y + z = 6$ tales que $x \leq 1$, $2 \leq y \leq 3$ y $z \geq 0$.

37. Haciendo uso de funciones generadoras determinar el número de soluciones enteras de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$, con $0 \leq x_1 \leq 3$, $0 \leq x_2 \leq 5$, $4 \leq x_3 \leq 7$, $5 \leq x_4 \leq 8$.

38. Utilizando funciones generadoras, interpretar el número de soluciones enteras de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$ si $2 \leq x_i \leq 4$, para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

39. Determinar el número de formas de distribuir 20 objetos iguales en cuatro cajas indistinguibles de modo que cada caja contenga al menos un objeto.

40. Calcular el coeficiente de x^{16} de $g(x) = (x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots)^5$.

Sol.: 210.