1. Demostrar que el producto de dos matrices diagonales es otra matriz diagonal. ¿Es conmutativo este producto?

2. Hallar todas las matrices cuadradas de orden 2 cuyo cuadrado sea nulo.

3. Hallar las potencias n-ésimas de las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$

4. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdadera y cuáles son falsas, dando en cada caso una demostración o un contraejemplo, según corresponda:

   a. Si A y B son simétricas, entonces AB es simétrica.
   b. Si A es simétrica y P es cuadrada, entonces PAP^T es simétrica.
   c. Si A es una matriz cualquiera, entonces AA^T y A^TA son simétricas.
   d. Si AB es simétrica, entonces A y B también lo son.

5. Demostrar que una matriz cuadrada de orden n puede descomponerse de forma única como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.
   Realizar la descomposición de la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 5 \end{pmatrix}$

6. Sea A una matriz antisimétrica. Demostrar:
   a. A^2 es simétrica.
   b. Si B es simétrica, entonces AB es simétrica si y sólo si $AB = -BA$

7. Hallar todas las matrices que conmutan con $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

8. Calcular los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ 1 & x+1 & 1 \\ 1 & 1 & x+1 \end{vmatrix}$$

9. Calcular los siguientes determinantes por dos procedimientos: desarrollando por los elementos de la primera fila y mediante triangulación por transformaciones elementales

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 7 & 6 & 8 & 5 \\ 6 & 7 & 10 & 6 \\ 7 & 8 & 8 & 9 \\ 8 & 7 & 9 & 6 \end{vmatrix}$$

10. Demostrar que el determinante de una matriz 2x1 por otra 1x2 es siempre cero.

11. ¿Es cierto que el determinante de una matriz antisimétrica es siempre cero?

12. Hallar los posibles valores del determinante de una matriz A en cada uno de los siguientes casos:

    a. A es idempotente, es decir, $A^2 = A$
    b. A es ortogonal, es decir, $AA^T = I$
    c. A es k-nilpotente, es decir, existe k tal que $A^k = 0$

13. Demostrar sin desarrollar, que los siguientes determinantes son nulos:

a. $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$ b. $\begin{vmatrix} a & 3a & 4a \\ a & 5a & 6a \\ a & 7a & 8a \end{vmatrix}$

14. Sabiendo que $|A| = 5$, calcula los otros determinantes: $A = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$

$B = \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ $C = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$

15. Pasando a determinantes triangulares, calcular el valor de:

a. $A = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ b. $B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$

16. Hallar la matriz inversa de: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 3 & 7 & -35 \end{pmatrix}$

17. ¿Para qué valores de x la matriz z $A = \begin{pmatrix} 3 & x & x \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ no admite matriz inversa?

18. Obtener las matrices A y B que verifiquen el sistema: $\begin{cases} 2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ A - 3B = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$

19. ¿Para qué valores de *m* la matriz z $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ m & 0 & -1 \\ 6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ no admite matriz inversa?

20. Hallar el rango de: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ (Por el método de Gauss y Determinantes)

21. Siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
Calcula el valor de X en las siguientes ecuaciones:

a. $XA = B + I$
b. $AX + B = C$
c. $XA + B = 2C$
d. $AX + BX = C$
e. $XAB - XC = 2C$

22. Sabiendo que las siguientes matrices tienen inversa, calcularla mediante operaciones elementales:

a. $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$. b. $A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 5 \end{pmatrix}$