ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS. Hoja de problemas 4

1. Sea G un grupo de orden pq con p y q primos $p > q$ y $p-1$ no divisible por q. Demostrad que G es isomorfo a $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$.

2. Un subgrupo H de S_n se dice transitivo si para cada $i, j \in \{1, \cdots, n\}$ existe $\sigma \in H$ tal que $\sigma(i) = j$.

   i) Demostrad que si H es un subgrupo transitivo de S_n entonces la acción natural de H sobre $\{1, \cdots, n\}$ tiene una única órbita. Concluid que n divide al orden de H.

   ii) Hallad los subgrupos transitivos de S_4.

3. Hallad los subgrupos de Sylow de S_5.

4. Hallad los subgrupos de Sylow de D_6.

5. Demostrad que todo grupo de orden 175 es abeliano.

6. Sea G un grupo finito y p un número primo. Demostrad que si P es el único $p-$subgrupo de Sylow de G y $f : G \to G$ es un homomorfismo, entonces $f(P) \leq P$.

7. Sea G un grupo finito y H un subgrupo normal de G con $|H| = p^k$. Demostrad que $H \subseteq P$ para todo P, $p-$subgrupo de Sylow de G.

8. Demostrar que todo grupo de orden $5^3 \times 7^3$ tiene un subgrupo normal de orden 125.

9. Demostrar que todo grupo de orden 312 tiene un p-subgrupo de Sylow normal para algún primo que divide al orden del grupo.

10. Sean N y K grupos y θ un homomorfismo de K en $Aut(N)$. Demostrad que:

    $$\text{Si } N \rtimes_\theta K \text{ es conmutativo, } \quad \text{entonces } \theta \text{ es constante (es decir, el producto es directo).}$$

    ¿Se satisface también el recíproco?.

11. Sea p un número primo. Demostrad que $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ no es producto semidirecto (no trivial).

12. Demostrad que el grupo de los cuaterniones Q_8 no es producto semidirecto (no trivial).

13. ¿Cuántos productos semidirectos hay?:

    i) de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$;

    ii) de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$;

    iii) de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$;

    iv) de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$;

14. Hallad todos los productos semidirectos de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ para los posibles homomorfismos de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ en $Aut(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})$. ¿Son los grupos hallados isomorfos?

15. Una sucesión exacta corta de grupos es un diagrama del tipo

    $$\{1\} \overset{f_1}{\to} G_1 \overset{f_2}{\to} G_2 \overset{f_3}{\to} G_3 \overset{f_4}{\to} \{1\},$$

    donde los f_i son homomorfismos de grupos para $i = 1, 2, 3, 4$ (f_1 y f_4 son constantes) y satisfacen $Im(f_i) = Ker(f_{i+1})$, para $i = 1, 2, 3$.

    a) Demostrad que f_2 es inyectiva y f_3 es sobre.

    b) Sea G producto semidirecto de N por K. Construid una sucesión exacta corta con los grupos G, N y K y homomorfismos adecuados.

    c) Construid una sucesión exacta corta (como en b)) para D_n.

16. Demuestra que $Aut(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = S_3$, y que la única estructura posible de producto semidirecto

    $$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rtimes_\theta \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$$

    es la dada por el producto usual.

17. (a) Demuestra que A_4 tiene un único 2-grupo de Sylow, indica cuales son sus elementos y observa que es isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
    (b) Expresa al grupo A_4 como producto semidirecto del anterior con $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, indicando el homomorfismo de grupos $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to Aut(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ que define dicha estructura.

18. ¿Cuántos grupos no abelianos de orden 28 tienen al menos un elemento de orden 4?

19. Hallad todos los grupos abelianos de órdenes 36, 64, 96 y 100.

20. Hallad grupos isomorfos a los grupos $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/35\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}/26\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/42\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/49\mathbb{Z}$ que sean producto directo de grupos cíclicos de órdenes potencias de primos.

21. Hallad todos los grupos abelianos de orden 175.

22. ¿Cuántos elementos de orden 3 puede tener un grupo abeliano de orden 36?

23. Sean G y H dos grupos abelianos con G de orden 2 y H de orden 16. ¿Cuántos homomorfismos hay de G en H?, para los posibles G y H.

24. Sea $G = Isom(\mathbb{R}^n)$ el grupo de isometrías del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ y $O(n)$ el grupo ortogonal (consistente de las matrices $A \in M_{n\times n}$ tales que $A^t = A^{-1}$). Considérese la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathbb{R}^n \times O(n) & \longrightarrow & G \\ & (v, A) & \longrightarrow & T_v \circ A \end{array}$$

donde estamos identificando $\mathbb{R}^n$ con $M_{n\times 1}$ (i.e. los vectores se escriben como columnas). Sabemos de cursos anteriores que esta aplicación es biyectiva (al menos para $n \leq 3$). Lo que se pide aquí es:

i) Demostrar que Φ no es un isomorfismo entre el producto directo $\mathbb{R}^n \times O(n)$ y el grupo G.

ii) Definir un homomorfismo de grupos $\rho : O(n) \longrightarrow Aut(\mathbb{R}^n)$ de forma que $G \cong \mathbb{R}^n \rtimes_\rho O(n)$