EXAMEN FINAL DE MÉTODOS MATEMÁTICOS III **GRUPO**: **1ºA**

TODA LA ASIGNATURA (10/06/2010)

Inicial del 1er apellido

APELLIDOS..

NOMBRE......................................

PRIMERA PARTE:

TEST (2 ptos) La respuesta correcta vale: + 0'2, la incorrecta vale: -0'1.

Escribe **V** si la afirmación es verdadera y **F** si es falsa en la casilla correspondiente

1. Si $B = \{\underline{u}, \underline{v}\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ respecto de un producto escalar $\bullet$, entonces la matriz métrica en B es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ....

2. $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(\underline{x}, \underline{y}) = x_1y_2 + x_2y_1$ es una forma bilineal ....

3. Para el siguiente producto escalar en $\mathbb{R}^2$: $\underline{x} \bullet \underline{y} = x_1y_1 + x_2y_2$ se tiene que $\|(1,1)\| = 1$...

4. Para el producto escalar de la afirmación anterior se tiene que la proyección ortogonal de $(1,1)$ sobre el eje x es el vector $(1,0)$ ....

5. Toda matriz diagonal define un producto escalar ....

6. Sea V un espacio vectorial con un producto escalar $\bullet$ y U un subespacio vectorial de V. Si $\underline{x}_U$ es la proyección ortogonal de $\underline{x}$ en U entonces $\underline{x}_U \in U$..........................

7. Sea $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática tal que $q(1,0) = q(0,1) = 1$ entonces q es definida positiva ....

8. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $q : V \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática, entonces su forma polar es $f_q(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{1}{2}q(\underline{x} + \underline{y})$ ....

9. Si $M_q = (a_{ij})$ es una matriz cuadrada simétrica tal que todo $a_{ij} < 0$ entonces q es definida negativa...

10. Sea la forma cuadrática $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $q(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2$ entonces $sig(q) = (0,1)$...

PROBLEMA 1. (2 ptos)

En $\mathbb{R}^3$ se define la forma cuadrática

$$q(x_1,x_2,x_3) = 3x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3 + 2x_1x_3$$

Determina M_q y demuestra que define un producto escalar

PROBLEMA 2. (2 ptos)

En $\mathbb{R}^3$ se define el producto escalar siguiente

$$(x_1,x_2,x_3)\bullet(y_1,y_2,y_3) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + 8x_3y_3$$

a)¿Los vectores $\underline{u} = (4,-2,-2)$ y $\underline{v} = (2,3,-1)$ son ortogonales para este producto escalar?

b) Para este producto escalar, escribe una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$

PROBLEMA 3. (2 ptos)

En $\mathbb{R}^3$ se considera la forma cuadrática

$q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + ax_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2ax_2x_3$

a) ¿Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ es un producto escalar?

b) Si $a = 2$ y $U = L(\{(1,1,0),(0,1,1)\}$, halla $U^{\perp}$

PROBLEMA 4. (2 ptos)

Sea la forma bilineal $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que respecto de la base $B = \{\underline{v_1},\ \underline{v_2}, \underline{v_3}\}$ tiene la matriz asociada

$$M_f(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Calcula $M_f(B')$ siendo $B' = \{\underline{v_1} - \underline{v_2},\ \underline{v_1} + \underline{v_2} - \underline{v_3},\ \underline{v_3}\}$

b) Si $\underline{u} = (1,0,-1)_B$ y $\underline{v} = (1,1,1)_{B'}$(observa que $\underline{u}$ tiene sus coordenadas en B y las de $\underline{v}$ están en B'), determina $f(\underline{u}, \underline{v})$

SEGUNDA PARTE:

TEST (2 ptos) La respuesta correcta vale: + 0'2, la incorrecta vale: -0'1.

Escribe **V** si la afirmación es verdadera y **F** si es falsa en la casilla correspondiente

1. Los límites reiterados de $f(x,y) = \dfrac{xy+y^2}{x^2+y^2}$ en $(0,0)$ son iguales....................................

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ **no** existe...

3. La función $f(x,y) = \dfrac{sen(x+y)}{x+y}$ es continua en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$......................................

4. No existe el polinomio de Maclaurin de $f(x) = \ln x$ ....

5. Se verifica que $sen(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ ....

6. El área limitada por las parábolas $y = 6x - x^2$ y $y = x^2 - 2x$ es 64 u^2 ....

7. Se verifica que $\int_0^1\int_0^2\int_0^3 x\, dxdydz = \int_0^3\int_0^2\int_0^1 x\, dzdydx$ ....

8. Si $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2+4}$ entonces $dom(f) = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ ....

9. Si $f(x,y) = x - y$ y $g(x) = x^2$ entonces $(g \circ f)(x,y) = x^2 - y^2$ ....

10. Si $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right) = 0$ entonces $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right) = 0$ ....

PROBLEMA 1. (2 ptos)
Halla el polinomio de Taylor de grado 4 centrado en $c = -1$ para la función siguiente

$$f(x) = (2+x)e^{x+1}$$

De acuerdo con dicho polinomio ¿cuál es el valor aproximado de $(1'2 \cdot e^{0'2})$?

Compáralo con su valor real.

PROBLEMA 2. (2 ptos)
Estudia si la siguiente función es continua en $(0,0)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(recordamos que $sen 2\alpha = 2 sen\alpha \cos\alpha$)

PROBLEMA 3. (2 ptos)
Determina el intervalo de convergencia de la siguiente seria de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2^{n+1}-n)x^n$$

PROBLEMA 4. (2 ptos)
Calcula el volumen en el interior de $x^2+y^2 = 9,$ por encima de $z = 0$ y por debajo de $x+z = 4$