| **Apellidos** | | **Número de matrícula** | |
|---|---|---|---|
| **Nombre** | | **Calificación** | |

1. Formalizar en el lenguaje de la lógica proposicional: *(2 puntos)*

a) Los siguientes enunciados:

*Podremos ir al partido en caso de que no llueva y consigamos las entradas*

**SOLUCIÓN:**

Identificamos las proposiciones que hay en los enunciados:
- Podremos ir al partido: p
- Llueve: q
- Conseguimos las entradas: r

Identificamos las conectivas y formalizamos el enunciado: $(\neg q \wedge r) \rightarrow p$

*Cuando estudio apruebo, pero no estudiaré a menos que consiga los apuntes de la asignatura antes del lunes y que haya superado el trabajo de grupo*

**SOLUCIÓN:**

Identificamos las proposiciones que hay en el enunciado:
- Estudio: p
- Apruebo: q
- Consigo los apuntes de la asignatura antes del lunes: r
- He superado el trabajo de grupo: s

Identificamos las conectivas y formalizamos el enunciado:
$(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \vee (r \wedge s))$
También es posible esta otra formalización:
$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r \wedge s)$

***Sigue a la vuelta***

b) Los siguientes razonamientos:

*Es suficiente que haya proximidad para que exista riesgo de contagio. Es necesario que haya un contacto con el virus para que me infecte. Si hay un contacto con el virus, existe riesgo de contagio. No ha habido contacto con el virus. Luego no me he infectado.*

**SOLUCIÓN:**

Identificamos las proposiciones que hay en el razonamiento:

- Hay proximidad → p
- Existe riesgo de contagio → q
- Hay un contacto con el virus → r
- Me he infectado → s

Identificamos las conectivas y formalizamos el razonamiento:

$p \rightarrow q$
$s \rightarrow r$
$r \rightarrow q$
$\neg r$
$\models \neg s$

*Iré a Barcelona si y solo si Pedro viaja conmigo. Pedro viajará conmigo o bien se quedará en Madrid. Pedro no se quedará en Madrid. Luego no iré a Barcelona a no ser que Pedro no se quede en Madrid*

**SOLUCIÓN:**

Identificamos las proposiciones que hay en el razonamiento:

- Ir a Barcelona: p
- Pedro viaja conmigo: q
- Pedro se queda en Madrid: r

Formalizamos el razonamiento:

$p \leftrightarrow q$
$q \vee r$
$\neg r$
$\models \neg p \vee \neg r$ (Si Pedro se queda en Madrid, no iré a Barcelona: $r \rightarrow \neg p$)
o también (Pedro no se queda en Madrid es Condición Necesaria para ir a Barcelona: $p \rightarrow \neg r$)

| Apellidos | | Número de matrícula | |
|---|---|---|---|
| Nombre | | Calificación | |

2.1. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). Para las que sean verdaderas decir por qué, y para las que sean falsas escribir la correspondiente definición o teorema. *(Respuesta correcta +0,4, respuesta incorrecta -0,4, nota mínima 0).* *(1,2 puntos)*

*Si existe un modelo del conjunto de fórmulas A1, A2, …, An y también de la fórmula B, podemos afirmar que B es consecuencia lógica de A1, A2, …, An*

FALSO

Para poder afirmar que B es consecuencia lógica del conjunto de fórmulas A1, A2, …, An, TODOS los modelos del conjunto de fórmulas A1, A2, …, An han de ser también modelos de B.

No basta con que un modelo de dicho conjunto sea modelo de B, puesto que no excluye la posibilidad de que pudiera haber un modelo de A1, A2, …, An que fuese contramodelo de B.

*Si B no es deducible A1, A2, …, An, entonces podemos afirmar que A1 ∧ A2 ∧ … ∧ An ∧ ¬B es satisfacible*

VERDADERO

Si B no es deducible de A1, A2, …, An, entonces B tampoco es consecuencia lógica de A1, A2, …, An. En este caso, existiría al menos una interpretación que hace verdad a *A1 ∧ A2 ∧ … ∧ An* y falso a B. Esa interpretación sería un modelo de *A1 ∧ A2 ∧ … ∧ An ∧ ¬B* y por tanto esta fórmula es satisfacible.

*Un sistema de cálculo deductivo es completo si para toda fórmula A tal que ⊢ A , se cumple que A es válida (⊨ A )*

FALSO

Un sistema de cálculo deductivo es completo si para toda fórmula válida A (⊨ A ), se puede definir una prueba de dicha fórmula en el sistema (⊢ A).

La definición del enunciado es la de un cálculo deductivo correcto o válido, no completo.

***Sigue a la vuelta***

2.2 Siendo A, B, C y D fórmulas bien formadas cualesquiera, decir para cada una de ellas si es válida, contingente, contradicción o no es posible saber con certeza qué es, a partir de la información disponible sobre ellas: *(cada respuesta correcta son 0,1 puntos)*

| | *información disponible* | |
|---|---|---|
| $A \wedge \neg B$ | A y B tienen los mismos modelos | CONTRADICCIÓN |
| $(C \vee B) \rightarrow (C \wedge A)$ | B es insatisfacible, C es satisfacible | INFORMACIÓN INSUFICIENTE |
| $A \rightarrow B \wedge \neg A$ | A es satisfacible | CONTINGENTE |
| $A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$ | B es válida | VÁLIDA |
| $\neg(A \vee \neg B) \rightarrow (C \rightarrow \neg B)$ | B es válida, A y C tienen los mismos modelos | VÁLIDA |
| $(\neg A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg A)$ | A es válida, B es insatisfacible | CONTRADICCIÓN |
| $A \wedge (C \rightarrow (B \vee \neg A))$ | los modelos de A son los contramodelos de C | CONTINGENTE |
| $(C \vee A) \rightarrow (B \wedge \neg A)$ | B y C tienen los mismos modelos | INFORMACIÓN INSUFICIENTE |

| Apellidos | | Número de matrícula | |
|---|---|---|---|
| Nombre | | Calificación | |

3. Demostrar **con medios semánticos** que el siguiente razonamiento no es correcto. Indicar de forma explícita y completa: (1) los pasos principales del procedimiento y (2) el resultado final obtenido.

Nota: no pueden utilizarse ni las tablas de verdad, ni la deducción natural, ni el método de resolución.

$$\{\ p \wedge q \rightarrow r,\ \ r \wedge s \rightarrow t\ \} \vDash\ \neg t\ \rightarrow\ \neg(p \wedge q) \vee s$$ *(2 puntos)*

**SOLUCIÓN:**

Como dice el enunciado, el razonamiento es incorrecto.
Puede que la solución que se da aquí no corresponda al método usado en cada uno de los grupos, pero debería ser comprensible para todos.

Buscamos una interpretación I que haga las premisas verdaderas al mismo tiempo que hace la conclusión falsa.
Para que la conclusión sea falsa se necesita que (3.1) la parte izquierda de la implicación sea verdadera y (3.2) que la parte derecha sea falsa.

Para obtener (3.1), t tendrá que ser falsa según I, es decir, $I(t) = f$.
Para obtener (3.2), $I(\neg(p \wedge q) \vee s) = f$, es decir, se necesita (3.2.1) $I(\neg(p \wedge q)) = f$ y (3.2.2) $I(s) = f$.
(3.2.1) vale sólo si $I(p) = v$ e $I(q) = v$.
Todas estas condiciones tienen que darse al mismo tiempo, así que están fijados los valores de verdad asignados por $I$ a $p$, $q$, $t$ y $s$.

Para que la primera premisa sea verdadera, tiene que darse que la primera parte es falsa o la segunda es verdadera. Como la primera parte es verdadera por los valores asignados a $p$ y $q$, se obtiene que obligatoriamente $I(r) = v$.

Del mismo modo, para que la segunda premisa sea verdadera, tiene que darse que la primera parte es falsa o la segunda es verdadera. Por los valores asignados a las proposiciones, la primera parte es falsa (porque $I(s) = f$) y la segunda también es falsa.

Acabamos de encontrar el contramodelo (o contraejemplo) que buscábamos:

$$I(p) = v; \quad I(q) = v; \quad I(r) = v; \quad I(s) = f; \quad I(t) = f$$

| **Apellidos** | | **Número de matrícula** | |
|---|---|---|---|
| **Nombre** | | **Calificación** | |

4. Demostrar la siguiente deducción con el cálculo de deducción natural, justificando cada paso.

$$T[\, p \rightarrow q,\ \neg r \rightarrow \neg q,\ r \rightarrow \neg s \,] \vdash \neg s \vee \neg p$$ *(2 puntos)*

**SOLUCIÓN**:

1. $p \rightarrow q$ premisa
2. $\neg r \rightarrow \neg q$ premisa
3. $r \rightarrow \neg s$ premisa
    4. $s$ supuesto
        5. $p$ supuesto
        6. $q$ modus ponens 1,5
        7. $\neg\neg q$ teorema de intercambio con la equivalencia $A \equiv \neg\neg A$
        8. $\neg\neg r$ modus tollens 2,7
        9. $r$ E¬ 8
        10. $\neg s$ modus ponens 3,9
        11. $s \wedge \neg s$ I∧ 4,10
    12. $\neg p$ I¬ 5,11
13. $s \rightarrow \neg p$ I→ 4,12
14. $\neg s \vee \neg p$ teorema de intercambio con la equivalencia $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

| Apellidos | | Número de matrícula | |
|---|---|---|---|
| Nombre | | Calificación | |

5. Demostrar, justificando los pasos dados, que la siguiente estructura deductiva es correcta usando el método de resolución:

$$T [ p \rightarrow (q \vee \neg r), \neg r \leftrightarrow \neg s, \neg (q \wedge (p \rightarrow r)) ] \vdash p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg s)$$ *(2 puntos)*

## SOLUCIÓN:

- Recordatorio: Una deducción T[A1, A2, …, An] ⊢ B es **correcta** sii FC(A1 ∧ A2 ∧ … ∧ An ∧ ¬B) es insatisfacible

Sea la deducción T [A1, A2, …, An] ⊢ B, donde:

A1: p → (q ∨ ¬ r)

A2: ¬ r ↔ ¬ s

A3: ¬ (q ∧ (p → r))

B: p → (¬ q → ¬ s)

Esta deducción es correcta (es decir, B se deduce del conjunto de fórmulas A1, A2, y A3) si aplicando el método de resolución a la FC de A1 ∧ A2 ∧ A3 ∧ ¬B se obtiene la cláusula vacía.

- *Forma Normal Conjuntiva (FNC) de premisas y de negación de la conclusión*:
  - FNC de A1:
    - p → (q ∨ ¬ r) Interdefinición de →
    - ¬ p ∨ (q ∨ ¬ r)
  - FNC de A2:
    - ¬ r ↔ ¬ s Interdefinición de ↔
    - (¬ r → ¬ s) ∧ (¬ s → ¬ r) Interdefinición de →
    - (¬¬ r ∨ ¬ s) ∧ (¬ s → ¬ r) Interdefinición de →
    - (¬¬ r ∨ ¬ s) ∧ (¬¬ s ∨ ¬ r) Doble negación
    - (r ∨ ¬ s) ∧ (¬¬ s ∨ ¬ r) Doble negación
    - (r ∨ ¬ s) ∧ (s ∨ ¬ r)
  - FNC de A3:
    - ¬ (q ∧ (p → r)) Interdefinición de →
    - ¬ (q ∧ (¬ p ∨ r)) De Morgan
    - ¬ q ∨ ¬ (¬ p ∨ r) De Morgan
    - ¬ q ∨ (¬ ¬ p ∧ ¬ r) Doble negación
    - ¬ q ∨ (p ∧ ¬ r) Distributividad
    - (¬ q ∨ p) ∧ (¬ q ∨ ¬ r)
  - FNC de ¬B:
    - ¬ (p → (¬ q → ¬ s)) Interdefinición de →
    - ¬ (¬ p ∨ (¬ q → ¬ s)) Interdefinición de →
    - ¬ (¬ p ∨ (¬¬ q ∨ ¬ s)) Doble negación
    - ¬ (¬ p ∨ (q ∨ ¬ s)) De Morgan
    - ¬ ¬ p ∧ ¬ (q ∨ ¬ s) Doble negación
    - p ∧ ¬ (q ∨ ¬ s) De Morgan

- p ∧ ¬ q ∧ ¬ ¬ s Doble negación
- p ∧ ¬ q ∧ s

- *Forma Clausular (FC) de A1 ∧ A2 ∧ A3 ∧ ¬B*:
  - FC = {C1: ¬ p ∨ q ∨ ¬ r, C2: r ∨ ¬ s, C3: s ∨ ¬ r, C4: ¬ q ∨ p, C5: ¬ q ∨ ¬ r, C6: p, C7: ¬ q, C8: s}

- *Resolución*:
  - C1: ¬ p ∨ q ∨ ¬ r
  - C2: r ∨ ¬ s
  - C3: s ∨ ¬ r
  - C4: ¬ q ∨ p
  - C5: ¬ q ∨ ¬ r
  - C6: p
  - C7: ¬ q
  - C8: s
  - R1 = C9: q ∨ ¬ r (C1, C6)
  - R2 = C10: ¬ r (C7, R1)
  - R3 = C11: ¬ s (C2, R2)
  - R4 = C12: □

Como se ha deducido la cláusula vacía mediante el método de resolución, se puede concluir que la estructura deductiva es correcta.