EXAMEN FINAL DE MÉTODOS MATEMÁTICOS III (15/06/2012)GRUPOS: 1ºA y 1ºB

APELLIDOS...

NOMBRE...

1ª PARTE: (Álgebra)

TEST (2 ptos) La respuesta correcta vale: + 0'4, la incorrecta vale: -0'2.

Escribe **V** si la afirmación es verdadera y **F** si es falsa en la casilla correspondiente.

1. $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1x_2 + y_1y_2$ es una forma bilineal.. ☐

2. Sea $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática tal que $q(\underline{x}) = x_1^2 - x_2^2$, entonces la forma polar asociada a q, f_q, es

$f_q((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1 - x_2y_2$... ☐

3. $q : M_{3\times3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tal que $q(A) = |A|$ es una forma cuadrática..................... ☐

4. Sea $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática y $\underline{x}$ e $\underline{y} \in \mathbb{R}^2$ tales que $q(\underline{x}) = 1$ y $q(\underline{y}) = -1$ entonces $\{\underline{x}\ ,\ \underline{y}\}$ es una base de vectores conjugados.. ☐

5. Sea $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática tal que $M_q = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -a \\ 1 & -a & 1 \end{pmatrix}$ entonces q es indefinida y degenerada para un único valor de $a \in \mathbb{R}$... ☐

PROBLEMA 1. (1 pto) Sea $f : \mathbb{P}_2[x] \times \mathbb{P}_2[x] \to \mathbb{R}$ forma bilineal tal que $f(p(x),q(x)) = p(1)q(-1) - p(-1)q(1)$. Escribe M_f. ¿Es f **simétrica** o **antisimétrica**?

PROBLEMA 2. (1 pto) En $\mathbb{R}^3$ se considera el producto escalar canónico. Halla la **proyección ortogonal** del vector $\underline{x} = (5,-2,3)$ sobre el subespacio vectorial $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = y,\ y = z\}$.

PROBLEMA 3. (1 pto) Sea $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ forma cuadrática tal que $q(\underline{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2$. ¿Existe una base $B = \{\underline{v}, \underline{w}\}$ tal que $q(a\underline{v} + b\underline{w}) = a^2 + b^2$? Justifica tu respuesta

PROBLEMA 4. (2 ptos) En $\mathbb{P}_1[x]$ se considera el producto escalar:
$p(x) \cdot q(x) = a_1a_2 + \dfrac{a_1b_2 + b_1a_2}{2} + \dfrac{b_1b_2}{3}$ siendo $p(x) = a_1 + b_1x$ y $q(x) = a_2 + b_2x$.
Halla una **base ortonormal**.

PROBLEMA 5. (2 ptos) Dada la forma cuadrática $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ tal que
$q(\underline{x}) = 2x_1^2 + 2x_4^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_4 - 2x_2x_3 - 4x_2x_4 - 4x_3x_4$

Halla $sig(q)$ y **clasifícala**.
.

2ª PARTE: Cálculo

TEST (2 ptos) La respuesta correcta vale: + 0’4, la incorrecta vale: -0’2.

Escribe **V** si la afirmación es verdadera y **F** si es falsa en la casilla correspondiente.

6. La serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}4^n$ es la serie de Maclaurin de $\cos(2x)$.............. ☐

7. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2-y)\left(\cos^2\left(\frac{1}{x-y}\right)\right) = 0$ .... ☐

8. $\iint\limits_R (x^2+y^2)dxdy = \frac{3\pi}{2}$ siendo $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \leq 1\}$.................. ☐

9. $\int_0^2 \int_{x^2}^4 \left(\sqrt{y}\cos y\right) dydx = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{y}} \left(\sqrt{y}\cos y\right) dxdy$ .... ☐

10. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $\underline{a}$ un punto de acumulación de $dom(f)$ endonces, si $\nexists \lim\limits_{\underline{x}\to\underline{a}} f(\underline{x})$, **no** existen los límites reiterados
.... ☐

PROBLEMA 6. (1 pto) Clasifica los puntos críticos de la superficie: $f(x,y) = x^2-(y-1)^2$

PROBLEMA 7. (1 pto)

Calcula, mediante una integral doble, el área comprendida entre la parábola $y^2 = x-3$ y la recta $y = x-5$

PROBLEMA 8. (1 pto)

Utilizando el polinomio de Maclaurin de orden 4 de $f(x) = \cos 2x$ encuentra el valor exacto de $\lim\limits_{x\to0} \frac{1-\cos 2x}{3x^2}$

PROBLEMA 9. (2 ptos)

Determina el intervalo de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n x^n}{(2n+1)^2}$$

PROBLEMA 10. (2 ptos)

Sabiendo que $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n = \frac{1}{1-3x}$ $\forall x \in \mathbb{R},\ |3x| < 1$. ¿A qué función en x converge $\sum_{n=1}^{\infty} n(3x)^{n-1}$?