Evolvente y engranajes

Complementos Matemáticos para la Ingeniería Industrial

Ejercicio de evaluación continua 1

Curso 2020-21

Departamento de Matemática Aplicada I. UNED

Índice general

1. Descripción general

1.1. Objetivo

El principal objetivo de estos ejercicios de evaluación continua 1 (EEC1) es aplicar conocimientos de curvas adquiridos a teoría de máquinas y mostrar su utilidad en elementos mecánicos.

Se quiere también mostrar que se puede encontrar una curva que cumpla unas condiciones determinadas, dadas por características de las curvas en $\mathbb{R}^2$. Nos vamos a centrar en curvas que forman dientes de engranajes. Los engranajes tienen que soportar presiones y ser resistentes al desgaste, a la vez que ser eficientes en la transmisión de movimiento, silenciosos y no producir vibraciones. El diseño de los dientes se puede abordar desde la perspectiva de envolvente de una familia de curvas, evolutas y evolventes.

Finalmente, se busca también que se analicen los resultados obtenidos y su eficacia, como medio para poder proponer mejoras al primer diseño realizado.

Para conseguir estos objetivos, a partir del estudio de características de engranajes, y de evolventes de curvas, cada estudiante va a escribir la ecuación de una curva (que puede estar definida a trozos) que pueda formar parte de un diente de engranaje. Con esta expresión de la curva, se va a trabajar epara su representación gráfica en `Maxima`.

1.2. Conocimientos requeridos

Antes de hacer esta práctica, los estudiantes deben ser capaces de:

- Conocer elementos de curva en $\mathbb{R}^2$: ecuación paramétrica de una curva, vector tangente, recta tangente, vector curvatura, función curvatura, vector normal, recta normal, parametrización por la longitud de arco.
- Poder determinar estos elementos para ejemplos concretos.
- Entender y manejar el concepto de envolvente de una familia de curvas.
- Conocer la generación de curvas como lugares geométricos, en especial la cicloide.
- Manejar `Maxima` con soltura.
- Poder determinar utilizando este programa elementos de curvas en $\mathbb{R}^3$.

Todos estos conocimientos están en los temas 2 y 3.

1.3. Introducción

Los engranajes son mecanismos utilizados para transmitir potencia de una componente a otra de una máquina. Están formados por ruedas dentadas, y estas piezas transmiten una rotación entre dos ejes con velocidades angulares constante. Uno de los ejes (el eje motor) está conectado a una fuente de energía, y al girar mueve la rueda dentada a la que está conectado (llamado engranaje motor) Al estar en contacto con la otra rueda dentada (engranaje condutor), ésta se mueve y transmite su movimiento a su eje (eje conductor). Al no patinar como las poleas, la transmisión de movimiento que se consigue es exacta, lo que no pasa con la transmisión por poleas. También se consigue transmisión exacta con correas, cadenas o ruedas de fricción, pero estos mecanismos poseen limitaciones (sobre todo en el orden de carga y potencia que se quiere movilizar) respecto a los engranajes.

Existen diversas clasificaciones según los criterios utilizados: por la relación en el espacio entre los ejes de rotación de los engranajes que están conectados, por la forma del dentado, por la situación de los dientes, por las aplicaciones específicas, por la curva generatriz del perfil del diente... No nos vamos a detener en este punto, pero si se desea se pueden consultar distintos tipos de engranajes, por ejemplo, en [8], [3] o en la página web https://goo.gl/ppmXsT). El tipo utilizado depende de la función que se le vaya a dar, ya que hay diferencias en el ruido, desgaste, movimiento,... que se genera con cada tipo.

Los nombres de muchos de los tipos hacen referencia a curvas y a superficies: cilíndricos, cónicos, hiperbólicos, no circulares, de epicicloide[1], de hipocicloide[2], perfil de evolvente, trocoide, de dientes helicoidales,....

Para un buen funcionamiento continuo de los engranajes, cuando dos dientes de ruedas conjugadas dejan de tener contacto, debe de haber otros dos que entren o que ya estén en contacto, es decir, se busca la mayor superposición posible. Pero a la vez, para garantizar una relación de transmisión constante, el contacto entre los dos dientes debe hacerse de forma que las curvas que los forman sean tangentes en el punto de contacto, es decir, que

[1] La epicicloide es la curva que describe un punto de una circunferencia que rueda sin deslizar por el exterior de una circunferencia. La transmisión epicicloidal o planetaria se fundamenta en un engranaje central, conocido como sol, con su eje propio, y uno o varios engranajes, llamados planetarios, todos centro de una rueda centada exterior. Los ejes de los engranajes planetarios están soportados por una placa, que a su vez se mueve alrededor de un eje. El nombre que reciben está relacionado con el sistema heliocéntrico, donde para explicar el movimiento aparentemente errante de los planteas se ideó un juego de circunferencias que giraban alrededor de otra, y en cuyo centro estaba la Tierra.

[2] La hipocicloide es la curva que describe un punto de un circunferencia que rueda sin deslizar por el interior de una circunferencia.

las rectas tangentes (o las rectas normales) sean paralelas en el punto de contacto. Esto se consigue con un perfil de evolvente de la circunferencia, que explicaremos más adelante.

La construcción de los engranajes se puede realizar por varios métodos, entre los que destacamos por fundición y por generación. La forma de generación (que a menudo depende del uso que se vaya a dar al engranaje) puede condicionar la forma de la curva.

Para la construcción por generación se aprovechan las propiedades de la evolvente: son conjugados a una pieza que gira, construida sobre un plano móvil, que se apoya sobre una base (que es la circunferencia primitiva del engranaje) y que al girar forma el diente con perfil de evolvente. Se puede observar el procedimiento de generación, por ejemplo, en el siguiente vídeo: https://www.youtube.com/watch?v=mkvAXTtZ-w8.

En esta práctica vamos a trabajar con la evolvente y sus propiedades, y vamos a aplicar la teoría que estudiemos a estas curvas.

En Complementos matemáticos para la ingeniería industrial estudiamos envolventes de una familia de curvas. Ahora vamos a estudiar dos curvas asociadas a una curva plana, que están relacionadas de alguna forma con ellas. Son la evoluta y la evolvente. Al estudiar la evolvente vamos a relacionarla con el perfil de algunos dientes de engranaje. Finalmente, vamos a plantear las actividades a realizar en los Ejercicios de Evaluación Continua 1.

2. Evolutas y evolventes

2.1. Evoluta

Definición 1. *La evoluta de una curva regular C es el lugar geométrico de sus centros de curvatura.*

Sea C una curva regular de clase $q \geq 2$ con una parametrización natural $x = x(s)$, $y = y(s)$, o $\mathbf{x}(s) = (x(s), y(s))$. Si $\mathbf{n}(s)$ es el vector unitario normal en el sentido del vector curvatura $\mathbf{k}(t)$, sabemos que el centro de curvatura de un punto genérico es

$$\mathbf{x}_e(s) = \mathbf{x}(s) + \frac{1}{k(s)}\mathbf{n}(s),$$

que son las ecuaciones de la evoluta para una curva parametrizada con el arco, $\mathbf{x}_e(s)$.

No está definida en los puntos de inflexión.

Ejemplo 2. *La evoluta de una circunferencia es su centro, ya que el vector curvatura de cada punto P de la circunferencia es el vector que une P con el centro de la circunferencia.*

Si partimos de una parametrización cualquiera $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$, y el vector normal unitario en el sentido del vector curvatura es $\mathbf{n}(t)$, las ecuaciones de la evoluta son:

$$\mathbf{x}(t) + \frac{\|\mathbf{x}'(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t) \wedge \mathbf{x}''(t)\|}\mathbf{n}(t).$$

Recordamos que $\mathbf{n}(t)$ tiene la misma dirección y sentido que

$$(\mathbf{x}'(t) \wedge \mathbf{x}''(t)) \wedge \mathbf{x}'(t).$$

Si la curvatura es mayor que cero ($k(s) > 0$) y su derivada $k'(s)$ no cambia de signo, la curvatura es una única curva regular, porque está definida para todos los valores de s y tiene tangente en cada punto. Entonces se cumplen las dos propiedades siguientes.

Proposición 3. *(Longitud del arco de evoluta) La longitud de arco de la evoluta de una curva C es igual al valor absoluto de la diferencia entre los radios de curvatura de sus puntos extremos.*

Demostración. Partimos de la parametrización por la longitud de arco. Derivamos

$$\mathbf{x}_e(s) = \mathbf{x}(s) + \frac{1}{k(s)}\mathbf{n}(s)$$

y tenemos

$$\mathbf{x}_e'(s) = \mathbf{x}'(s) - \frac{k'(s)}{k^2(s)}\mathbf{n}(s) + \frac{1}{k(s)}\mathbf{n}'(s) = -\frac{k'(s)}{k^2(s)}\mathbf{n}(s) = \left(\frac{1}{k(s)}\right)'\mathbf{n}(s),$$

porque por las ecuaciones de Frenet:

$$\frac{d\mathbf{n}'}{ds} = -k(s)\,\mathbf{t}(s) = -k(s)\,\mathbf{x}'(s).$$

Entonces

$$\|\mathbf{x}_e'(s)\| = \left|\frac{k'(s)}{k^2(s)}\right| \|\mathbf{n}(s)\| = \left|\frac{k'(s)}{k^2(s)}\right| = \left|\left(\frac{1}{k(s)}\right)'\right|.$$

La longitud de arco de la evoluta entre a y b es

$$L(a,b) = \int_a^b \|\mathbf{x}_e'(s)\|\, ds = \int_a^b \left| \frac{k'(s)}{k^2(s)} \right| ds = \int_a^b \left| \left(\frac{1}{k(s)} \right)' \right| ds.$$

Como $k'(s)$ conserva el signo (no hay puntos de inflexión), y entonces

$$L(a,b) = \int_a^b \left| \left(\frac{1}{k(s)} \right)' \right| ds = \left| \frac{1}{k(b)} - \frac{1}{k(a)} \right|.$$

□

Proposición 4. *La evoluta de una curva C es la envolvente de sus rectas normales.*

Antes de pasar a la demostración, recordamos que si tenemos una familia de curvas planas regulares, cuyas ecuaciones paramétricas son

$$\{\mathbf{x}(\lambda, t)\}_{\lambda \in [a,b]},$$

una curva C' es su envolvente cuando en cada punto es tangente a alguna curva de la familia y además, no está incluida en la familia de curvas (o en cada punto es tangente a alguna curva de la familia de tal forma que cada curva de la familia es tangente a la envolvente).

Demostración. Partimos de nuevo, de la parametrización por la longitud de arco. Por definición de evoluta, el punto $\mathbf{x}_e(s)$ está en la recta normal a la curva en el punto $\mathbf{x}(s)$. Además,

$$\mathbf{x}_e'(s) = \left(\frac{1}{k(s)} \right)' \mathbf{n}(s).$$

Esto quiere decir que la dirección tangente a la evoluta coincide con al dirección normal de la curva C. O que en cada punto P de la curva C, la recta normal es tangente a su evoluta, que significa que la evoluta es la envolvente de las rectas normales. □

Veamos un ejemplo.

Ejemplo 5. *Determinemos la evoluta de la elipse, dada por las ecuaciones*

$$x = a\cos t, y = b \operatorname{sen} t.$$

Partimos de la parametrización

$$\mathbf{x}(t) = (a\cos t, b \operatorname{sen} t).$$

Entonces

$$\mathbf{x}'(t) = (-a \operatorname{sen} t, b \cos t), \quad \mathbf{x}''(t) = (-a \cos t, -b \operatorname{sen} t).$$

Un vector con la misma dirección y sentido que el vector normal $\mathbf{n}(t)$ *es:*

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (-b \cos t, -a \operatorname{sen} t), \\ \|\mathbf{v}\| &= \sqrt{b^2 \cos^2 t + a^2 \operatorname{sen}^2 t}. \end{aligned}$$

El vector normal $\mathbf{n}(t)$ *es, pues:*

$$\mathbf{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{b^2 \cos^2 t + a^2 \operatorname{sen}^2 t}} (-b \cos t, -a \operatorname{sen} t).$$

Además:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}'(t)\| &= \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t}, \\ \det(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t)) &= \begin{vmatrix} -a \operatorname{sen} t & b \cos t \\ -a \cos t & -b \operatorname{sen} t \end{vmatrix} = ab \operatorname{sen}^2 t + ab \cos^2 t = ab. \end{aligned}$$

Por eso, la curvatura es

$$k(t) = \det(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t)) \frac{1}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t}^3},$$

y el vector curvatura es

$$\begin{aligned} \mathbf{k}(t) &= k(t)\, \mathbf{n}(t) \\ &= \frac{ab}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t}^3} \frac{1}{\sqrt{b^2 \cos^2 t + a^2 \operatorname{sen}^2 t}} (-b \cos t, -a \operatorname{sen} t) \\ &= \frac{ab}{(a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t)^2} (-b \cos t, -a \operatorname{sen} t). \end{aligned}$$

El radio de curvatura es

$$r(t) = \frac{1}{|k(t)|} = \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t}^3 ab.$$

El centro de curvatura es:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(t) &= \mathbf{x}(t) + \frac{1}{k(t)} \mathbf{n}(t) \\ &= (a \cos t, b \operatorname{sen} t) \\ &+ \frac{1}{ab} \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t}^3 \frac{1}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t}} (-b \cos t, -a \operatorname{sen} t) \\ &= (a \cos t, b \operatorname{sen} t) + \frac{1}{ab} \left(a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t\right) (-b \cos t, -a \operatorname{sen} t). \end{aligned}$$

Por eso, las ecuaciones de la evoluta de la elipse (expresada como el lugar geométrico de los centros de curvatura) son:

$$\mathbf{x}_e(t) = (a\cos t, b\,\operatorname{sen} t) + \frac{1}{ab}\left(a^2\,\operatorname{sen}^2 t + b^2\cos^2 t\right)(-b\cos t, -a\,\operatorname{sen} t)\,. \quad (1)$$

Estas ecuaciones son de una astroide. Ambas curvas se representan en la figura 1.

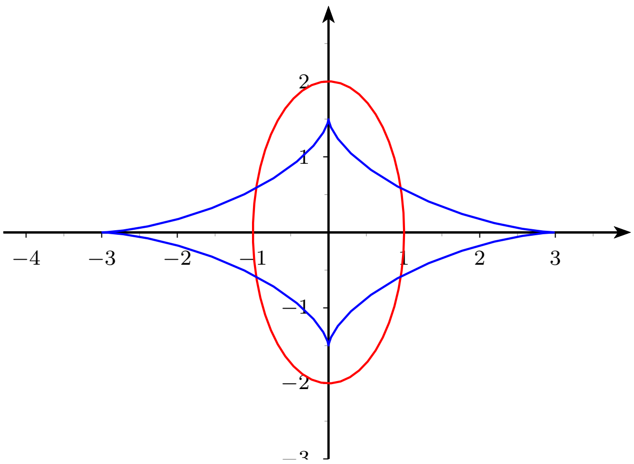

Figura 1: Elipse y su evoluta.

Indicamos algo más de la astroide. Es un hipocicloide de cuatro vértices, lo que significa que (para $a = b$) es la curva que describe un punto fijo en un círculo de radio $\frac{r}{4}$ rodando en el interior de un círculo fijo de radio r.

También podíamos haber resuelto el problema determinando del vector normal y así las ecuaciones de la evoluta directamente. Tenemos que $\mathbf{x}(t) = (a\cos t, b\,\operatorname{sen} t)$. Entonces

$$\mathbf{x}'(t) = (-a\,\operatorname{sen} t, b\cos t)\,, \quad \mathbf{x}''(t) = (-a\cos t, -b\,\operatorname{sen} t)\,.$$

Un vector con la misma dirección y sentido que el vector normal $\mathbf{n}(t)$ es:

$$\mathbf{v} = (-b\cos t, -a\,\operatorname{sen} t)$$

Su módulo es

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{b^2\cos^2 t + a^2\,\operatorname{sen}^2 t}$$

Por esto, el vector normal $\mathbf{n}(t)$ es

$$\mathbf{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{b^2\cos^2 t + a^2\,\operatorname{sen}^2 t}}(-b\cos t, -a\,\operatorname{sen} t)\,.$$

Además:

$$\left\| \mathbf{x}'(t) \right\| = \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t},$$

$$\det\left(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t)\right) = \begin{vmatrix} -a \operatorname{sen} t & b \cos t \\ -a \cos t & -b \operatorname{sen} t \end{vmatrix} = ab \operatorname{sen}^2 t + ab \cos^2 t = ab.$$

Por eso, la curvatura es

$$k(t) = \det\left(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t)\right) \frac{1}{\left\| \mathbf{x}'(t) \right\|^3} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t}^3},$$

y el vector curvatura es

$$\begin{aligned} \mathbf{k}(t) &= k(t)\, \mathbf{n}(t) \\ &= \frac{ab}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t}^3} \frac{1}{\sqrt{b^2 \cos^2 t + a^2 \operatorname{sen}^2 t}} \left(-b \cos t, -a \operatorname{sen} t\right) \\ &= \frac{ab}{\left(a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t\right)^2} \left(-b \cos t, -a \operatorname{sen} t\right). \end{aligned}$$

Entonces, las ecuaciones de la evoluta (expresadas como el lugar geométrico de los centros de curvatura) es:

$$\mathbf{x}_e(t) = \left(a \cos t, b \operatorname{sen} t\right) + \frac{ab}{\left(a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t\right)^2} \left(-b \cos t, -a \operatorname{sen} t\right).$$

Estas ecuaciones coinciden con las ecuaciones (1).

∎

Ya hemos visto la cicloide al estudiar curvas como lugares geométricos, pero vamos a describirla un poco más por su importancia histórica en el estudio de engranajes. La cicloide es la curva generada por un punto de una circunferencia que rueda sobre una línea recta (véase figura 2).

Ejemplo 6. *La ecuación de un cicloide es:*

$$\mathbf{x}(t) = \left(a\left(t - \operatorname{sen} t\right), a\left(1 - \cos t\right)\right). \tag{2}$$

Esta cicloide está generada como la posición de un punto de una circunferencia de radio a que rueda sin deslizar sobre el eje x. Si consideramos que el centro es el punto $(0, a)$, el punto cuya posición determina el cicloide es el que está en la posición $(0, 0)$ al inicio $(t = 0)$.

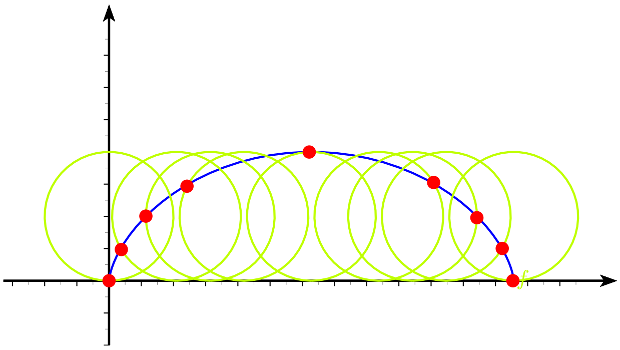

Figura 2: Cicloide como lugar geométrico.

Determinar la evoluta como envolvente de las rectas normales al cicloide. Para ello, necesitamos un vector tangente $\mathbf{x}'(t)$ *y un vector normal* $\mathbf{v}$ *al cicloide:*

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(t) &= (a(1-\cos t), a \operatorname{sen} t),\\ \mathbf{v} &= (-a \operatorname{sen} t, a(1-\cos t)).\end{aligned}$$

La familia de las rectas normales al cicloide tiene por ecuación paramétrica

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t,\lambda) &= \mathbf{x}(t) + \lambda \mathbf{v}(t)\\ &= (a(t-\operatorname{sen} t), a(1-\cos t)) + \lambda(-a \operatorname{sen} t, a(1-\cos t))\\ &= (a(t-\operatorname{sen} t) - a\lambda \operatorname{sen} t, a(1-\cos t) + \lambda a(1-\cos t)).\end{aligned}$$

Su envolvente se determinar resolviendo la ecuación

$$\det\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda}\right) = 0.$$

En este caso, es:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} &= (a(1-\cos t) - a\lambda\cos t, a \operatorname{sen} t + a\lambda \operatorname{sen} t),\\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} &= (-a \operatorname{sen} t, a(1-\cos t)).\end{aligned}$$

Resolvemos:

$$\begin{aligned}0 = \det\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda}\right) &= \begin{vmatrix} a(1-\cos t) - a\lambda\cos t & -a \operatorname{sen} t\\ a \operatorname{sen} t + a\lambda \operatorname{sen} t & a(1-\cos t)\end{vmatrix}\\ &= (a(1-\cos t) - a\lambda\cos t)\, a(1-\cos t) + a \operatorname{sen} t \cdot (a \operatorname{sen} t + a\lambda \operatorname{sen} t)\\ &= a^2\left[(1-\cos t)^2 - \lambda\cos t(1-\cos t) + \operatorname{sen}^2 t + \lambda \operatorname{sen}^2 t\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a^2 (1-\cos t)^2 - a^2\lambda \cos t\,(1-\cos t) + a^2\lambda \operatorname{sen}^2 t + a^2 \operatorname{sen}^2 t \\
&= a^2 (1-\cos t)^2 - a^2\lambda \cos t + a^2\lambda \cos^2 t + a^2\lambda \operatorname{sen}^2 t + a^2 \operatorname{sen}^2 t \\
&= a^2 (1-\cos t)^2 + a^2 \operatorname{sen}^2 t + \lambda a^2 (1-\cos t)\,.
\end{aligned}$$

Sabemos que $a > 0$ porque es el radio de la circunferencia. Entonces, la condición anterior es equivalente a:

$$\begin{aligned}
0 &= (1-\cos t)^2 - \lambda \cos t\,(1-\cos t) + \operatorname{sen}^2 t + \lambda \operatorname{sen}^2 t \\
&\iff \lambda (1-\cos t)\cos t - \lambda \operatorname{sen}^2 t = (1-\cos t)^2 + \operatorname{sen}^2 t \\
&\iff \lambda \left[\cos t - \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t\right] = 1 + \cos^2 t - 2\cos t + \operatorname{sen}^2 t \\
&\iff \lambda (\cos t - 1) = 2 - 2\cos t \\
&\iff \lambda = \frac{2(1-\cos t)}{(\cos t - 1)} = -2,
\end{aligned}$$

suponiendo que $1-\cos t \neq 0$. Si $1-\cos t = 0$, el determinante va a ser también 0. Esto significa que la envolvente de l a familia de curvas nromales va a ser la curva

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}(t) &= \mathbf{r}(t,-2) \\
&= (a(t-\operatorname{sen} t) - a(-2)\operatorname{sen} t, a(1-\cos t) + a(-2)(1-\cos t)) \\
&= (a(t-\operatorname{sen} t) + 2a\operatorname{sen} t, a(1-\cos t) - 2a(1-\cos t)) \\
&= (a(t+\operatorname{sen} t), -a(1-\cos t))\,.
\end{aligned}$$

Esta curva es la evoluta de la cicloide. Es, además, una cicloide, que se obtiene si se hace una traslación de $a\pi$ en la rpimera coordenada y de $-2a$ en la segunda. En ese caso, se tiene que la ecuación de este nuevo cicloide es

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}(t) &= (a\pi, -2a) + (a(t-\operatorname{sen} t), a(1-\cos t)) \\
&= (a\pi + a(t-\operatorname{sen} t), -2a + a(1-\cos t)) \\
&= (a(t+\pi-\operatorname{sen} t), a(1-\cos t - 2)) \\
&= (a(t+\pi+\operatorname{sen}(t+\pi)), -a(1+\cos t)) \\
&= (a(t+\pi+\operatorname{sen}(t+\pi)), -a(1-\cos(t+\pi)))\,.
\end{aligned}$$

Si llamamos $t' = t+\pi$ y sustiuimos, tenemos la ecuación de la evoluta del cicloide. Como una tralación no cambia la curva, hemos demostrado que la evoluta de un cicloide es otro cicloide.

$\blacksquare$

Si quiere conocer más sobre evolutas, puede visitar la página web[3] http://mathworld.wolfram.com/Evolute.html.

Ahora cabe preguntarnos si dada una curva existe siempre una curva C tal que C es la evoluta de C^*. La respuesta es que en general sí, y además se puede determinar como envolvente de una familia de rectas.

2.2. Evolvente

Definición 7. *La evolvente C^* de una curva C es la curva para la que C es su evoluta.*

Sabemos que la evoluta de una curva C^* es la envolvente de sus rectas normales. Esto quiere decir C es la envolvente de las rectas normales a C^*. También significa que las rectas normales a C^* son tangentes a C.

Supongamos que $\mathbf{x}(s)$ es la representación natural de C y $\alpha(s)$ es la representación natural de su evolvente C^*. Como la recta normal a un punto de C^* es la recta tangente a otro punto de C, entonces debe cumplir:

$$\alpha(s) = \mathbf{x}(s) + \lambda(s)\,\mathbf{x}'(s).$$

Derivamos esta expresión y tenemos:

$$\alpha'(s) = \mathbf{x}'(s) + \lambda'(s)\,\mathbf{x}'(s) + \lambda(s)\,\mathbf{x}''(s). \tag{3}$$

Ahora multiplicamos escalarmente por $\mathbf{x}'(s)$:

$$\alpha'(s)\cdot\mathbf{x}'(s) = \mathbf{x}'(s)\cdot\mathbf{x}'(s) + \lambda'(s)\,\mathbf{x}'(s)\cdot\mathbf{x}'(s) + \lambda(s)\,\mathbf{x}''(s)\cdot\mathbf{x}'(s). \tag{4}$$

Sabemos que $\alpha'(s)$ y $\mathbf{x}'(s)$ son ortogonales (porque las rectas normales a C^* son las rectas tangentes a C) y, por eso $\alpha'(s)\cdot\mathbf{x}'(s) = 0$. Además, C está parametrizada por la longitud de arco, y por eso $\mathbf{x}'(s)\cdot\mathbf{x}'(s) = 1$, $\mathbf{x}''(s)\cdot\mathbf{x}'(s) = 0$. Entonces la ecuación (4) se reduce a

$$0 = 1 + \lambda'(s) \Longleftrightarrow \lambda'(s) = -1 \Longrightarrow \lambda(s) = c - s,$$

donde c es una constante. Sustituyendo en (3), tenemos que la ecuación de la evolvente es:

$$\alpha(s) = \mathbf{x}(s) + (c - s)\,\mathbf{x}'(s), \tag{5}$$

para una constante c.

[3]En inglés, evolute es evoluta e involute es evolvente.

Ejemplo 8. *Determinemos la evolvente de una circunferencia de radio* 1*, de ecuación implícita* $x^2 + y^2 = 1^2$*.*

Sabemos que la parametrización por la longitud de arco de esta circunferencia es:

$$\mathbf{x}(t) = (\cos t,\ \operatorname{sen} t)\,.$$

El vector tangente a C *en un punto es*

$$\mathbf{x}'(s) = (-\operatorname{sen} s, \cos s)\,.$$

Por lo que hemos visto, la ecuación de la evolvente de la circunferencia es, para una constante c*,*

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= \mathbf{x}(s) + (c-s)\,\mathbf{x}'(s) = (\cos s,\ \operatorname{sen} s) + (c-s)\,(-\operatorname{sen} s, \cos s)\\ &= (\cos s - (c-s)\ \operatorname{sen} s,\ \operatorname{sen} s + (c-s)\cos s)\,.\end{aligned}$$

Si por ejemplo, tomamos $c = 0$*, tenemos*

$$\alpha(s) = (\cos s + s\ \operatorname{sen} s,\ \operatorname{sen} s - s\cos s)\,.$$

La circunferencia de radio 1 *y su evolvente se representan en Figura (3)*

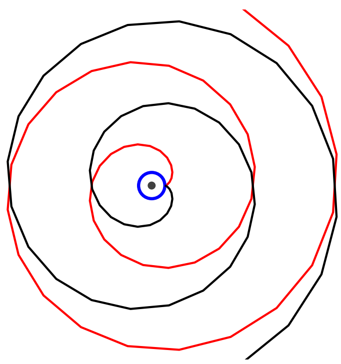

Figura 3: Circunferencia y su evolvente.

Esta idea también se puede ver en https://goo.gl/JbvRGz, donde se puede mover el punto sobre la involvente para ver cómo cambian las rectas tangentes a la circunferencia, que es la normal a su evolvente.

Ejemplo 9. *La evolvente de una cicloide es otra cicloide, ya que su evoluta es otra curva similar.*

La cicloide se empleó tradicionalmente en el diseño de los dientes de los engranajes hasta principios del siglo XX. Actualmente sólo se utilizan en mecanismos de relojería, y generalmente se prefiere la evolvente del círculo.

Esta curva fue estudiada por Christiaan Huygens cuando buscaba una forma de medir el tiempo mediante relojes de péndulo que pudieran utilizarse en un barco. Esto no era un problema fácil, ya que los vaivenes del barco hacen que la amplitud de cada oscilación de un péndulo sea variable, que entonces cambie su período y que un reloj de péndulo no sea válido para medir el tiempo.

En aquellos tiempos resolver este problema tenía mucha importancia, ya que determinar la longitud (y con ellos la posición) de un barco no era sencillo: al no haber una forma precisa de medir el tiempo, no se podía determinar a partir de la altitud del Sol sobre el horizonte.

Si se considera la cicloide que genera una circunferencia al rodar por la parte inferior de una recta (es decir, es la imagen especular respecto al eje x de la cicloide representada en la figura 2), entonces esta trayectoria es tautócrona para el punto P. Es decir, el tiempo que necesita una partícula para resbalar desde cualquier punto de la cicloide hasta el punto de menor altura es siempre la misma. Por eso, las oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio son isócronas (es decir, todas tienen la misma duración) en una trayectoria cicloidal como la anterior.

Huygens diseñó un péndulo en donde la masa M colgaba desde el punto P, con un hilo de longitud $4r$. Entonces, al ser igual la amplitud de la oscilación, el período va a ser el mismo. Pero además, los dos lados donde el péndulo podía hacer tope son cicloides, perpendiculares en el punto de suspensión del hilo, como se muestra en la Figura 4.

Huygens[4] demostró que si la circunferencia que genera los dos contornos cicloidales laterales tiene un radio r que es la cuarta parte de la longitud del hilo de suspensión del péndulo (que es $4r$), entonces la masa pendular describe

[4] C. Huygens lo expresó en Horologium oscillatorium (1673): El péndulo simple no puede ser considerado como una medida del tiempo segura y uniforme, porque las oscilaciones amplias tardan más tiempo que las de menor amplitud; con ayuda de la geometría he encontrado un método, hasta ahora desconocido, de suspender el péndulo; pues he investigado la curvatura de una determinada curva que se presta admirablemente para lograr la deseada uniformidad. Una vez que hube aplicado esta forma de suspensión a los relojes, su marcha se hizo tan pareja y segura, que después de numerosas experiencias sobre la tierra y sobre el agua, es indudable que estos relojes ofrecen la mayor seguridad a la astronomía y a la navegación. La línea mencionada es la misma que describe en el aire un clavo sujeto a una rueda cuando ésta avanza girando; los matemáticos la denominan cicloide, y ha sido cuidadosamente estudiada porque posee muchas otras propiedades; pero yo la he estudiado por su aplicación a la medida del tiempo ya mencionada, que descubrí mientras la estudiaba con interés puramente científico, sin sospechar el resultado.

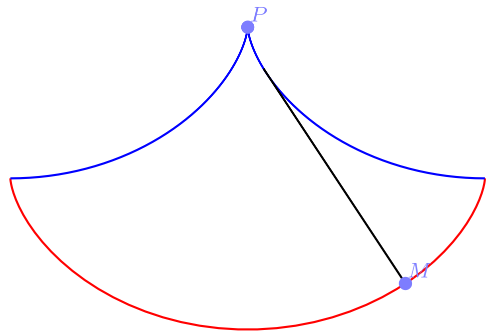

Figura 4: Pendulo de Huygens.

un arco de cicloide cuya circunferencia generatriz tiene el mismo radio r. Y un péndulo construido de acuerdo con estos principios es rigurosamente isócrono.

Vamos a encontrar la ecuación de la evolvente para una curva C no necesariamente parametrizada por la longitud de arco. Si $\mathbf{x} : t \in: I \to \mathbf{x}(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ es una parametrización regular de una curva C, podemos determinar la expresión de la evolvente $\alpha(t)$ a partir de $\mathbf{x}(t_0)$ para $t_0 \in I$. Primero hacemos un cambio de parámetro

$$I \ni t \longrightarrow s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{x}'(u)\| \, du.$$

Una vez que ya tenemos la curva parametrizada por la longitud de arco, podemos aplicar la ecuación 5 a $\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(t(s))$ y tenemos:

$$\begin{aligned}
\alpha(t(s)) = \alpha(t(s)) &= \mathbf{x}(t(s)) + (c - s)\,\mathbf{x}'(t(s)) \\
&= \mathbf{x}(t(s)) + \left(c - \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{x}'(u)\| \, du\right) \mathbf{x}'(t(s))\, t'(s) \\
&= \mathbf{x}(t(s)) + \left(c - \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{x}'(u)\| \, du\right) \frac{\mathbf{x}'(t(s))}{\|\mathbf{x}'(t(s))\|}.
\end{aligned}$$

Podemos considerar que en $t = t_0$ tenemos el origen del parámetro longitud de arco, y entonces, la ecuación anterior es equivalente a :

$$\alpha(t) = \mathbf{x}(t) - \frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|} \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{x}'(u)\| \, du.$$

Ejemplo 10. *Determinemos la evolvente de una circunferencia de radio $a > 0$, de ecuación implícita $x^2 + y^2 = a^2$.*

En este caso, la circunferencia C no está parametrizada por la longitud de arco y si $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ es una parametrización cualqueira de C, su evolvente tiene por ecuación paramétrica

$$\alpha_1(t) = x(t) - \frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|} \int \|\mathbf{x}'(t)\| \, dt,$$
$$\alpha_2(t) = y(t) - \frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|} \int \|\mathbf{x}'(t)\| \, dt.$$

Una parametrización de C es:

$$\mathbf{x}(t) = (a \cos t, a \operatorname{sen} t).$$

Como

$$\mathbf{x}'(t) = (-a \operatorname{sen} t, a \cos t), \|\mathbf{x}'(t)\| = a,$$

entonces, la ecuación de la evolvente es

$$\alpha_1(t) = a \cos t - \frac{-a \operatorname{sen} t}{a} \int a dt = a \cos t + a(t + K) \operatorname{sen} t,$$
$$\alpha_2(t) = a \operatorname{sen} t - \frac{a \cos t}{a} \int a dt = a \operatorname{sen} t - a(t + K) \cos t,$$

donde K es una constante arbitraria.

Si partimos de $t = 0$, tenemos:

$$x = a \cos t - \frac{-a \operatorname{sen} t}{a} \int_0^t a dt = a \cos t + at \operatorname{sen} t,$$
$$y = a \operatorname{sen} t - \frac{a \cos t}{a} \int_0^t a dt = a \operatorname{sen} t - at \cos t.$$

Su representación es similar a la dada en la figura 3.

∎

Ejemplo 11. *La catenaria es la curva que describe una cuerda perfectamente flexible e inextensible cuando cuelga de dos soportes. La ecuación de una catenaria es*

$$\alpha(t) = (t, \cosh t), \ t \in \mathbb{R}.$$

Vamos a determinar su evolvente a partir de $t = 0$.

La evolvente tiene por ecuación paramétrica

$$x = \alpha_1(t) - \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \int \|\alpha'(t)\| \, dt,$$
$$y = \alpha_2(t) - \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \int \|\alpha'(t)\| \, dt.$$

En este caso,

$$\alpha'(t) = (1, \sinh t), \|\alpha'(t)\| = \sqrt{1 + \sinh^2 t} = \pm \cosh t.$$

Por eso, tenemos:

$$x = t - \frac{1}{\cosh t} \int_0^t \cosh t dt = t - \frac{1}{\cosh t} \sinh t = -\tanh t,$$
$$y = \cosh t - \frac{\sinh t}{\cosh t} \int_0^t \cosh t dt = \cosh t - \frac{\sinh t}{\cosh t} \sinh t$$
$$= \frac{\cosh^2 t - \sinh^2 t}{\cosh t} = \frac{1}{\cosh t}.$$

Esta es la ecuación de una tractriz, que es la curva que describe un objeto que está situado a una distancia constante de otro objeto que se desplaza en línea recta y que es arrastrado por este segundo objeto. Se conoce también como la curva del hueso del perro, porque es la curva que describiría un perro que es llevado por su amo atado con una correa de longitud fija, si el amo se mueve el línea recta y si el perro quiere volver a su punto de partida porque allí ha dejado un hueso. ▬

Ahora podemos enunciar una definición equivalente de evolvente (véase [5], por ejemplo).

Definición 12. *Dada la curva C, dada por la ecuación $\mathbf{x} : I \in s \to \mathbf{x}(s) \in \mathbb{R}^2$ parametrizada por el arco, una evolvente C^*, con ecuación $\alpha : I \in s \to \alpha(s) \in \mathbb{R}^2$, deberá verificar para cada s las dos propiedades siguientes:*

1. *$\alpha(t)$ está sobre la recta tangente a C en s, es decir, existe $h(s)$ con*

$$\alpha(s) = \mathbf{x}(s) + h(s)\mathbf{x}'(s).$$

2. *El vector tangente a C^* en s, $\alpha'(s)$, es ortogonal a $\mathbf{x}'(s)$, es decir:*

$$\alpha'(s) \cdot \mathbf{x}'(s) = 0.$$

Proposición 13. *Las definiciones 7 y 12 de evolvente son equivalentes.*

Demostración. Tenemos que demostrar:

- $\Rightarrow$ Si C^* es evolvente de C, según la Definición 12, entonces se cumplen las condiciones.
- $\Leftarrow$ Si se cumplen las condiciones, entonces C^* es evolvente de C, según la Definición 7.

$\Rightarrow$ Comenzamos con la primera afirmación. En realidad ya lo hemos demostrado. La primera afirmación es la ecuación (5). La segunda afirmación equivale a decir que el vector tangente a la evolvente es ortogonal al vector tangente a la curva, o que el vector normal a la evolvente tiene la misma dirección que el tangente a la curva. O que C es la envolvente de las rectas normales a C^*, como sabemos que es.

$\Leftarrow$ Vayamos con la demostración de la segunda implicación. Hay que demostrar que si se cumplen las condiciones, entonces C es envolvente de las rectas normales a C^*. Como $\alpha'(s)$, es ortogonal a $\mathbf{x}'(s)$ entonces $\alpha''(s)$ (que es ortogonal a $\alpha'(s)$) es paralelo a $\mathbf{x}'(s)$. Esto significa que los vectores tangentes a C son normales a C', como además $\alpha(t)$ está sobre la recta tangente a C en s, se tiene que C es envolvente de las rectas normales a C^*.

De hecho, derivando la primera condición de la definición se obtiene (5):

$$\alpha(s) = \mathbf{x}(s) + (c - s)\,\mathbf{x}'(s),$$

para cierta constante c. □

Vamos a buscar una interpretación geométrica de la evolvente. Como la ecuación de la evolvente cumple (5), entonces para cada $s < c$, el arco de la evolvente C^* comprendido entre s y c se obtiene como la trayectoria que describe el extremo libre de una cuerda que estaba enrollada alrededor de la curva C y que hemos ido desenrollado, entre $\alpha(s)$ y $\alpha(c)$ de forma que siempre está tensa, como se muestra en la figura 5.

En efecto, utilizando que $\|\mathbf{x}'(s)\| = 1$, sabemos que

$$\alpha(s) - \mathbf{x}(s) = (c - s)\,\mathbf{x}'(s) \Longrightarrow \|\alpha(s) - \mathbf{x}(s)\| = |c - s|\,\|\mathbf{x}'(s)\| = c - s.$$

Esta relación dice que la distancia entre $\alpha(s)$ y $\mathbf{x}(s)$ es precisamente longitud del arco de envolvente entre $\alpha(s)$ y $\alpha(c)$.

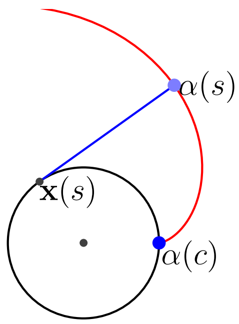

Figura 5: Interpretación geométrica de la evolvente.

Ejemplo 14. *La evolvente de la circunferencia, a veces llamada involuta, es una curva plana de desarrollo, cuyas normales son tangentes de la circunferencia, como ya sabemos. Comn esta interpretación, se tiene cuando se enrolla o desenrolla, por ejemplo, un hilo tenso de una bobina circular.*

Esta interpretación geométrica de la evolvente nos da una tercera definición de evolvente.

Definición 15. *La evolvente de una curva plana C es el lugar geométrico de los puntos P del plano que verifican que la tangente por ellos a la curva C define un punto de tangencia en C que dista del punto P una distancia igual a la longitud del arco de evolvente limitado entre el punto de tangencia y uno fijo de C.*

3. Engranajes y evolventes

La notación utilizada con engranajes a menudo está muy relacionada con curvas. Por ejemplo, se habla de envolvente, de epicicloide, de trocoide, de cicloide,.... Los motivos son porque estas curvas aparecen de una forma o de otra: los engranajes pueden estar formados por dientes con perfil de evolvente de una circunferencia, una parte del perfil puede ser un cicloide o un epicicloide, o se pueden enlazan partes de los perfiles a través de trocoides (que es otro lugar geométrico).

Hay varios motivos para ello. Uno está en el tallado de los dientes, ya que según sea éste, la curva que resulta puede ser una evolvente de circunferencia. Pero también se debe a que en el punto de contacto entre dos dientes de engranajes conjugados (es decir, en el punto de contacto entre la rueda y el piñón), la tangente es común a ambos perfiles en este punto y entonces hay una relación de transmisión constante y una transmisión de energía óptima entre los engranajes.

Los dos engranajes que trabajan juntos deben ser perfiles conjugados. Su funcionamiento se puede apreciar en la Figura 6 o bien ver una animación del mismo en https://goo.gl/xrbeYQ.

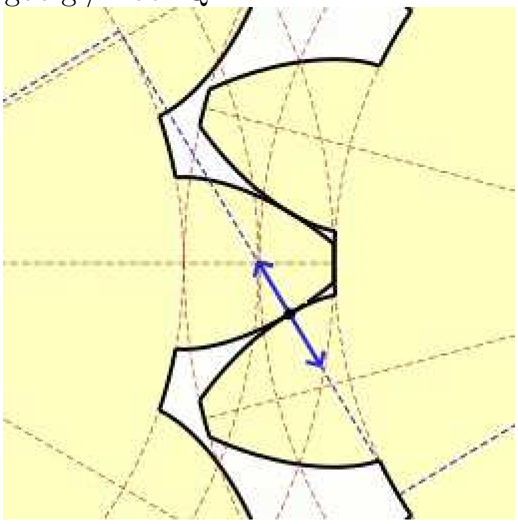

Figura 6: Dientes de evolvente. Imagen original de Claudio Rocchini (Own work) CC-BY-SA-3.0, via Wikimedia Commons

A menudo, en libros referidos estos temas (véase, por ejemplo, [7] o [10]), encontramos la definición de evolvente de circunferencia como lugar geométrico de los puntos de un plano en los que la tangente por ellos a una circunferencia, llamada circunferencia base, define un punto de tangencia que dista del punto considerado una distancia igual a la longitud del arco de la circunferencia base limitado por el punto de tangencia y uno dado de la circunferencia.

Para entender mejor la evolvente como perfil del diente de un engranaje, vamos a describir cómo funciona la herramienta de tallado y a describir algunos elementos que vamos a necesitar más adelante. Para un análisis más completo se puede ver por ejemplo [10]. El tallado de la rueda dentada se hace con herramientas de perfil rectilíneo, en las que la herramienta de corte avanza a medida que la rueda sobre la que se talla gira sobre su centro (véase https://goo.gl/3Q4bsn). El resultado va a ser un diente con perfil de evolvente.

Vamos a describir el tallado con cremallera, aunque hay otros tipos tallado de engranajes por generación. El movimiento de corte de la herramienta es un movimiento de vaivén en la dirección del eje del cilindro base para engranajes rectos. Con este método se generan las dos caras del diente simultáneamente. Además existe otro movimiento, en donde la rueda que se quiere tallar se mueve como si estuviera engranando con la superficie generadora, por consiguiente, el perfil obtenido en la rueda será un perfil conjugado del de la superficie generadora, o sea, un perfil de evolvente.

En la figura 7 se muestran algunos elementos importantes para entender cómo funcionan los engranajes. Los flancos de los dientes de la cremallera son de perfil rectilíneo y si tienen la misma inclinación con la dirección del eje de simetría del diente se generan dientes simétricos. Describamos los elementos que vamos a necesitar.

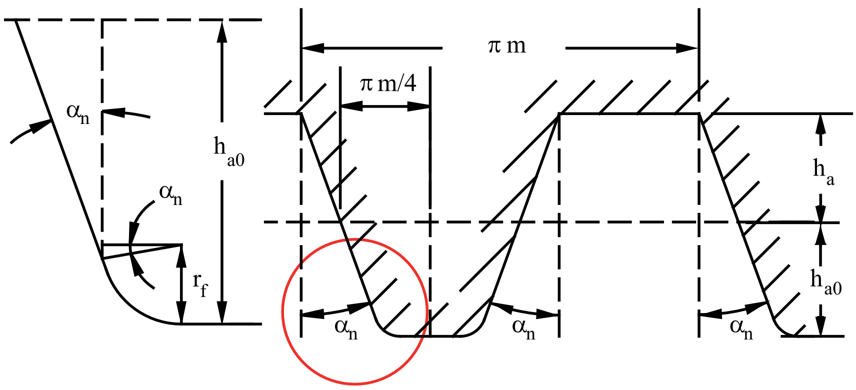

Figura 7: Geometría de la herramienta de tallado. Figura de M. Sánchez Sánchez [10].

- **Línea de referencia**. Se llama también línea primitiva y es la recta trazada siguiendo la dirección del eje longitudinal de la herramienta, a una altura tal, que su intersección con las rectas que forman los perfiles de los dientes determina en ella segmentos que representan el espesor de los dientes y de los huecos, o intervalos entre dientes, de forma que el segmento correspondiente al espesor del diente sea igual al del hueco.

- **Ángulo de presión de la herramienta**. Es ángulo que forman los perfiles de los dientes con la perpendicular a la línea primitiva. Se denota como α_n.

- **Paso circular**. Es la distancia sobre la línea de referencia entre dos puntos semejantes de dos dientes consecutivos. Se denomina p.

- **Módulo**. Es un factor de escala del tamaño, y representa la unidad del sistema de engranajes normalizados. El módulo es el índice del tamaño de los dientes en el Sistema Internacional. Si llamamos m al módulo, se cumple

$$m = \frac{p}{\pi} \Leftrightarrow p = m\pi.$$

En la figura 8 hay un esquema de algunas de las partes de un engranaje.

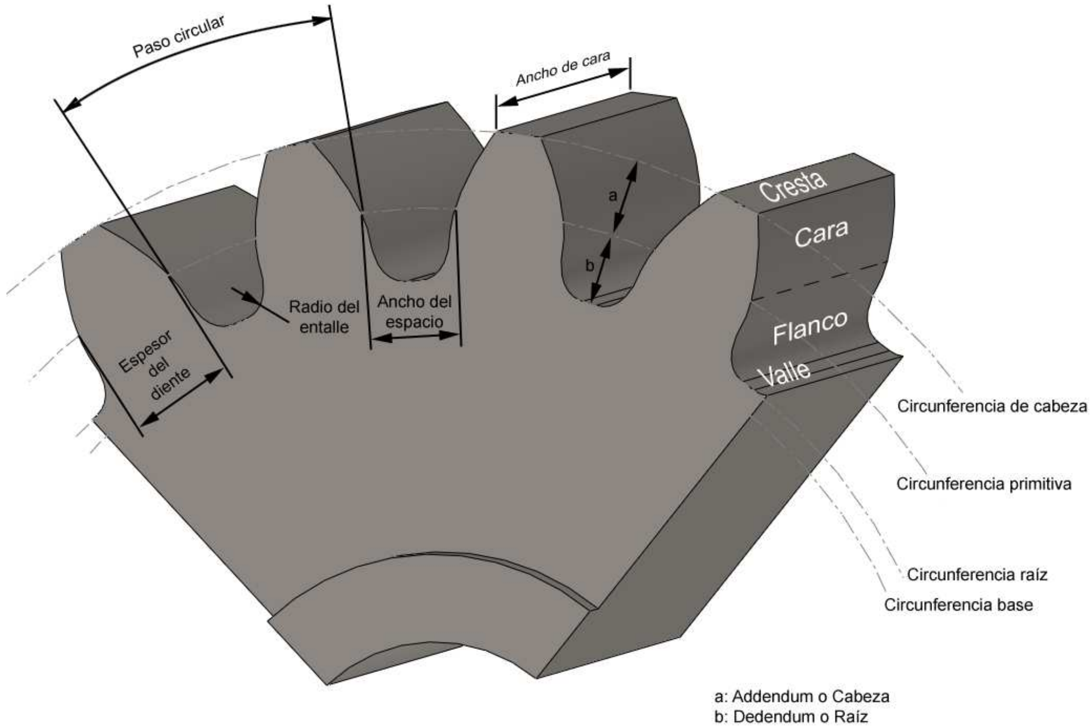

Figura 8: Partes de un engranaje (De Izantux - Trabajo propio, Dominio público, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=6596735)

Vamos a describir de forma breve los elementos más importantes para nuestro propósito (para una idea más completa puede consultar, por ejemplo, [3]). Partimos de un engranaje tallado sobre un cilindro, y de dientes rectos. Para simplificar, vamos a considerarlo figura plana. De la figura 8 destacamos:

- **Número de dientes de la rueda**. Lo denotamos z, aunque a veces también se indica como Z.

- **Circunferencia primitiva o de paso**. Corresponde a la circunferencia de contacto entre dos ruedas de fricción a las que se han incorporado los dientes. Su radio se llama radio primitivo r_p y para engranajes rectos, se verifica:
$$r_p = \frac{mz}{2}.$$

- **Circunferencia base**. Circunferencias a partir de las cuales se generan los perfiles de evolventes. Su radio es r_b. Se cumple
$$r_b = \frac{mz}{2} \cos \alpha_n.$$

- **Addendum, adendo o altura de cabeza**. Es la distancia radial desde el radio primitivo al radio de cabeza. Lo vamos a denotar como h_a, aunque en la figura es a.

- **Deddendum, dedendo o altura de raíz**. Es la distancia radial del radio primitivo al radio inferior. En la figura está representado como b y nosotros lo vamos a llamar h_{ao}.

- **Altura total**. Se denota h y es la suma entre la altura de cabeza y la de raíz:
$$h = h_a + h_{ao}.$$

- **Circunferencia exterior, de cabeza o de addendum**. Es la circunferencia que delimita la rueda en su parte superior. Su radio se llama radio de cabeza, r_e. Para circunferencias talladas sin desplazamiento, se cumple
$$r_e = r_p + mh_a.$$

- **Circunferencia inferior, de raíz, de pie o de deddendum**. Su radio es el radio inferior, r_i. Limita el hueco entre dientes en su parte inferior. Este hueco debe permitir el paso de los dientes de la otra rueda. Para circunferencias talladas sin desplazamiento, se cumple
$$r_i = r_p - mh_{ao}.$$

- **Espesor del diente**. Espesor del diente, medido sobre la circunferencia primitiva. Se denota s y:
$$s = \frac{\pi}{z}.$$

- **Hueco**. Hueco entre dientes, medido sobre la circunferencia primitiva. Se designa como e y se verifica:

$$e = s.$$

Además,

$$p = e + s = \frac{2\pi}{z}.$$

Una vez que hemos descrito estos elementos, vamos a describir el significado del módulo de un engranaje. Sabemos que

$$m = \frac{p}{z}$$

y se puede interpretar como la relación que existe entre el diámetro primitivo d_p y el número de dientes, ya que esta relación es la misma que la que hay entre el paso p y π, ya que

$$\frac{d_p}{z} = \frac{\frac{p \cdot z}{\pi}}{z} = \frac{p}{\pi}.$$

Por eso, el módulo es una magnitud de longitud, expresada en milímetros. El valor del módulo está normalizado según el siguiente criterio:

- De 1 a 4 en incrementos de 0,25 mm,
- De 4 a 7 en incrementos de 0,50 mm,
- De 7 a 14 en incrementos de 1 mm,
- De 14 a 20 en incrementos de 2 mm.

En esta práctica sólo vamos a generar el perfil del diente como una evolvente y no vamos a distinguir la cara[5] y el flanco[6] del diente. La cara y el flanco de los dientes de engranaje transmiten el movimiento del engranaje conductor al conducido: el flanco del engranaje conductor entra en contacto con la cara del engranaje conducido, y el contacto termina entre la cara del conductor y el flanco del conducido. Definir el perfil a partir de dos curvas distintas, una describiendo la cara y otra el flanco, evita problemas como acumulación de tensiones en zonas determinadas, vibraciones o desgaste excesivo.

[5]Parte del perfil situada entre la circunferencia de cabeza y la primitiva.
[6]Parte del perfil situada entre la circunferencia de pie y la primitiva.

Para que dos ruedas dentadas puedan engranar, se deben cumplir unas condiciones, como tener el mismo módulo, el mismo ángulo de presión, deben tener adendo y dedendo normalizados y la anchura del hueco del diente debe ser igual al espesor del diente (medidos sobre la circunferencia primitiva). No nos vamos a detener en este tema, ya que sólo vamos a determinar el diente de una de las ruedas.

Las principales agencias de estandarización y diseño, AGMA (American Gear Manufacturers Association) e ISO (International Organization for Standardization) han adoptado como herramientas normalizadas más usuales las mostradas en las Tablas 1 y 2.

	α_n	h_a	h_{ao}
Herramienta 1	25°	1,0	1,25
Herramienta 2	20°	1,0	1,25
Herramienta 3	20°	1,0	1,40
Herramienta 4	25°	1,0	1,35
Herramienta 5	20°	0,8	1,00

Cuadro 1: Herramientas normalizadas AGMA

	α_n	h_a	h_{ao}
Herramienta 1	20°	1,0	1,25
Herramienta 2	20°	1,0	1,25
Herramienta 3	20°	1,0	1,35
Herramienta 4	20°	1,2	1,50
Herramienta 5	$22,5°$	1,0	1,25
Herramienta 6	$22,5°$	1,0	1,25

Cuadro 2: Herramientas normalizadas ISO

A partir del número de dientes z y del módulo m elegido se determina el radio primitivo r_b, ya que

$$r_p = \frac{mz}{2}.$$

A partir del módulo se dimensionan los tamaños de los engranajes que se van a acoplar.

Ejemplo 16. *Queremos un engranaje con 25 dientes y módulo de 4 mm, entonces el radio primitivo es*

$$r_p = \frac{mz}{2} = \frac{4 \cdot 25}{2} = 50mm.$$

Si queremos que este engranaje se acople a uno de 30 dientes, el radio primitivo de éste último debe ser

$$r_p' = \frac{mz'}{2} = \frac{4 \cdot 30}{2} = 60mm.$$

El radio de cabeza r_e se calcula mediante:

$$r_e = r_p + mh_a,$$

y el radio inferior mediante

$$r_i = r_p - mh_{ao}.$$

Ejemplo 17. *Para el engranaje de 25 dientes y módulo* 4*, tomamos* $h_{ao} = 1{,}25, h_a = 1$*, valores que tomamos de la tabla 2, como Herramienta 2. Entonces:*

$$\begin{aligned} r_e &= r_p + mh_a = 50 + 4 = 54, \\ r_i &= r_p - mh_{ao} = 50 - 4 \cdot 1{,}25 = 45. \end{aligned}$$

La determinación del perfil de evolvente para el diente se hace como evolvente de la circunferencia base. Determinar su radio es sencillo una vez que elegimos un ángulo de presión de la herramienta α_n, porque

$$r_b = \frac{mz}{2} \cos \alpha_n.$$

Ejemplo 18. *Para el engranaje de 25 dientes y módulo* 4*, elegimos, el ángulo de presión de la herramienta 2 de la tabla 2, que es* $\alpha_n = 20^o = \frac{\pi}{9}$ *radianes. Entonces:*

$$r_b = \frac{mz}{2} \cos \alpha_n = \frac{4 \cdot 25}{2} \cos \frac{\pi}{9} = 50 cos \frac{\pi}{9} = 46{,}985.$$

Observe que si queremos relaciones entre los radios base, interior y de cabeza podemos obtenerlas. Sabemos que:

$$\begin{aligned} r_b &= \frac{mz}{2} \cos \alpha_n = r_p \cos \alpha_n, \\ r_e &= \frac{mz}{2} + h_a m = r_p + h_a m \Longrightarrow r_p = r_e - h_a m, \\ r_i &= \frac{mz}{2} - h_{ao} m = r_p - h_{ao} m \Longrightarrow r_p = r_i + h_{ao} m. \end{aligned}$$

A partir de esto, vemos que hay relaciones entre los radios base e interior, o base y exterior, a través del radio primitivo y del módulo. Si queremos que se cumpla, por ejemplo, que los radios base e interior sean iguales, hacemos:

$$\begin{aligned} r_b = r_i &\iff \frac{mz}{2}\cos\alpha_n = \frac{mz}{2} - h_{ao}m \\ &\iff \frac{mz}{2}(1-\cos\alpha_n) = h_{ao}m \\ &\iff \frac{z}{2}(1-\cos\alpha_n) = h_{ao} \\ &\iff z = \frac{2h_{ao}}{1-\cos\alpha_n}. \end{aligned}$$

Se puede dividir entre m porque $m > 0$. Además, sabemos que ya h_a, h_{ao} y α_n están normalizados, luego para que esto se cumpla tenemos que modificar el número de dientes z.

Un desarrollo similar se hace si queremos $r_b > r_i$ o $r_b < r_i$, pero teniendo en cuenta la forma de operar con desigualdades es ligeramente distinto a trabajar con igualdades (sobre todo al multiplicar o dividir por un número negativo).

La práctica consiste en diseñar un diente de engranaje, partiendo de un perfil de envolvente el perfil. Primkero vamos a elegir algunos parámetro de forma que se cumplan algunas condiciones y, a partir de ellos, construimos las curvas implicadas y lo representaremos.

4. Actividades a realizar

Vamos a trabajar con curvas que podrían estar en un engranaje. Partimos de un caso simplificado, donde sólo una curva forma parte del perfil. Va a ser una evolvente.

4.1. Descripción del EEC1

Vamos a diseñar los dientes del engranaje, construyendo la curva que es el perfil del diente, así como determinando qué fracción de las circunferencias de raíz y de cabeza corresponden entre dos perfiles. La curva del perfil va a ser una evolvente, y el resultado va a ser similar al de la figura 6.

Vamos a seguir los siguientes pasos (indicamos puntuación de cada paso, sobre un total de 10 puntos).

1. (1 punto) **Elección del módulo, del número de dientes, del adendo, del dedendo y del ángulo de presión.** Elegimos adendo h_a, de-

dendo h_{ao} y ángulo de presión α_n de la tabla 1 o de la tabla 2. Además, tenemos que elegir un módulo m y un número de dientes z.

Vamos a pedir que se haga esta elección de tal forma que el radio base sea menor que el radio inferior (o de pie), es decir, para que

$$r_b < r_i$$

Elegimos estos valores y a partir de ellos vamos a determinar los otros parámetros.

2. (1 punto) **Determinación de los radios primitivo, base, de pie y de cabeza**. Partimos de un módulo m y un número de dientes z. Elija estos valores, y a partir de ellos determine el radio primitivo, el radio de cabeza, el radio de pie y el radio base.

   Observe que el radio de pie debe ser mayor que el de base.

   Describa cómo lo hace y los resultados que obtiene en un documento con el desarrollo que luego tiene que entregar.

3. (2 puntos) **Determinación del perfil del diente**. A partir de los datos obtenidos, vamos a diseñar el perfil del diente.

   Determine la forma que tiene como sección de evolvente de la circunferencia base que está comprendida entre las circunferencias de pie y de cabeza. Tenga en cuenta que debe determinar la evolvente entre los puntos donde intersecan esta curva con la circunferencia de cabeza (que llamamos B) y de pie (lo llamaremos C).

   Describa el procedimiento e incluya el desarrollo en un documento que luego tiene que entregar.

   Indicación: Partiendo de la circunferencia base $\mathbf{x}_b(t) = (r_b \cos t, r_b \operatorname{sen} t)$, sabemos la ecuación de sus evolventes que parten del punto $(r, 0)$ son:.

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= (r_b \cos t + r_b t \operatorname{sen} t, r_b \operatorname{sen} t - r_b t \cos t), \\ \alpha_2(t) &= (r_b \cos t + r_b t \operatorname{sen} t, r_b t \cos t - r_b \operatorname{sen} t). \end{aligned}$$

   Con ayuda de `Maxima` determine la intersección de una de las evolventes con la circunferencia de cabeza, cuya ecuación implícita es

$$x^2 + y^2 = r_e^2.$$

   Partiendo de esta ecuación implícita y de la ecuación paramétrica de la evolvente, es más sencillo determinar el punto de intersección de la evolvente y la circunferencia de cabeza, B: es $\mathbf{x}_p(t) = (r_e \cos t, r_e \operatorname{sen} t)$. Observe que se trata de determinar el valor de $t > 0$, para el que la evolvente da un punto que verifica $x^2 + y^2 = r_e^2$.

Proceda de igual forma para la determinación del punto C.

4. (1 punto) **Representación gráfica del perfil del diente.** Represente con `Maxima` las circunferencias base, de pie y de cabeza, los puntos B y C y la evolvente comprendida entre las circunferencias de pie y de cabeza.

5. (2 puntos) **Determinación del ancho de la cresta y del ancho del hueco**. Se va a hacer de forma la longitud de la cresta sea igual a la longitud del valle. Si llamamos A al punto medio de la cresta y D al punto medio del valle, entonces el ángulo formado por a, en centro de las circunferencias (que llamamos O) y D es

$$\beta = \frac{\pi}{z}.$$

Si β_1 es el ángulo COD la longitud del arco de circunferencia de pie entre C y D es

$$l_i = \beta_1 r_i.$$

De la misma forma, si β_2 es el ángulo AOB la longitud del arco de circunferencia de pie entre A y B es

$$l_e = \beta_2 r_e.$$

Queremos que sean iguales, es decir: $l_e = l_i$. Como podemos las ecuaciones de los puntos B y C, podemos calcular el ángulo β' formado por BOC y así tenemos β_1, β_2, porque

$$\beta = \frac{\pi}{z} = \beta_1 + \beta_2 + \beta'.$$

La situación se describe en la figura 9.

Conociendo los ángulos, es sencillo determinar las coordenadas de A y D.

6. (2 puntos) **Representación gráfica de todas las curvas**. Represente con `Maxima` los arcos de circunferencia obtenidos, así la evolvente y las circunferencias base, de pie y de cabeza, los puntos A, B, C y D, la cresta y el hueco del medio diente (en un grosor distinto al de las circunferencia respectivas). Represente cada curva en un color distinto.

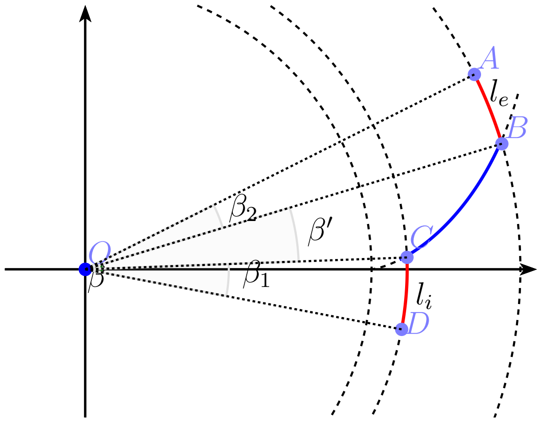

Figura 9: Descripción de los ángulos.

7. (1 punto) **Análisis de los resultados**. Note que hemos hecho simplificaciones que hacen que este engranaje no sea perfecto. Arguemente motivos por los que no va a funcionar, o explique cómo podíamos haberlohecho todavía peor, es decir, explique motivos que hace que un engranaje no funcione.

   Puede ayudarle plantearse, por ejemplo, las siguientes preguntas:

   ¿Qué ocurre cuando el contacto entre dos dientes conjugados no es tangente? ¿Pasa esto en alguna zona del diente que hemos diseñado? ¿Qué consecuencias tiene?

   ¿Qué ocurre cuando si el diente es muy apuntado o muy corto?

8. **Para nota más allá del 10**. Proponemos dos actividades para poder obtener nota adicional. Esta nota se sumará a la nota del EEC y el total se sumará, multiplicada por 0.2, a las otras notas prorrateadas (a la del examen y de los EEC2).

   a) (Hasta 2 puntos adicionales). Genere todo el engranaje, aplicando rotaciones y simetrías como transformaciones afines a la sección de diente que hemos diseñado.

   b) (Hasta 1 punto adicional) **Representación gráfica de evolvente o evoluta.** Represente gráficamente una curva y su evoluta o su evolvente con `Maxima`. Puede utilizar los documentos referentes a curvas planas y `Maxima` que están en el curso virtual. Incluya lo que ha hecho en un documento de `Maxima`.

4.2. Documentación a entregar

Al terminar los EEC-1 debe tener dos ficheros con el trabajo realizado:

- Un fichero con todo el desarrollo de las curvas, explicando qué se hace en cada paso y determinado los parámetros y características pedidos. Puede hacer los cálculos con `Maxima`, pero debe justificar por qué son esos valores. Debe estar preferiblemente en un documento pdf, pero puede estar escrito a mano. Debe incluir las gráficas, si está escrito a mano, éstas deben estar en el documento de `Maxima`, y se deben copiar (a mano alzada o como quiera) aquí.
- Un fichero `Maxima` con las representaciones gráficas pedidas.

Además, debe haber firmado la declaración jurada de autoría de estos EEC-1 (disponible en el curso virtual) y debe entregarla junto con estos ficheros.

Para enviar los documentos debe comprimir todos ficheros y debe adjuntarlo en la tarea creada con este fin, del curso virtual, como un único fichero.

Bibliografía

[1] García Prada, J.C., Castejón Sisamon, C., Rubio Alonso, H., Meneses Alonso, J., 2015. Práctica 8. Nomenclatura y tallado de dientes de engranajes OCW Teoría de Máquinas, Universidad Carlos III de Madrid. Consultado el 2 de diciembre de 2016 en http://ocw.uc3m.es/ingenieria-mecanica/teoria-de-maquinas/practicas-1/pblanco.pdf/view.

[2] García Prada, J.C., Castejón Sisamon, C., Rubio Alonso, H., Meneses Alonso, J., 2015. Práctica 9. Caracterización y generación de dientes de engranajes. OCW Teoría de Máquinas, Universidad Carlos III de Madrid. Consultado el 2 de diciembre de 2016 en http://ocw.uc3m.es/ingenieria-mecanica/teoria-de-maquinas/practicas-1/p10.pdf/view.

[3] García Prada, J.C., Castejón Sisamon, C., Rubio Alonso, H., Meneses Alonso, J., 2015. Tema 6 Teoría general de Engranajes OCW Teoría de Máquinas, Universidad Carlos III de Madrid. Consultado el 2 de diciembre de 2016 en http://ocw.uc3m.es/ingenieria-mecanica/teoria-de-maquinas/material-de-clase-1/tema5-Engranajes.ppt/view.

[4] Granados Quezada, S.R., 2012, Engranaje por generación ISPHDE. Consultado el 2 de diciembre de 2016 en https://www.youtube.com/watch?v=mkvAXTtZ-w8.

[5] Lafuente, J., 1998. Geometría diferencial de curvas en el plano. UCM (disponible el 2 de diciembre en https://goo.gl/9pZaqP).

[6] Litvin, F.L., Fuentes, A., 2004. Gear geometry and applied theory. Cambridge University press. 800 pp.

[7] Pedrero, J. I., 1996. Análisis dinámico de engranajes cilíndricos de perfil de evolvente. UNED, Madrid.

[8] Nieto Quijorna, A.J., 2007. Apuntes de Elementos de Máquinas, Grado en Ingeniería Mecánica, UCLM (disponible en https://goo.gl/scJo5F).

[9] Rodríguez Marín, L., 1996. Ampliación de Cálculo, 3^o edición. UNED, Madrid. 320 pp.

[10] Sánchez Sánchez, M.B., 2013. Modelo de cálculo resistente de engranajes cilíndricos de alto grad de recubrimiento. Tesis doctoral. UNED. Madrid. 298 pp.