ECUACIONES DIFERENCIALES

Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales
Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior

1. El Problema de Valor Inicial. Teoría general.

2. Sistemas con coeficientes constantes.
La forma canónica de Jordan.

3. La transformada de Laplace.

4. El método de las series de potencias.

1. El Problema de Valor Inicial. Teoría general.

En este bloque estudiaremos los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables:

$$
(1) \qquad \begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t), \\ x_2' = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t), \\ \qquad \vdots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t), \end{cases}
$$

donde

$$
(2) \qquad \begin{cases} b_i \in \mathcal{C}^0((\alpha, \beta); I\!R) & \text{para todo } 1 \leq i \leq n, \\ a_{ij} \in \mathcal{C}^0((\alpha, \beta); I\!R) & \text{para todo } 1 \leq i, j \leq n, \end{cases}
$$

siendo (α, β) es un intervalo no vacío de $I\!R$ ($(\alpha, \beta) \subseteq I\!R$).

$A = A(t)$ será la matriz $n \times n$ de coeficientes $(a_{ij}(t))$, por $b = b(t)$ será el vector columna de componentes $b_i(t)$. De forma general e si $M = (m_{ij})$ es una matriz $p \times m$ entonces usaremos la siguiente notación:

$$
M'(t) = \frac{dM(t)}{dt} = \big(m_{ij}'(t)\big)
$$

y

$$
\int_{t_1}^{t_2} M(t)dt = (\mu_{ij}(t_1, t_2)) \text{ con } \mu_{ij}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} m_{ij}(t)dt.
$$

Entonces el sistema de ecuaciones diferenciales (1) puede escribirse matriciálmente como

$$
(3) \qquad X' = A(t)\, X \,+\, b(t).
$$

Si el vector b es idénticamente nulo, i.e. $b_i(t) = 0$ para todo $t \in (\alpha, \beta)$ y todo $i = 1, 2, \cdots, n$ se dice que el sistema es homogéneo:

$$
(4) \qquad X' = A(t)\, X.
$$

Si las funciones (a_{ij}) son todas constantes tendremos un sistema lineal con coeficientes constantes

$$
X' = A\, X \,+\, b(t).
$$

Para éstos se puede desarrollar un método para hallar las soluciones explícitas.

Si las funciones (a_{ij}) son todas periódicas de periodo τ tendremos un sistema de ecuaciones diferenciales con coeficientes periódicos. Los sistemas homogéneos con coeficientes periódicos son particularmente importantes.

1.1. El Problema de Valor Inicial. El problema de valor inicial asociado al sistema (3) en un punto $t_0 \in (\alpha, \beta)$ consiste en hallar la función vectorial $X \in \mathcal{C}^1((\alpha, \beta); I\!R^{\mathrm{n}})$ que verifique

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} X' = A(t)\,X \, + \, b(t) & \text{para todo } t \in (\alpha, \beta)\ , \\ X(t_0) = X^0 & \text{para } X^0 \in I\!R^{\mathrm{n}} \text{ dado.} \end{cases}$$

Se podrá comprobar fácilmente que** X **es solución de** (5) **si y sólo si

$$\text{(6)} \qquad X(t) = X^0 \, + \int_{t_0}^{t} A(s)\,X(s)\,ds \quad \text{para todo } t \in (\alpha\ , \beta)\ .$$

A continuación enunciaremos el teorema de existencia y unicidad de la solución del problema de valor inicial (5):

Teorema 1.1. (Existencia y unicidad de la solución) *Supongamos que se verifican las hipótesis* (2)*, entonces existe una única función vectorial* $X \in \mathcal{C}^1((\alpha, \beta); I\!R^{\mathrm{n}})$ *solución de* (5)*.*

La demostración de este teorema se dará en el siguiente bloque.

La estructura del conjunto de soluciones del sistema homogéneo y no homogenéo tiene particular interés. Se comprueba fácilmente que una combinación lineal de soluciones del sistema homogéneo (4) también es solución de ese sistema. Por otra parte, se comprueba trivialmente que la suma de una solución del sistema no homogéneo (1) y de una solución del sistema homogéneo (4) sigue siendo una solución del sistema no homogéneo.

Concretando, tenemos:

Teorema 1.2. (Estructura del conjunto de soluciones de (4)). *El conjunto de soluciones del sistema homogéneo*

$$X' = A(t)\,X$$

es un espacio vectorial de dimensión n*.*

Demostración. Se comprueba fácilmente que cualquier combinación lineal de soluciones de (4) es también una solución por lo que este conjunto es un espacio vectorial. Consideremos cualquier base de $I\!R^{\mathrm{n}}$: $(X^{(1,0)}, X^{(2,0)}, \cdots, X^{(n,0)})$ y consideremos la (única) solución de cada uno de los n problemas de valor inicial:

$$\text{para todo } 1 \le i \le n \qquad \begin{cases} \dfrac{d\,X^i}{d\,t} = A(t)\,X^i & \text{para todo } t \in (\alpha, \beta)\ , \\ X^i(t_0) = X^{(i,0)}, & \end{cases}$$

entonces, $(X^1, X^2, \cdots, X^n)$ constituye una base del espacio de soluciones. En efecto estas n soluciones son linealmente independientes dado que si para n números reales α_i, $i =$

$1, 2, \cdots, n$ tenemos

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X^i = 0$$

y en particular para $t = t_0$ tenemos

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X^{(i,0)} = 0$$

y, dado que $(X^{(i,0)})_{i=1}^n$ es una base de $I\!R^{\mathrm{n}}$, deducimos que $\alpha_i = 0$ para $i = 1, 2, \cdots, n$ y $(X^i)_{i=1}^n$ constituye un subconjunto linealmente independiente del espacio de soluciones. Sea cualquier solución X del sistema homogéneo y sea $X^0 = X(t_0)$, existen n números reales tales que

$$X^0 = \sum_{i=1}^{n} c_i X^{(i,0)}$$

por lo que tendremos

$$X = \sum_{i=1}^{n} c_i X^i,$$

lo que hace de $(X^i)_{i=1}^n$ una base del espacio de soluciones.

Alternativamente podemos observar que la aplicación

$$X^0 \mapsto X$$

donde X es la solución de (4) que verifica $X(t_0) = X^0$, es lineal y, que el Teorema de existencia y unicidad la convierte en isomorfismo de $I\!R^{\mathrm{n}}$ en el conjunto de las soluciones del sistema homogéneo (4). $\square$

En cuanto al sistema lineal no homogéneo

$$X' = A(t)\, X \;+\; b(t)$$

se comprueba con facilidad que la solución general se obtiene sumando una solución particular a la solución general del sistema homogéneo. Así mismo la solución del problema de valor inicial para el sistema no homogéneo

$$\left\{ \begin{array}{ll} X' = A(t)\, X \;+\; b(t) & \text{para todo } t \in (\alpha, \beta), \\ X(t_0) = X^0 & \text{para algún } t_0 \in (\alpha, \beta), \end{array} \right.$$

se obtiene sumando una *solución cualquiera* Y del problema no homogéneo

$$Y' = A(t)\, Y \;+\; b(t) \qquad \text{para todo } t \in (\alpha, \beta)$$

con la solución del problema de valor inicial para el sistema homogéneo

$$\left\{ \begin{array}{ll} Z' = A(t)\, Z & \text{para todo } t \in (\alpha, \beta), \\ Z(t_0) = X^0 - Y(t_0). & \end{array} \right.$$

Como veremos más adelante, conociendo la solución general del sistema homogéneo se puede, mediante un método de variación de constantes, obtener una solución particular del sistema no homogéneo.

1.2. Matriz fundamental. Sistema fundamental de soluciones. En esta sección consideramos el sistema homogéneo de ecuaciones diferenciales (4). Se denomina sistema fundamental de soluciones del sistema homogéneo un conjunto de n soluciones de (4) que sean linealmente independientes. En otras palabras, un sistema fundamental de soluciones es una base del espacio vectorial de soluciones del sistema lineal homogéneo. A un sistema fundamental se le asocia la matriz cuyas columnas son los elementos de ese sistema:

Definición 1.3. *Una matriz fundamental $\Phi(t)$ de nuestro sistema lineal es una matriz cuyas columnas son n soluciones linealmente independientes del sistema* (4)*.*

En definitiva, si

$$\phi^i(t) = \begin{pmatrix} \phi_1^i(t) \\ \phi_2^i(t) \\ \vdots \\ \phi_n^i(t) \end{pmatrix}$$

para $i = 1, 2 \cdots, n$ son n soluciones linealmente independientes del sistema (4), constituyen una base del espacio vectorial de las soluciones, luego es un sistema fundamental de soluciones de (4) y la matriz

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_1^1(t) & \phi_1^2(t) & \cdots & \phi_1^n(t) \\ \phi_2^1(t) & \phi_2^2(t) & \cdots & \phi_2^n(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \phi_n^1(t) & \phi_n^2(t) & \cdots & \phi_n^n(t) \end{pmatrix} \tag{7}$$

es una matriz fundamental del sistema lineal homogéneo.

Siguiendo con las definiciones

Definición 1.4. *Se llama wronskiano de un sistema fundamental de soluciones al determinante de la correspondiente matriz fundamental:*

$$W(t) = det(\Phi(t)) \quad \textit{para todo } t \in (\alpha, \beta).$$

El wronskiano será una función no nula:

Proposición 1.5. *Para que una matriz $\Phi(t)$ cuyas columnas son soluciones del sistema homogéneo* (4) *sea una matriz fundamental es necesario y suficiente que $det\,(\Phi(t)) \neq 0$ para todo $t \in (\alpha, \beta)$ lo cual es equivalente a decir que $det\,(\Phi(\tau)) \neq 0$ para algún $\tau \in (\alpha, \beta)$.*

Demostración. Como consecuencia del teorema de existencia y unicidad de soluciones, para que n soluciones del sistema lineal sean linealmente independientes en el intervalo (α, β) es necesario y suficiente que lo sean en un punto τ cualquiera de este intervalo. $\square$

Observación. De forma general, si φ^i, para $i = 1, 2, \cdots, n$ son n funciones a valor en $I\!R^{\mathrm{n}}$ linealmente independientes en el intervalo (α, β) y si consideramos la matriz cuyas columnas son esas funciones

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1^1(t) & \varphi_1^2(t) & \cdots & \varphi_1^n(t) \\ \varphi_2^1(t) & \varphi_2^2(t) & \cdots & \phi_2^n(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_n^1(t) & \varphi_n^2(t) & \cdots & \varphi_n^n(t) \end{pmatrix}$$

entonces no se tiene necesariamente $det(\varphi(t)) \neq 0$ para todo t. Para $n = 2$ consideremos, en el intervalo $(-2, 2)$ las funciones vectoriales

$$\varphi^1(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ |t| \end{pmatrix}$$

y

$$\varphi^2(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix},$$

y la matriz

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} t^2 & t^2 \\ |t| & t \end{pmatrix}.$$

Es evidente que φ^1 y φ^2 son linealmente independientes dado que

$$c_1\, \varphi^1(t)\,, + c_2\, \varphi^2(t) = 0$$

para todo $t \in (-2, 2)$ implica, en particular, que para $t = -1$ tengamos:

$$\begin{array}{l} c_1 \ + \ c_2 = 0 \\ c_1 \ - \ c_2 = 0 \end{array}$$

por lo que $c_1 = c_2 = 0$.

Sin embargo, considerando el determinante

$$det(\varphi(t)) = t^3 - |t|^3 = \begin{cases} 2\,t^3 & \text{para } t \leq 0 \ , \\ 0 & \text{para } t \geq 0. \end{cases} \quad \square$$

Para completar esta observación tenemos:

Proposición 1.6. *Sean n funciones vectoriales $\varphi^i \in \mathcal{C}^1((\alpha, \beta); I\!R^{\mathrm{n}})$, para $i = 1, 2, \cdots, n$,*

$$\varphi^i(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1^i(t) \\ \varphi_2^i(t) \\ \vdots \\ \varphi_n^i(t) \end{pmatrix}$$

tales que la matriz

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1^1(t) & \varphi_1^2(t) & \cdots & \varphi_1^n(t) \\ \varphi_2^1(t) & \varphi_2^2(t) & \cdots & \varphi_2^n(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_n^1(t) & \varphi_n^2(t) & \cdots & \varphi_n^n(t) \end{pmatrix}$$

verifique $\mathbf{det}(\varphi(\mathbf{t}) \neq \mathbf{0}$ *para todo* $t \in (\alpha, \beta)$*, entonces existe una matriz* $B(t)$ *de coeficientes* $b_{ij}(t)$ *continuos, tal que las funciones vectoriales* φ^i *sean solución del sistema homogéneo*

$$\frac{d\varphi^i}{dt} = B(t)\,\varphi^i.$$

Demostración. (Se deja como práctica.) □

Proposición 1.7. *Consideremos una matriz fundamental* $\Phi(t)$ *de nuestro sistema homogéneo* (4) *y consideremos una matriz de coeficientes constantes* C*. Entonces*

1. *Las columnas de la matriz* $\Phi(t)\,C$ *son soluciones del sistema* (4)*.*
2. *Si* C *es no singular la matriz* $\Phi(t)\,C$ *es una matriz fundamental del sistema.*
3. *Para toda matriz fundamental* $\hat{\Phi}(t)$ *existe una única matriz no singular de coeficientes constantes tal que* $\hat{\Phi}(t) = \Phi(t)\,C$*.*
4. *La solución del problema de valor inicial*

$$\begin{cases} X' = A(t)\,X & \textit{para todo } t \in (\alpha, \beta)\ , \\ X(t_0) = X^0 & \textit{para } X^0 \in I\!R^{\mathrm{n}} \textit{ dado.} \end{cases}$$

   es $X(t) = \Phi(t)\ (\Phi(t_0))^{-1}\ X_0$*.*

5. *Sea* C *una matriz no singular de coeficientes constantes entonces existe una única matriz fundamental* $\Phi(t)$ *que verifique* $\Phi(t_0) = C$*.*

Demostración.

1. Consideremos la matriz $\Phi(t)\,C$. Sus columnas son de la forma:

$$(\Phi(t)\,C)^j = \sum_{i=1}^{n} \phi^i c_{ij}$$

donde $(\Phi(t)\,C)^j$ representa la columna j de la matriz producto $\Phi(t)\,C$. Obviamente las columnas de la matriz producto son combinaciones lineales de las columnas de $\Phi(t)$ y, por lo tanto, son soluciones del sistema homogéneo.

2. Si la matriz C es no singular también lo es la matriz $\Phi(t)\,C$ dado que $det\,(\Phi(t)\,C) = det\,(\Phi(t))\,det\,(C)$. Por lo tanto las columnas de la matriz producto constituyen n soluciones linealmente independientes del sistema (4) luego la matriz producto $\Phi(t)\,C$ es una matriz fundamental del sistema.

3. Las columnas de $\Phi(t)$ y de $\hat{\Phi}(t)$ constituyen sendos sistemas fundamentales de soluciones $\phi^i(t)$ y $\hat{\phi}^i(t)$, $i = 1, 2, \cdots, n$. Las segundas se pueden expresar como combinación lineal de las primeras:

$$\hat{\phi}^i(t) = \sum_{j=1}^{n} \phi^j(t) c_{ij},$$

i.e.

$$\hat{\Phi}(t) = \Phi(t)C \quad \text{siendo } C \text{ la matriz de coeficientes } (c_{ij}).$$

Luego, como C es un producto de matrices no singulares $C = (\Phi(t))^{-1}\,\hat{\Phi}(t)$, también es una matriz no singular.
4. $X(t) = \Phi(t)\ (\Phi(t_0))^{-1}\ X_0$ es una combinación lineal de soluciones (las columnas de $\Phi(t)$) luego es una solución del sistema homgéneo. Para $t = t_0$ X toma el valor $X(t_0) = \Phi(t_0)\ (\Phi(t_0))^{-1}\ X_0 = X_0$. **5.** Este último punto es trivial. □

Proposición 1.8. *Sea $\Phi(t)$ una matriz cuyas columnas son soluciones del sistema (4). Entonces, para todo t y todo t_0 de (α, β) tenemos*

$$det\,(\Phi(t)) = det\,(\Phi(t_0)) \exp \int_{t_0}^{t} Tr\,[A(s)]\; ds,$$

(siendo $Tr\,[A(s)] = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(s)$ la traza de la matriz $A(s)$.

Demostración. consideremos el determinante

$$det\,(\Phi(t)) = \begin{vmatrix} \phi_1^1(t) & \phi_1^2(t) & \cdots & \phi_1^n(t) \\ \phi_2^1(t) & \phi_2^2(t) & \cdots & \phi_2^n(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \phi_n^1(t) & \phi_n^2(t) & \cdots & \phi_n^n(t) \end{vmatrix}.$$

La derivada de ese determinante es:

$$(8) \quad det\,(\Phi(t))' = \begin{vmatrix} (\phi_1^1)'(t) & (\phi_1^2)'(t) & \cdots & (\phi_1^n)'(t) \\ \phi_2^1(t) & \phi_2^2(t) & \cdots & \phi_2^n(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \phi_n^1(t) & \phi_n^2(t) & \cdots & \phi_n^n(t) \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \phi_1^1(t) & \phi_1^2(t) & \cdots & \phi_1^n(t) \\ (\phi_2^1)'(t) & (\phi_2^2)'(t) & \cdots & (\phi_2^n)'(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \phi_n^1(t) & \phi_n^2(t) & \cdots & \phi_n^n(t) \end{vmatrix}$$

$$+ \cdots + \begin{vmatrix} \phi_1^1(t) & \phi_1^2(t) & \cdots & \phi_1^n(t) \\ \phi_2^1(t) & \phi_2^2(t) & \cdots & \phi_2^n(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (\phi_n^1)'(t) & (\phi_n^2)'(t) & \cdots & (\phi_n^n)'(t) \end{vmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que $(\phi_i^j)'(t) = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t)\phi_k^j(t)$ el primer determinante de (8) se convierte en:

$$\begin{vmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}(t)\phi_k^1(t) & \sum_{k=1}^n a_{1k}(t)\phi_k^2(t) & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{1k}(t)\phi_k^n(t) \\ \phi_2^1(t) & \phi_2^2(t) & \cdots & \phi_2^n(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \phi_n^1(t) & \phi_n^2(t) & \cdots & \phi_n^n(t) \end{vmatrix}.$$

Este determinante no cambia si restamos de la primera linea la segunda multiplicada por $a_{12}(t)$, la tercera multiplicada por $a_{13}(t)$, hasta la última multiplicada por $a_{1n}(t)$. Entonces la expresión de ese primer determinante se convierte en

$$\begin{vmatrix} a_{11}(t)\phi_1^1(t) & a_{11}(t)\phi_1^2(t) & \cdots & a_{11}(t)\phi_1^n(t) \\ \phi_2^1(t) & \phi_2^2(t) & \cdots & \phi_2^n(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \phi_n^1(t) & \phi_n^2(t) & \cdots & \phi_n^n(t) \end{vmatrix}$$

y es igual a

$$a_{11}(t)\begin{vmatrix} \phi_1^1(t) & \phi_1^2(t) & \cdots & \phi_1^n(t) \\ \phi_2^1(t) & \phi_2^2(t) & \cdots & \phi_2^n(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \phi_n^1(t) & \phi_n^2(t) & \cdots & \phi_n^n(t) \end{vmatrix}.$$

El mismo razonamiento en los demás determinantes nos lleva a

$$det(\Phi(t))' = \sum_{i=1}^n a_{ii}(t)det(\Phi(t)) = Tr[A(t)]det(\Phi(t))$$

por lo que $det(\Phi(t))$ es satisface una ecuación diferencial cuya solución es

$$det(\Phi(t)) = det(\Phi(t_0)) \exp \int_{t_0}^t Tr[A(s)]\, ds. \quad \square$$

Sistemas lineales con coeficientes constantes. Si A es constante las soluciones del sistema X'=AX están definidas en todo $I\!R$. Denotamos por $\Phi(t)$ a la matriz fundamental que satisface: $\Phi(0) = I$. Se tiene:

Proposición 1.9. 1. *La solución del problema de valor inicial*

$$\begin{cases} X' = AX & en\ I\!R, \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

es $X(t) = \Phi(t)X_0$.

2. $\Phi(t+s) = \Phi(t)\Phi(s)$ *para todo* t *y* s *de* $I\!R$.
3. $\Phi(-t) = (\Phi(t))^{-1}$.

Demostración. **1.** El primer punto de proposición es consecuencia inmediata del punto 4. de la Proposición 1.7 teniendo en cuenta que $t_0 = 0$ y que $(\Phi(t_0))^{-1} = I$.

2. Al ser constante la matriz A, tanto $\Phi(t+s)$ como $\Phi(t)\Phi(s)$ son soluciones del sistema lineal dado que:

$$\Phi'(t+s) = A\,\Phi(t+s)$$

y

$$\Phi'(t)\Phi(s) = A\,\Phi(t)\Phi(s).$$

Por otra parte, dado que $\Phi(0) = I$, ambas soluciones coinciden en $t = 0$, siendo iguales a $\Phi(s)$ por lo que, en aplicación del teorema de unicidad, coinciden en todo $\mathbb{R}$.

3. Aplicando 2. tenemos $\Phi(t)\Phi(-t) = \Phi(0) = I$. $\square$

1.3. El método de variación de constantes para sistemas lineales no homogéneos. En el caso del sistema no homogéneo podemos desarrollar un método de variación de constantes que es el equivalente del método de mismo nombre desarrollado en las ecuaciones escalares.

El conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo se puede describir como $X_p + \mathfrak{S}$ siendo X_p una solución particular del sistema no homogéneo y $\mathfrak{S}$ el espacio vectorial de las soluciones del sistema homogéneo. En efecto, dadas dos soluciones X_p y X_q del sistema no homogéneo, se comprueba fácilmente que $X_p - X - q$ es una solución del sistema homogéneo. En otras palabras tenemos: $X(t) = \Phi(t)Y + X_p$ describe el conjunto de soluciones del sistema no homogéneo cuando Y describe $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$.

Teorema 1.10. *Sea $\Phi(t)$ una matriz fundamental de $X' = A(t)X$, entonces*

1. *La función vectorial*

$$X_p(t) = \Phi(t)\int_{t_0}^{t}(\Phi(s))^{-1}b(s)\,ds \quad \textit{para } t \textit{ y } t_0 \in (\alpha,\beta) \tag{9}$$

   es la solución particular del sistema no homogéneo $X' = A(t)X + b(t)$ que verifica $X_i(t_0) = 0$ para $i = 1, 2, \cdots, n$.

2. *La función vectorial*

$$X(t) = \Phi(t)(\Phi(t_0))^{-1}X_0 \,+\, \Phi(t)\int_{t_0}^{t}(\Phi(s))^{-1}b(s)\,ds \tag{10}$$

   es la solución particular del sistema no homogéneo $X' = A(t)X + b(t)$ que verifica $X(t_0) = X_0 \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$.

3. *Si $A(t) = A$ es una matriz de coeficientes constantes, si $\Phi(t)$ es la matriz fundamental del sistema $X' = AX$ que verifica $\Phi(0) = I$ y si $b \in \mathcal{C}^0((\alpha,\beta);\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ con $\alpha < 0 < \beta$ entonces*

$$X(t) = \Phi(t)X_0 + \int_0^t \Phi(t-s)b(s)\,ds$$

es la forma que toma la solución particular del sistema no homogéneo $X' = AX + b(t)$ *que verifica* $X(0) = X_0 \in I\!R^{\mathrm{n}}$.

Demostración. **1.** Sean $B(t)$ y $D(t)$ dos matrices $m \times p$ y $p \times q$ respectivamente, con m, p y $q \geq 1$ y con coeficientes continuos y derivables en un intervalo $(\alpha, \beta) \subseteq I\!R$. Entonces la matriz producto se deriva como sigue:

$$\frac{dB(t)D(t)}{dt} = \frac{dB(t)}{dt} D(t) \; + \; B(t) \frac{dD(t)}{dt}.$$

Aplicando esta formula al producto

$$X_p = \Phi(t) \int_{t_0}^{t} (\Phi(s))^{-1} b(s)\, ds$$

obtenemos

$$\begin{aligned} X_p' &= \Phi'(t) \int_{t_0}^{t} (\Phi(s))^{-1} b(s)\, ds \; + \; \Phi(t)(\Phi(t))^{-1} b(t)\, ds \\ &= A(t)\Phi(t) \int_{t_0}^{t} (\Phi(s))^{-1} b(s)\, ds + b(t) = A(t)X_p + b(t) \end{aligned}$$

luego X_p es una solución del sistema lineal no homogéneo. Por otra parte se comprueba inmediatamente que

$$X_p(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. $\Phi(t)(\Phi(t_0))^{-1} X_0$ es la solución del sistema lineal homogéneo que vale X_0 en t_0 y $\Phi(t) \int_{t_0}^{t} (\Phi(s))^{-1} b(s)\, ds$ es la solución del sistema lineal no homogéneo que vale 0 en t_0 por lo que $X(t)$ es la solución del sistema lineal no homogéneo que vale X_0 en t_0.

3. (10) es la particularización de (9) a las hitótesis de este tercer apartado del teorema.

1.4. Ecuaciones lineales de orden superior. En este apartado aplicaremos los conocimientos sobre sistemas lineales al estudio de ecuaciones lineales de orden mayor que 1. Recordamos que una ecuación lineal de orden n es una ecuación de la forma:

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{n-1)} + a_2(t)x^{(n-2)} + \cdots + a_n(t)x = c(t). \tag{11}$$

Suponemos que los coeficientes a_i, $i = 1, 2, \cdots, n$ y c son funciones de $\mathcal{C}^0((\alpha, \beta); I\!R)$ para algún intervalo $(\alpha, \beta) \subseteq I\!R$.

Resolveremos esta ecuación transformando (11) en un sistema lineal no homogéneo como los que hemos estudiado anteriormente. Para ello introducimos las siguientes funciones:

$$x_1 = x, \quad x_2 = x', \quad \cdots, \quad x_n = x^{(n-1)}.$$

Estas nuevas funciones satisfacen el sistema lineal:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \qquad \vdots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = -a_n(t)x_1 - a - n - 1(t)x_2 - \cdots - a_1(t)x_n + c(t) \end{array}\right. . \tag{12}$$

Dicho sistema se escribe en forma vectorial

$$X' = A(t)\,X \,+\, b(t) \tag{13}$$

donde

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c(t)) \end{pmatrix},$$

y

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \cdots & -a_1(t) \end{pmatrix}.$$

La ecuación diferencial lineal de orden n (11) y el sistema de ecuaciones lineales de primer orden (13) son equivalentes. En efecto, sea $x = \varphi(t))$ una solución de (11) entonces

$$X = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t)) \end{pmatrix}$$

es una solución de (13). Recíprocamente, si

$$X = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t)) \end{pmatrix}$$

es una solución de (12) (y (13)) entonces

$$\begin{cases} \varphi_1'(t) = \varphi_2(t) \\ \varphi_1''(t) = \varphi_2'(t) = \varphi_3(t) \\ \qquad \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) = \varphi_2^{(n-2)}(t) = \cdots = \varphi_{n-1}'(t) = \varphi_n(t) \\ \varphi_1^{(n)}(t) = \varphi_2^{(n-1)}(t) = \cdots = \varphi_{n-1}''(t) = \varphi_n'(t), \end{cases}$$

Y dado que

$$\varphi_n'(t) = -a_n(t)\varphi_1(t) - a_{n-1}(t)\varphi_2(t)(t) - \cdots - a_1(t)\varphi_n + c(t)$$

se concluye que

$$\varphi_1^{(n)} = -a_n(t)\varphi_1(t) - a_{n-1}(t)\varphi_1'(t)(t) - \cdots - a_1(t)\varphi_1^{(n-1)} + c(t)$$

luego φ_1 es solución de la ecuación lineal no homogénea (11).

De todo esto se deduce:

Proposición 1.11. *Sea $a_i \in \mathcal{C}^0((\alpha,\beta);I\!R)$, para $i = 1, 2, \cdots, n$ entonces el espacio de las soluciones de*

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{n-1)} + a_2(t)x^{(n-2)} + \cdots + a_n(t)x = 0$$

es un espacio de dimensión n. Además, sea $c \in \mathcal{C}^0((\alpha,\beta);I\!R)$, entonces el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + a_2(t)x^{(n-2)} + \cdots + a_n(t)x = c(t) \quad \textit{para todo } t \in (\alpha,\beta), \\ x(t_0) = x_1,\ x'(t_0) = z_2,\ \cdots,\ x^{(n-1)}(t_0) = z_n \quad \textit{para algún } t_0 \in (\alpha,\beta) \end{cases}$$

tiene una única solución para todo vector $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdots \\ z_n \end{pmatrix}$ *de* $I\!R^{\mathrm{n}}$.

2. Sistemas con coeficientes constantes. La forma canónica de Jordan.

Esta sección se ocupará de la resolución de sistemas lineales con coeficientes constantes

$$X' = A\,X. \tag{14}$$

Como se ha visto en la anterior sección, el estudio de las soluciones de este sistema y, en particular, la matriz fundamental del sistema es clave para determinar las soluciones de sistemas no homogéneos

$$X' = A\,X\, + b(t),$$

o de ecuaciones de orden superior con coeficientes a_i, $i = 1, 2, \cdots, n$, constantes

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + a_2 x^{(n-2)} + \cdots + a_n x = c(t).$$

Haciendo un paralelismo con la ecuación diferencial homogénea

$$x' = a\,x$$

donde las soluciones tienen la expresión $x(t) = x_0 e^{a,t}$ donde $x_0 = x(0)$, no resultaría absurdo buscar soluciones de la forma $X(t) = X^0 e^{\lambda t}$. De existir semejante solución, ello implicaría que

$$X^0 \lambda\, e^{\lambda t} = X' = e^{\lambda t}\, A X^0$$

luego

$$\lambda\, X^0 = A\, X^0$$

por lo que X^0 debería ser autovector de la matriz A. $\square$

2.1. Matrices diagonalizables.

2.1.1. El caso general de una matriz A diagonalizable. Si A es una matriz $n \times n$ con n autovectores $P^1, P^2, \cdots, P^n$ linealmente independientes con sus correspondientes autovalores $\lambda_{\sigma(1)}, \lambda_{\sigma(2)}, \cdots \lambda_{\sigma(n)}$ (donde σ es una aplicación, no necesariamente biyectiva dado que a un mismo autovalor le puede corresponder un subespacio propio de dimensión mayor que 1), obtendremos un sistema fundamental de soluciones, es decir, n soluciones linealmente independientes de la forma $X(t) = P^i e^{\lambda_{\sigma(i)}\, t}$.

Utilizando la escritura matricial, si P es la matriz invertible cuyas columnas son los autovectores P^i, $i = 1, 2, \cdots n$, de A entonces la matriz $B = P^{-1} A P$ es diagonal y el sistema homogéneo

$$Y' = BY = \begin{pmatrix} \lambda_{\sigma(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{\sigma(2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{\sigma(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$$

se reduce a un sistema de n ecuaciones diferenciales desacopladas:

$$\left\{\begin{array}{l} Y_1' = \lambda_{\sigma(1)} Y_1 \\ Y_2' = \lambda_{\sigma(2)} Y_2 \\ \qquad \vdots \\ Y_n' = \lambda_{\sigma(n)} Y_n \end{array}\right.$$

cuya matriz fundamental , que denotaremos Φ_B, y que verifica $\Phi_B(0) = I$ es:

$$\Phi_B(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_{\sigma(1)}\, t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_{\sigma(2)}\, t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_{\sigma(n)}\, t} \end{pmatrix}$$

Si multiplicamos $Y' = B\,Y$ a la derecha por P obtenemos $P\,Y' = P\,B\,Y = A\,P\,Y$ por lo que $X = P\,Y$ es solución de nuestro sistema inicial $X' = A\,X$.

Obviamente, dado que la matriz Φ_B es una matriz fundamental del sistema $Y' = B\,Y$ entonces, $P\,\Phi_B$ es matriz fundamental de $X' = A\,X$ dado que sus columnas son soluciones de $X = A\,X$ y, además son linealmente independientes dado que $det(P\,\Phi_B) = det(P)\,det(\Phi_B) \neq 0$. Dado que P^{-1} es una matriz constante y no singular, $\Phi = P\,\Phi_B\,P^{-1}$ es la matriz fundamental del sistema $X' = A\,X$ que verifica

$$\Phi(0) = P\,\Phi_B(0)\,P^{-1} = P\,P^{-1} = \mathbf{I}. \quad \square$$

Ejemplo. Consideremos el sistema lineal $X' = A\,X$ donde A es la matriz:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & -6 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Calculamos el polinomio característico

$$det(A - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2.$$

Se comprueba que el núcleo de la matriz $A - \mathbf{I}$ es de dimensión 1, concretamente

$$N(A - \mathbf{I}) = Span \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$$

$$N(A - 2\mathbf{I}) = Span \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right],$$

luego, P es la matriz formada por los autovectores:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$B = P^{-1}\,A\,P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matriz fundamental Φ_B del sistema $Y' = B\,Y$ que verifica $\Phi_B(0) = \mathbf{I}$ es

$$\Phi_B(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

por lo que

$$P\,\Phi_B(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & e^{2t} & 3e^{2t} \\ e^t & e^{2t} & 0 \\ 2e^t & e^{2t} & 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

y

$$\Phi(t) = P\ \Phi_B(t)\,P^{-1} = \begin{pmatrix} -4e^t + 5e^{2t} & -2e^t + 2e^{2t} & +6e^t - 6e^{2t} \\ -2e^t + 2e^{2t} & -e^t + 2e^{2t} & +3e^t - 3e^{2t} \\ -4e^t + 4e^{2t} & -2e^t + 2e^{2t} & +6e^t - 5e^{2t} \end{pmatrix}$$

es la matriz fundamental de $X' = A\,X$ que verifica $\Phi(0) = \mathbf{I}$. □

2.1.2. Caso particular de una matriz A diagonalizable con autovalores complejos. consideremos el ejemplo de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

cuyo polinomio característico, $det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1$: luego A tiene los autovalores $\lambda = +i$ y $\overline{\lambda} = -i$. Los correspondientes autovectores son:

$$w = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \end{pmatrix} \quad (Aw = iw)$$

y

$$\bar{w} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix} \quad (A\bar{w} = -i\bar{w}).$$

Considerando A como una matriz compleja, es decir, como una aplicación lineal de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^n$ podríamos reproducir el anterior proceso de diagonalización:

$$N(A - iI) = Span\left[\begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \end{pmatrix}\right], \qquad N(A + iI) = Span\left[\begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}\right],$$

entonces

$$P = \begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix} \quad y \quad P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{aligned} B &= P^{-1}AP \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces podemos resolver el sistema $Y' = BY$ y hallamos dos soluciones linealmente independientes:

$$Y^1(t) = \begin{pmatrix} e^{it} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t + i \operatorname{sen} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

e

$$Y^2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t - i \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$$

y la matriz fundamental

$$\Phi_B(t) = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t + i \operatorname{sen} t & 0 \\ 0 & \cos t - i \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$$

y, multiplicando por P obtendremos dos soluciones complejas y linealmente independientes:

$$X^1(t) = PY^1(t) = \begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{it} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-i)e^{it} \\ (1+i)e^{it} \end{pmatrix}$$

y

$$X^2(t) = PY^2(t) = \begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ e^{-it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+i)e^{-it} \\ (1-i)e^{-it} \end{pmatrix}$$

del sistema $X' = AX$. Constatamos que $X^2 = \overline{X^1}$ por lo que deducimos que $Re(X^1) = \dfrac{X^1 + X^2}{2}$ e $Im(X^1) = \dfrac{X^1 - X^2}{2i}$ son dos soluciones reales y linealmente independientes del sistema.

Recíprocamente podemos demostrar que si X es una solución real del sistema $X' = AX$ entonces

$$Y = \begin{pmatrix} X_1 - iX_2 \\ X_1 + iX_2 \end{pmatrix}$$

es una solución compleja del sistema $Y' = BY$. Se dejan estos cálculos como práctica. $\diamondsuit$

El caso de una matriz 2×2, real, con autovalores complejos: De forma más general consideremos una matriz real $A = (a_{ij})$, 2×2, con autovalores complejos (conjugados):

$$(a_{11} + a_{22})^2 = Tr(A)^2 < 4Det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

en cual caso los autovalores complejos de A son $\lambda = a + ib$, $\bar{\lambda} = a - ib$, siendo $a = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22})$ y siendo $b = \sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} - \frac{1}{4}(a_{11} + a_{22})^2}$. Sean

$$U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \quad \text{con } U_1,\ U_2,\ V_1 \text{ y } V_2 \in I\!R$$

tales que $W = U + iV$ sea un autovector correspondiente al autovalor λ, $AW = \lambda W$, entonces $\overline{W} = U - iV$ es autovector correspondiente al autovalor $\overline{\lambda}$, y ambos vectores constituyen las columnas de la matriz no singular $P = (W, \overline{W})$ que "diagonaliza" A:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix} = P^{-1}AP. \tag{15}$$

Resolviendo el sistema $Y' = BY$ obtenemos la matriz fundamental del sistema:

$$\Phi_B = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\bar{\lambda} t} \end{pmatrix} = e^{at} \begin{pmatrix} \cos(bt) + i \operatorname{sen}(bt) & 0 \\ 0 & \cos(bt) - i \operatorname{sen}(bt) \end{pmatrix}$$

Multiplicando, a la izquierda, por P obtenemos una matriz fundamental, y por lo tanto un sistema fundamental de soluciones, del sistema $X' = AX$:

$$\Phi(t) = A\Phi_B(t) = \begin{pmatrix} We^{\lambda t} & \overline{W}e^{\bar{\lambda} t} \end{pmatrix}.$$

Tomando las partes real e imaginaria de estas soluciones:

$$\begin{aligned} Re(We^{\lambda t}) &= e^{at}(U\cos(bt) - V\operatorname{sen}(bt)), \\ Im(We^{\lambda t}) &= e^{at}(U\operatorname{sen}(bt) + V\cos(bt)) \end{aligned}$$

obtenemos una nueva matriz fundamental <u>real</u>:

$$\Phi_A(t) = e^{at} \begin{pmatrix} U\cos(bt) - V\operatorname{sen}(bt) & U\operatorname{sen}(bt) + V\cos(bt) \end{pmatrix}. \tag{16}$$

La solución general del sistema será

$$\begin{aligned} \Phi_A(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} &= e^{at} \begin{pmatrix} c_1(U_1\cos(bt) - V_1\operatorname{sen}(bt)) + c_2(U_1\operatorname{sen}(bt) + V_1\cos(bt)) \\ c_1(U_2\cos(bt) - V_2\operatorname{sen}(bt)) + c_2(U_2\operatorname{sen}(bt) + V_2\cos(bt)) \end{pmatrix} \\ &= e^{at} \begin{pmatrix} c_1U_1 + c_2V_1 & -c_1V_1 + c_2U_1 \\ c_1U_2 + c_2V_2 & -c_1V_2 + c_2U_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(bt) \\ \operatorname{sen}(bt) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{17}$$

Para cualquier dato inicial $X_0 = \begin{pmatrix} X_{01} \\ X_{02} \end{pmatrix}$ la única solución X del sistema $X' = AX$ que verifica $X(0) = X_0$ se obtiene eligiendo para $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ la única solución del sistema

$$\begin{pmatrix} U_1 & V_1 \\ U_2 & V_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{01} \\ X_{02} \end{pmatrix}.$$

En lugar de dar el paso (15) que nos lleva a un sistema complejo, podemos seguir el siguiente camino. Formamos la matriz no singular real:

$$Q = \begin{pmatrix} U & V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 & V_1 \\ U_2 & V_2 \end{pmatrix}$$

y la aplicamos a la matriz A y comprobamos facilmente que:

$$M = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Comprobamos fácilmente que

$$Z^1(t) = \begin{pmatrix} Z_1^1(t) \\ Z_2^1(t) \end{pmatrix} = e^{at} \begin{pmatrix} \cos(bt) \\ -\operatorname{sen}(bt) \end{pmatrix}$$

y

$$Z^2(t) = \begin{pmatrix} Z_1^2(t) \\ Z_2^2(t) \end{pmatrix} = e^{at} \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(bt) \\ \cos(bt) \end{pmatrix}$$

son soluciones linealmente independientes del sistema $Z' = MZ$ y que

$$\Phi_M(t) = e^{at} \begin{pmatrix} \cos(bt) & \operatorname{sen}(bt) \\ -\operatorname{sen}(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix}$$

es una matriz fundamental de este sistema. Luego,

$$\begin{aligned} Q\Phi_M &= \begin{pmatrix} U & V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z^1 & Z^2 \end{pmatrix} \\ &= e^{at} \begin{pmatrix} U\cos(bt) - V\operatorname{sen}(bt) & U\operatorname{sen}(bt) + V\cos(bt) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

es una matriz fundamental real del sistema $X' = AX$

$$Q\Phi_M = \Phi_A$$

donde la matriz Φ_A es la matriz fundamental del sistema hallada con el procedimiento anterior (ver (16))

Lo anterior nos muestra que podemos calcular fácilmente las soluciones del sistema $X' = AX$ sin pasar por un sistema diagonal complejo. $\diamondsuit$

Podemos repetir este procedimiento para una matriz, A, $n \times n$.

El caso general: Consideramos ahora una matriz real A, $n \times n$, diagonalizable, con raíces reales y raíces complejas. Concretamente notaremos con p la multiplicidad algebraica de las raíces reales (i.e. la suma de las multiplicidades de todas las raíces reales) y $2m$ la multiplicidad algebraica de las raíces complejas ($p + 2m = n$). Notaremos $R^1, \cdots, R^p$ los p autovectores reales de A y $W^1, \overline{W^1}, \cdots, W^m, \overline{W^m}$ los $2m$ autovectores complejos de A. Sean σ y ϖ sendas aplicaciones: $\sigma : \{1, \cdots, p\} \mapsto \{1, \cdots, p\}$ y $\varpi : \{1, \cdots, m\} \mapsto \{1, \cdots, m\}$ de tal modo que $\lambda_{\sigma(i)}$ para $i = 1, \cdots, p$ son los autovalores reales de A: $AR^i = \lambda_{\sigma(i)} R^i$, así mismo $\mu_{\varpi(j)}$ y $\overline{\mu_{\varpi(j)}}$ para $j = 1, \cdots, m$ son los autovalores complejos de A: $AW^j = \mu_{\varpi(j)} W^j$ y $A\overline{W^j} = \overline{\mu_{\varpi(j)}}\,\overline{W^j}$.

Consideremos la matriz cuyas columnas son los autovectores de A:

$$P = \begin{pmatrix} R^1 & \cdots & R^p & W^1 & \overline{W^1} & \cdots & W^m & \overline{W^m} \end{pmatrix},$$

P es no singular y

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_{\sigma(1)} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{\sigma(2)} & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \lambda_{\sigma(p)} & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \mu_{\varpi(1)} & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \overline{\mu_{\varpi(1)}} & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \mu_{\varpi(m)} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \overline{\mu_{\varpi(m)}} \end{pmatrix}.$$

Resolvemos el sistema $Y' = BY$ y obtenemos la matriz fundamental

$$\Phi_B(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_{\sigma(1)}t} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_{\sigma(2)}t} & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & e^{\lambda_{\sigma(p)}t} & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & e^{\mu_{\varpi(1)}t} & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & e^{\overline{\mu_{\varpi(1)}}t} & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & e^{\mu_{\varpi(m)}t} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & e^{\overline{\mu_{\varpi(m)}}t} \end{pmatrix}$$

y multiplicando a la izquierda por P obtenemos una matriz fundamental del sistema $X' = AX$:

$$(18) \quad \Phi(t) = P\Phi_B(t) =$$
$$\begin{pmatrix} R^1 e^{\lambda_{\sigma(1)}t} & \cdots & R^p e^{\lambda_{\sigma(p)}t} & W^1 e^{\mu_{\varpi(1)}t} & \overline{W^1} e^{\overline{\mu_{\varpi(1)}}t} & \cdots & W^m e^{\mu_{\varpi(m)}t} & \overline{W^m} e^{\overline{\mu_{\varpi(m)}}t} \end{pmatrix}.$$

Aquí las columnas 1 a p constituyen soluciones reales del sistema $X' = AX$ pero las columnas $p+1$ a n son soluciones complejas (conjugadas 2 a 2). Podemos obtener una nueva matriz fundamental sustituyendo los pares conjugados

$$\begin{pmatrix} W^m e^{\mu_{\varpi(m)}t} & \overline{W^m} e^{\overline{\mu_{\varpi(m)}}t} \end{pmatrix}$$

por los pares

$$\begin{pmatrix} Re(W^j e^{\mu_{\varpi(j)} t}) & Im(W^j e^{\mu_{\varpi(j)} t}) \end{pmatrix}$$

para $j = 1, 2, \cdots, m$:

$$\begin{aligned}(19)\quad \Phi_A(t) = \Big(& R^1 e^{\lambda_{\sigma(1)} t} \quad \cdots \quad R^p e^{\lambda_{\sigma(p)} t} \quad Re(W^1 e^{\mu_{\varpi(1)} t}) \quad Im(W^1 e^{\mu_{\varpi(1)} t}) \\ & \cdots \quad Re(W^m e^{\mu_{\varpi(m)} t}) \quad Im(W^m e^{\mu_{\varpi(m)} t}) \Big)\end{aligned}$$

Si notamos

$$W^j = U^j + iV^j$$

y

$$\mu_{\varpi(j)} = a_{\varpi(j)} + ib_{\varpi(j)}$$

tenemos

$$\begin{aligned} Re(W^j e^{\mu_{\varpi(j)} t}) &= e^{a_{\varpi(j)} t} \left(U^j \cos(b_{\varpi(j)} t) - V^j \operatorname{sen}(b_{\varpi(j)} t) \right) \\ Im(W^j e^{\mu_{\varpi(j)} t}) &= e^{a_{\varpi(j)} t} \left(U^j \operatorname{sen}(b_{\varpi(j)} t) + V^j \cos(b_{\varpi(j)} t) \right). \end{aligned}$$

Ahora consideremos el enfoque alternativo: en lugar de formar la matriz P con los autovectores de A formaremos una matriz Q con los autovectores reales y con las partes reales y las partes imaginarias de los autovectores complejos:

$$Q = \begin{pmatrix} R^1 & \cdots & R^p & U^1 & V^1 & \cdots & U^m & V^m \end{pmatrix}$$

y

$$M = Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} \lambda_{\sigma(1)} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{\sigma(2)} & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \lambda_{\sigma(p)} & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & a_{\varpi(1)} & b_{\varpi(1)} & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & -b_{\varpi(1)} & a_{\varpi(1)} & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & a_{\varpi(m)} & b_{\varpi(m)} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -b_{\varpi(m)} & a_{\varpi(m)} \end{pmatrix}.$$

Entonces el sistema $Z' = MZ$ admite la siguiente matriz fundamental:

$$\Phi_M(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_{\sigma(1)}t} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_{\sigma(2)}t} & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & e^{\lambda_{\sigma(p)}t} & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & A_{\varpi(1)}(t) & B_{\varpi(1)}(t) & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & -B_{\varpi(1)}(t) & A_{\varpi(1)}(t) & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & A_{\varpi(m)}(t) & B_{\varpi(m)}(t) \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -B_{\varpi(m)}(t) & A_{\varpi(m)}(t) \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{array}{l} A_{\varpi(j)}(t) = e^{a_{\varpi(1)}t}\cos(b_{\varpi(1)}t) \\ B_{\varpi(j)}(t) = e^{a_{\varpi(1)}t}\,\mathrm{sen}(b_{\varpi(1)}t) \end{array}$$

para $j = 1, 2, \cdots, m$. Multiplicando por Q a la izquierda obtenemos una matriz fundamental del sistema $X' = AX$:

$$\begin{array}{rl} Q\Phi_M = \big(& R^1 e^{\lambda(1)t} \quad \cdots \quad R^p e^{\lambda(p)t} \quad U^1 A_{\varpi(1)}(t) - V^1 B_{\varpi(1)}(t) \qquad U^1 B_{\varpi(1)}(t) + V^1 A_{\varpi(1)}(t) \\ & \cdots \quad U^m A_{\varpi(m)}(t) - V^m B_{\varpi(m)}(t) \qquad U^m B_{\varpi(m)}(t) + V^m A_{\varpi(m)}(t) \ \big). \end{array}$$

Sustituyendo $A_{\varpi(j)}(t)$ y $B_{\varpi(j)}(t)$ por su expresión constatamos que la matriz $Q\Phi_M$ es la matriz fundamental Φ_A hallada en (19). $\diamondsuit$

2.2. Caso de una matriz A no diagonalizable. Supongamos ahora que la matriz A no es diagonalizable, es decir que no posee n autovectores linealmente independientes. En este caso debemos recurrir a la forma de Jordan de la matriz:

Teorema 2.1. (de la forma canónica de Jordan) *Sea A una matriz real $n \times n$ con p autovectores linealmente independientes ($p \leq n$), entonces existe una matriz $n \times n$, P, no singular tal que la matriz $P^{-1}\,A\,P$ sea una matriz diagonal por bloques, es decir*

$$P^{-1}\,A\,P = B = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_p \end{pmatrix},$$

donde cada bloque B_j es triangular superior, más exactamente

$$B_j = \begin{pmatrix} \lambda_{\sigma(j)} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{\sigma(j)} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_{\sigma(j)} \end{pmatrix}$$

($(B_j)_{ik} = 0$ si $k \in \{i, i+1\}$, $(B_j)_{ii} = \lambda_{\sigma(j)}$, $(B_j)_{ii+1} = 1$) corresponde al autovector número j que tiene como autovalor $\lambda_{\sigma(j)}$. Cada bloque corresponde a un autovector y el elemento diagonal es el autovalor correspondiente por lo que un autovalor aparece en la diagonal de un número de bloques igual a la dimensión del subespacio propio correspondiente. (Un bloque B_j puede ser una "matriz" 1×1, es el caso, entre otros, de las matrices diagonalizables.)

Dado que $P^{-1}AP = B$, si Y es una solución del sistema $Y' = BY$ entonces $X = PY$ verifica

$$X' = PY' = PBY = PBP^{-1}PY = APY = AX.$$

Si Φ_B es la matriz fundamental de $Y' = bY$, $P\Phi_B$ es una matriz cuyas columnas son soluciones de $X' = AX$ y cuyo determinante es no nulo sea cual sea el valor de t dado que $det(P\Phi_B(t)) = det(P)det(\Phi_B(t)) \neq 0$. Luego $P\Phi_B$ es una matriz fundamental de $X' = AX$, luego también $\Phi(t)P\Phi_B(t)P^{-1}$ es matriz fundamental de ese sistema y, en particular, es la matriz fundamental que verifica

$$\Phi(0) = P\Phi_B(0)P^{-1} = PP^{-1} = \mathbf{I}.$$

Es obvio que si la matriz A tiene autovalores complejos entonces su forma de Jordan será compleja. Esto se puede evitar introduciendo la forma de Jordan real de la matriz:

Teorema 2.2. *Sea A un matriz$n \times n$ real, existe una matriz real no singular P tal que $P^{-1}AP$ es una matriz diagonal por bloques, cuyos bloques son de la forma*

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad o\ \lambda$$

con λ autovalor real de A, o bien de la forma

$$\begin{pmatrix} D & I_2 & O & \cdots & O \\ O & D & I_2 & \cdots & O \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ O & \ddots & \ddots & D & I_2 \\ O & \cdots & \cdots & O & D \end{pmatrix} \quad o\ D$$

siendo

$$D = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $b > 0$ y $a + ib$ es un autovalor complejo de A.

Ejemplo. Estudiar el sistema lineal $X' = A\,X$ donde A es la matriz

$$\begin{pmatrix} 10 & 10 & -14 \\ 3 & 5 & -5 \\ 7 & 8 & -10 \end{pmatrix},$$

cuyo polinomio característico es

$$det(A - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2.$$

2.3. La exponencial de una matriz. Incluso en el caso general, cuando el número de autovectores linealmente independientes es menor que n por lo que la matriz A ya no es diagonalizable, se puede ver que la solución fundamental tiene un comportamiento muy similar a una exponencial. Ya vimos en la Proposición 1.9 que:

- La solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} X' = AX & \text{en } I\!R, \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

  es $X(t) = \Phi(t)X_0$.
- $\Phi(t + s) = \Phi(t)\Phi(s)$ para todo t y s de $I\!R$.
- $\Phi(-t) = (\Phi(t))^{-1}$.

Símílarmente, para la ecuación escalar homogénea tenemos

- La solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = ax & \text{en } I\!R, \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

  es $x(t) = e^{a\,t}x_0$.
- $e^{a(t+s)} = e^{at}e^{as}$ para todo t y s de $I\!R$.
- $e^{-at} = 1/e^{at}$.

Más aun tenemos

Proposición 2.3. *Si Φ es la matriz fundamental de $X' = A\,X$ tal que $\Phi(0) = I$, entonces*

$$\Phi(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i\,A^i}{i!} \tag{20}$$

donde la convergencia de la serie es uniforme sobre cada intervalo cerrado y acotado de $I\!R$.

Demostración. En lo que sigue T puede ser cualquier número real positivo.

Una función matricial $M \in \mathcal{E} = \mathcal{C}([0,T];\mathbb{C}^{n\times n})$ si para todo $t \in [0,T]$ $M(t)$ es una matriz $n \times n$ cuyos coeficientes $M_{ij} \in \mathcal{C}([0,T];\mathbb{C})$ son funciones complejas continuas sobre $[0,T]$. Sea $\| \ \|$ una norma sobre $\mathbb{C}^{n\times n}$, por ejemplo podemos elegir:

$$\|M\| = \max_{1\le i,j\le n} |M_{ij}| \tag{21}$$

donde $|z| = \left(|\mathcal{R}e\, z|^2 + |\mathcal{I}m\, z|^2\right)^{1/2}$ es el módulo de z, si $z \in \mathbb{C}$ (el valor absoluto si $z \in \mathbb{R}$).

<u>Nota:</u> La elección de la norma $\| \ \|$ no es importante dado que, al ser $\mathbb{C}^{n\times n}$ un espacio vectorial de dimensión finita, todas las normas son equivalentes.

Una vez elegida la norma sobre $\mathbb{C}^{n\times n}$, sobre $\mathcal{E}$ consideramos la siguiente norma:

$$\|M\|_{\mathcal{E}} = \max_{0\le t\le T} \|M(t)\|. \tag{22}$$

<u>Nota:</u> Es elemental ver que el espacio $\mathcal{E}$ dotado de la norma anteriormente definida, $(\mathcal{E}, \| \ \|_{\mathcal{E}})$, es un <u>espacio vectorial normado y completo</u>, es decir un espacio de <u>Banach</u>.

Obviamente, para una matriz A fijada, la aplicación lineal

$$\mathbb{C}^{n\times n} \ni B \mapsto AB \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

es continua, es decir que

$$\exists\, K \in \mathbb{R} \text{ tal que } \forall\, B \in \mathbb{C}^{n\times n}\ \|AB\| \le K\|B\|;$$

en efecto, el elemento ij del producto AB es:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}$$

luego

$$|(AB)_{ij}| = |\sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}| \le \sum_{k=1}^{n} |A_{ik}||B_{kj}| \le n\|A\|\,\|B\| \quad \forall\, 1 \le i,j \le n,$$

por lo que deducimos que

$$\|AB\| = \max_{1\le i,j\le n} |(AB)_{ij}| \le n\|A\|\|B\| \tag{23}$$

luego $K = n\|A\|$.

Definimos el operador $\Psi : \mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}$ por:

$$\text{para toda matriz } M \in \mathcal{E}\ \Psi(M)(t) = I + \int_0^t AM(s)\,ds.$$

Vamos a demostrar que para algún m bastante grande la iterada m veces de Ψ, Ψ^m; es una contracción, es decir que existe una constante κ, con $0 < \kappa < 1$ tal que para cualquier par de matrices M, N de $\mathcal{E}$ se tenga:

$$\|\Psi^m(M) - \Psi^m(N)\|_{\mathcal{E}} \leq \kappa \|M - N\|_{\mathcal{E}}.$$

Sean M y N dos matrices de $\mathcal{E}$ entonces

$$\Psi(M)(t) - \Psi(N)(t) = \int_0^t A(M(s) - N(s))\, ds$$

luego

$$\begin{aligned} \|\Psi(M)(t) - \Psi(N)(t)\| &= \|\int_0^t A(M(s) - N(s))\, ds\| \\ &\leq \int_0^t \|A(M(s) - N(s))\|\, ds \\ &\leq K \int_0^t \|(M(s) - N(s))\|\, ds \leq K\, \|M - N\|_{\mathcal{E}} t. \end{aligned} \tag{24}$$

Demostremos por inducción que

$$\|\Psi^m(M)(t) - \Psi^m(N)(t)\| \leq \frac{K^m t^m}{m!}\, \|M - N\|_{\mathcal{E}}. \tag{25}$$

De (24) se deduce que

$$\|\Psi(M)(t) - \Psi(N)(t)\| \leq Kt\, \|M - N\|_{\mathcal{E}}$$

por lo que (25) se verifica para $m = 1$. Supongamos la desigualdad cierta para $m - 1$ entonces, de (24), cambiando M por $\Psi^{m-1}(M)$ y N por $\Psi^{m-1}(N)$, se obtiene

$$\begin{aligned} &\|\Psi_m(M)(t) - \Psi^m(N)(t)\| \\ &\qquad \leq K \int_0^t \|(\Psi^{m-1}(M(s)) - \Psi^{m-1}(N(s)))\|\, ds \\ &\qquad\qquad \frac{K^m}{(m-1)!}\, \|M - N\|_{\mathcal{E}} \int_0^t s^{m-1}\, ds = \frac{K^m t^m}{(m-)!}\, \|M - N\|_{\mathcal{E}} \end{aligned}$$

lo que establece la desigualdad (25) para todo $m \in I\!\!N$. Más aún, de (25) deducimos que

$$\|\Psi^m(M) - \Psi^m(N)\|_{\mathcal{E}} \leq \frac{K^m t^m}{m!}\, \|M - N\|_{\mathcal{E}}$$

y, observando que

$$\frac{K^m t^m}{m!} \overset{m\to 0}{\longrightarrow} 0$$

podemos elegir $\kappa < 1$ y m lo suficientemente grande para que

$$\frac{K^m t^m}{m!} \leq \kappa < 1$$

con lo que Ψ^m será una contracción.

A continuación demostraremos

Lema 2.4. *Sea $\mathcal{M}$ un espacio métrico completo y sea $\mathcal{F}$ una aplicación contractiva de $\mathcal{M}$ sobre $\mathcal{M}$. Entonces $\mathcal{F}$ tiene un punto fijo único :$P = \mathcal{F}(P)$.*

Del lema deduciremos el siguiente

Corolario 2.5. *Sea $\mathcal{M}$ un espacio métrico completo y sea $\mathcal{F}$ una aplicación de $\mathcal{M}$ sobre $\mathcal{M}$ tal que su iterada m veces, $\mathcal{F}^m$, sea una contracción. Entonces $\mathcal{F}$ tiene un punto fijo único: $P = \mathcal{F}(P)$. Además, para cualquier $P_0 \in \mathcal{M}$ la sucesión P_i definida por $P_{i+1} = \mathcal{F}(P_i)$ es de Cauchy y converge a P.*

Demostración del lema 2.4. Consideramos un elemento cualquiera $P_0 \in \mathcal{M}$ y construimos la sucesión

$$P_{i+1} = \mathcal{F}(P_i) \quad \text{par } i \geq 0.$$

Si d representa la métrica sobre $\mathcal{M}$, aplicando la desigualdad triangular tenemos

$$d(P_{i+p}, P_i) \leq d(P_{i+p}, P_{i+p-1}) + d(P_{i+p-1}, P_{i+p-2}) + \cdots + d(P_{i+1}, P_i). \tag{26}$$

por otra parte, si $\kappa < 1$ representa la constante de contracción de $\mathcal{F}$, tenemos

$$\begin{aligned} d(P_{j+1}, P_j) &= d(\mathcal{F}(P_j)), \mathcal{F}(P_{j-1}) \\ &\leq \kappa d(P_j, P_{j-1}) = \kappa d(\mathcal{F}(P_{j-1})), \mathcal{F}(P_{j-2}) \\ &\leq \kappa^2 d(P_{j-1}, P_{j-2}) = \kappa^2 d(\mathcal{F}(P_{j-2})), \mathcal{F}(P_{j-3}) \\ &\leq \cdots \leq \kappa^{j-1} d(\mathcal{F}(P_1), \mathcal{F}(P_0)) \leq \kappa^j d(P_1, P_0). \end{aligned} \tag{27}$$

Aplicando esta última desigualdad a cada término de la derecha de la desigualdad (26) obtenemos

$$\begin{aligned} d(P_{i+p}, P_i) &\leq \left(\sum_{k=0}^{p-1} \kappa^{i+k}\right) d(P_1, P_0) \\ &= \kappa^i \left(\sum_{k=0}^{p-1} \kappa^k\right) d(P_1, P_0) \\ &\leq \kappa^i \left(\sum_{k=0}^{\infty} \kappa^k\right) d(P_1, P_0) = \kappa^i \frac{1}{1-\kappa} d(P_1, P_0). \end{aligned} \tag{28}$$

Obviamente tenemos que

$$\kappa^i \frac{1}{1-\kappa} d(P_1, P_0) \xrightarrow{i \to \infty} 0,$$

luego, para todo $\varepsilon > 0$ existe i_0 tal que para todo $i \geq i_0$ tengamos

$$\kappa^i \frac{1}{1-\kappa} d(P_1, P_0) < \varepsilon$$

por lo que, para cualquier j y k mayores que i_0 tendremos, suponiendo que $i_0 \leq j \leq k$,

$$d(P_j, P_k) = d(P_j, P_{j+(k-j)}) \leq \kappa^j \frac{1}{1-\kappa} d(P_1, P_0) \leq \kappa^{i_0} \frac{1}{1-\kappa} d(P_1, P_0) < \varepsilon$$

por lo que queda demostrado que $(P_j)_{j \in I\!N}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{M}$. Dado que $\mathcal{M}$ es completo, existe $P \in \mathcal{M}$ tal que

$$P_i \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} P.$$

Como $\mathcal{F}$ es continua (dado que es contractiva), $\mathcal{F}(P_i)$ converge a $\mathcal{F}(P)$ y, pasando al límite en la igualdad $P_{i+1} = \mathcal{F}(P_i)$ deducimos que $P = \mathcal{F}(P)$ con lo que queda demostrada la existencia de un punto fijo.

En cuanto a la unicidad del mismo basta con suponer que existen 2 puntos fijos P y Q. Entonces

$$d(P, Q) = d(\mathcal{F}(P), \mathcal{F}(Q)) \leq \kappa d(P, Q) < d(P, Q)$$

lo cual constituye una clara contradicción. $\diamond$

Demostración del corolario 2.5. Suponemos que $\mathcal{F}^m$ es una contracción de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{M}$. Entonces, en aplicación del anterior lema existe un único $P \in \mathcal{M}$ que sea punto fijo de $\mathcal{F}^m$: $P = \mathcal{F}^m(P)$. Entonces, $\mathcal{F}(P) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^m(P)) = \mathcal{F}^m(\mathcal{F}(P))$ luego deducimos que $\mathcal{F}(P)$ también es punto fijo. de la unicidad del punto fijo de $\mathcal{F}^m$ deducimos que $P = \mathcal{F}(P)$, por lo que P también es punto fijo de $\mathcal{F}$. Por otra parte, cualquier punto fijo de $\mathcal{F}$ es punto fijo de las iteraciones de $\mathcal{F}$ luego no puede tener más de un punto fijo.

Finalmente, si consideramos $P_0 \in \mathcal{M}$ y $P_{i+1} = \mathcal{F}(P_i)$, entonces $P_{i+m} = \mathcal{F}^m(P_i)$ y, de forma general, si, para $j = 0, 1, \cdots, m-1$ denotamos

$$Q_{j,k} = P_{j+km} = \mathcal{F}^m(P_j + (k-1)m) = \mathcal{F}^m(Q_{j,k-1}),$$

entonces, como se ha visto en la demostración del lema 2.4, $Q_{j,k}$ son sucesiones de Cauchy que convergen al único punto fijo P cuando $k \to 0$, por lo que deducimos que toda la suceción $P_i \to 0$ cuando $i \to \infty$. $\diamond$

Final de la demostración de la proposición. La función Ψ^m es una contracción, luego tiene un único punto fijo y ese punto fijo, que denotaremos con Φ es también punto fijo de Ψ. Además, si elegimos $\Phi_0 = \mathbf{I}$ y construimos la sucesión $\Phi_{i+1} = \Psi(Phi_i)$ entonces Φ_i es una sucesión de Cauchy que converge a Φ en $\mathcal{E}$ lo cual significa que $\|\Phi_i(t) - \Phi(t)\|$ tiende a 0 uniformemente sobre $[0, T]$. Recordando que T es arbitrario y que

$$\Phi_i = \sum_{j=0}^{i} \frac{t^j A^j}{j!},$$

la proposición queda demostrada. □

Recordamos que

$$e^{at} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^i t^i}{i!}.$$

Por todo ello tendremos

Definición 2.6. *La exponencial de la matriz A es la matriz*

$$e^A = \exp A = \Phi(1) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}.$$

En particular

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i\, A^i}{i!} = \Phi(t)$$

Así pues la solución de

$$\begin{cases} X' = AX & \text{en } \mathbb{R}, \\ X(0) = X^0 \end{cases}$$

es $X(t) = \Phi(t)\, X^0 = e^{At}\, X^0$.

3. La transformada de Laplace.

3.1. Definición y ejemplos. Sea f una función definida para $t \in (0,\infty)$[1], tal que la integral impropia

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

converge para $s > s_0$. Entonces la ***Transformada de Laplace de la función*** f existe para $s > s_0$ y se define como

$$\mathcal{L}(f)(s)) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = F(s).$$

En algún caso escribiremos $\mathcal{L}(f(t))(s)$ si es preciso dejar claro cual son las variables de las que dependen f y su transformada de Laplace $\mathcal{L}(f)$. También se utilizará esta notación cuando f sea una función escrita explícitamente como $\mathcal{L}(1)$ o $\mathcal{L}(1)(s)$ cuando $f(t) \equiv 1$ o como $\mathcal{L}(t)$ o $\mathcal{L}(t)(s)$ para $f(t) = t$.

La transformada de Laplace es un operador lineal: si f y g tienen transformada de Laplace para $s > s_0$ y si α y β son dos números reales cualesquiera entonces $\alpha f + \beta g$ tambien tiene transformada de Laplace para $s > s_0$ y

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\alpha f + \beta g)(s) &= \int_0^\infty (\alpha f(t) + \beta g(t))e^{-st}dt \\ &= \alpha \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt + \beta \int_0^\infty g(t)e^{-st}dt = \alpha\mathcal{L}(f)(s) + \beta\mathcal{L}(g)(s).\end{aligned}$$

A modo de ejemplo veamos las transformadas de algunas funciones:

[1]Sería suficiente que la función f estuviese definida en casi todo punto de $(0,\infty)$ es decir en todo punto menos en un subconjunto de $(0,\infty)$ de medida de Lebesgue nula.

$$\mathcal{L}(1) = \int_0^\infty e^{-st}\,dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big]_0^\infty = \frac{1}{s};$$

$$\mathcal{L}(t) = \int_0^\infty e^{-st}t\,dt = -\frac{st+1}{s^2}e^{-st}\Big]_0^\infty = \frac{1}{s^2};$$

$$\mathcal{L}(t^n) = \int_0^\infty e^{-st}t^n\,dt = \int_0^\infty (-1)^n \frac{d^n e^{-st}}{ds^n}\,dt$$

$$= (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\int_0^\infty e^{-st}\,dt = \frac{n!}{s^{n+1}};$$

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \int_0^\infty e^{(a-s)t}\,dt = \frac{1}{a-s}e^{(a-s)t}\Big]_0^\infty = \frac{1}{s-a} \textit{ (para } s > a\textit{);}$$

$$\mathcal{L}(\operatorname{senh}(at)) = \int_0^\infty e^{-st}\operatorname{senh}(at)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[e^{(a-s)t} - e^{(-a-s)t}\right]\,ds$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a-s}e^{(a-s)t} + \frac{1}{a+s}e^{(-a-s)t}\right)\Big]_0^\infty$$

$$= \frac{a}{s^2-a^2} \textit{ (para } s > |a|\textit{);}$$

$$\mathcal{L}(\cosh(at)) = \int_0^\infty e^{-st}\cosh(at)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[e^{(a-s)t} + e^{(-a-s)t}\right]\,ds$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a-s}e^{(a-s)t} - \frac{1}{a+s}e^{(-a-s)t}\right)\Big]_0^\infty$$

$$= \frac{s}{s^2-a^2} \textit{ (para } s > |a|\textit{);}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\operatorname{sen}(at)) &= \int_0^\infty e^{-st}\operatorname{sen}(at)\,dt \\
&= \frac{e^{-st}(s\operatorname{sen}(at)+a\cos(at))}{s^2+a^2}\Bigg]_0^\infty = \frac{a}{s^2+a^2}; \\
\mathcal{L}(\cos(at)) &= \int_0^\infty e^{-st}\cos(at)\,dt \\
& \frac{e^{-st}(a\operatorname{sen}(at)-s\cos(at))}{s^2+a^2}\Bigg]_0^\infty = \frac{s}{s^2+a^2};
\end{aligned}$$

Una amplia familia de funciones admite transformada de Laplace. Sin querer ser exhaustivo en la relación de dichas funciones es obvio comprobar que

Proposición 3.1. *Sea f una función medible*[2] *tal que f sea integrable sobre $(0,T)$ para todo $0<T<\infty$, y sea de orden exponencial, es decir que existen dos constantes positivas, M y s_0 tales que para T bastante grande*

$$|f(t)| \le Me^{s_0 t} \quad \text{para casi}^{3} \text{ todo } t\in(T,\infty).$$

entonces f, $-f$ y $|f|$ tienen transformada de Laplace sobre el intervalo (s_0,∞).

Demostración. Basta con demostrar la proposición para f y observar que si f verifica los requisitos de la proposición, también los verifican las funciones $-f$ y $|f|$.

Consideremos el producto $f(t)e^{-st}$, dado que e^{-st} está acotada para $s>0$ y todo $t>0$, este producto es integrables sobre el intervalo $(0,T)$, para todo $0<T<\infty$, además, para T lo suficientemente grande se tiene

$$|f(t)|e^{-st} \le Me^{(s_0-s)t}$$

por lo que deducimos que, para $s>s_0$ la función $f(t)e^{-st}$ es integrable sobre (T,∞) por lo que la integral impropia

$$\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

converge para todo $s>s_0$ y la transformada de Laplace $\mathcal{L}(f)$ está definida para $s>s_0$. □

Nota: *Una función f es continua a trozos sobre $(0,\infty)$ si existe un número finito de puntos $0<t_1<t-2<\cdots<t_k<\infty$ tales que f sea continua en cada uno de los*

[2]Para la medida de Lebesgue.

[3]Es decir, para todo $t\in(0,\infty)$ menos un conjunto de medida de Lebesgue nula.

intervalos $[0,t_1]$, $[t_1,t_2]$, $\cdots$, $[t_k,\infty)$. *En los puntos* t_i *la función presenta discontinuidades de primera especie, es decir que*

$$f(t_i^-)=\lim_{t\to t_i,\, t_i<t} f(t)\neq f(t_i^+)=\lim_{t\to t_i,\, t_i>t} f(t). \quad \square$$

Uno comprueba fácilmente que una función continua a trozos y de orden exponencial cumple las exigencias de la proposición anterior por lo que tendrá transformada de Laplace definida para s mayor que algún s_0.

Éste es también el caso de funciones que pueden ser discontinuas en 0 como $f(t)=t^{-r}$ con $0<r<1$ que tendrá transformada de Laplace definida para todo $s>0$:

$$\mathcal{L}(t^{-r})(s)=\frac{\Gamma(1-r)}{s^{1-r}}$$

donde la función Γ se define como

$$\Gamma(r)=\int_0^\infty t^{r-1}e^{-t}dt.$$

En particular

$$\mathcal{L}(1/\sqrt{t})(s)=\frac{\sqrt{\Pi}}{\sqrt{s}}.$$

3.2. Transformada de Laplace de la derivada, ecuaciones diferenciales y derivada de la transformada de Laplace. En esta parte vamos a aplicar la transformada de Laplace a la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias.

La siguiente proposición permite calcular la transformada de Laplace de la derivada de una función.

Proposición 3.2. *Sea* $f\in\mathcal{C}^k([0,\infty))$ *entonces, para todo* $p\leq k$ *se tiene*

$$\begin{aligned}(29)\quad \mathcal{L}\left(\frac{d^pf}{dt^p}\right)(s)&=s^p\mathcal{L}(f)(s)\\ &\quad -s^{p-1}f(0)-s^{p-2}f'(0)-\cdots-sf^{(p-2)}(0)-f^{(p-1)}(0)\end{aligned}$$

Demostración. Sea $p=1$, entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}\right)(s)&=\int_0^\infty \frac{df}{dt}(t)e^{-st}dt\\ &=-\int_0^\infty f(t)\frac{de^{-st}}{dt}+f(t)e^{-st}\Big]_0^\infty dt\\ &=s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt-f(0)=s\mathcal{L}(f)(s)-f(0)\end{aligned}$$

con lo que (29) se verifica para $p = 1$. Supongamos que se cumple para $p-1$, con $p \leq k$, entonces, aplicando lo anterior tenemos

$$\mathcal{L}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{d^{p-1}f}{dt^{p-1}}\right)\right)(s) = \mathcal{L}\left(\frac{df^{(p-1)}}{dt}\right)(s) = s\mathcal{L}(f^{(p-1)})(s) - f^{(p-1)}(0)$$

y aplicando la hipótesis de inducción

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\frac{d^p f}{dt^p}\right)(s) & \\ &= s\left[s^{p-1}\mathcal{L}(f)(s) - s^{p-2}f(0) - s^{p-3}f'(0) - \cdots - f^{(p-2)}(0)\right] - f^{(p-1)}(0) \\ &= s^p\mathcal{L}(f)(s) - s^{p-1}f(0) - s^{p-2}f'(0) - \cdots - sf^{(p-2)}(0) - f^{(p-1)}(0)\end{aligned}$$

lo que termina la demostración. □

La relación (29) permite expresar, de manera sencilla, la transformada de Laplace de la derivada en términos de la propia función. Ello tiene **aplicación a la resolución de ecuaciones y de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.** Consideremos el problema de valor inicial :

$$\begin{cases} x'' + ax' + bx = c(t) & \text{en } (0,\infty), \\ x(0) = \alpha, & x'(0) = \beta \end{cases}$$

donde la ecuación lineal tiene coeficientes a y b constantes y la función $c \in \mathcal{C}^0([0,\infty))$ es de orden exponencial. Entonces, dado el carácter lineal de la transformada de Laplace, tenemos:

$$\mathcal{L}(x'' + ax' + bx) = \mathcal{L}(x'') + a\mathcal{L}(x') + b\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(c),$$

y, aplicando la relación (29) obtenemos:

$$s^2\mathcal{L}(x) - s\alpha - \beta + a(s\mathcal{L}(x) - \alpha) + b(\mathcal{L}x) = \mathcal{L}(c),$$

es decir,

$$\mathcal{L}(x) = \frac{\mathcal{L}(c) + \alpha s + \beta + a\alpha}{s^2 + as + b}.$$

En este punto la resolución del problema de valor inicial queda reducido al problema de hallar la función cuya transformada de Laplace sea

$$\frac{\mathcal{L}(c) + \alpha s + \beta + a\alpha}{s^2 + as + b}.$$

Aun cuando los coeficientes de la ecuación dependen de la variable t la transformada de Laplace puede ser útil. Veamos primero la

Proposición 3.3. *Sea f una función continua a trozos y de orden exponencial, entonces existe $s_0 < \infty$ tal que $\mathcal{L}(f) \in \mathcal{C}^\infty(s_0, \infty)$. Además tenemos:*

$$\frac{d^n \mathcal{L}(f(t))}{ds^n}(s) = (-1)^n \mathcal{L}(t^n f(t))(s). \tag{30}$$

Demostración. Se comprueba fácilmente que si f es continua a trozos y de orden exponencial entonces las funciones f_n definidas, para $n \in I\!N$, por $f_n(t) = t^n f(t)$ también lo son, en particular, si existen dos constantes M y s_0 tales que para T bastante grande tengamos

$$|f(t)| \leq M e^{s_0 t} \quad \text{para casi todo } t \in (T, \infty),$$

entonces, para cada $n \in I\!N$ y para cada $\varepsilon > 0$ existirá una constante $M_{n,\varepsilon}$ tal que

$$|f_n(t)| \leq M_{n,\varepsilon} e^{(s_0+\varepsilon)t} \quad \text{para casi todo } t \in (T, \infty). \tag{31}$$

En efecto, para $t \geq 0$ tenemos

$$|f_n(t)| = |t^n f(t)| \leq M t^n e^{s_0 t} = M t^n e^{-\varepsilon t} e^{(s_0+\varepsilon)t} \leq M \left(\frac{n}{\varepsilon}\right)^n e^{-n} e^{(s_0+\varepsilon)t}.$$

De (31) deducimos que la transformada de Laplace de f_n está definida para todo $s > s_0 + \varepsilon$, y eso para cualquier $\varepsilon > 0$ por lo que $\mathcal{L}(f_n)$ está definida para todo $s > s_0$.

Consideremos el cociente

$$\frac{\int_0^\infty f(t) e^{-(s+h)t} dt - \int_0^\infty f(t) e^{-st}}{h} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-st} \frac{e^{-ht} - 1}{h} dt.$$

Teniendo en cuenta la Lipschitzianidad de la exponencial, el integrando de la segunda integral se puede acotar por

$$|f(t) e^{-st} \frac{e^{-ht} - 1}{h}| \leq |f(t) e^{-st} t|$$

para h y t no negativos, donde la función $|f(t)e^{-st}t|$ es una función integrable según acabamos de ver. Ello nos autoriza a aplicar el teorema de Lebesgue de convergencia dominada

$$\lim_{h \to 0} \frac{\int_0^\infty f(t) e^{-(s+h)t} dt - \int_0^\infty f(t) e^{-st}}{h} dt = \int_0^\infty \lim_{h \to 0} f(t) e^{-st} \frac{e^{-ht} - 1}{h} dt,$$

por lo que

$$\frac{d \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt}{ds} = -\int_0^\infty t f(t) e^{-st} dt,$$

lo que establece la relación (30) para $n = 1$. Aplicando la fórmula anterior a f_n obtenemos

$$\frac{d \int_0^\infty f_n(t) e^{-st} dt}{ds} = -\int_0^\infty t f_n(t) e^{-st} dt = -\int_0^\infty f_{n+1}(t) e^{-st} dt,$$

por lo que la relación (30) queda establecida por inducción para todo $n \in I\!N$. $\square$

La proposición anterior permite aplicar la transformación de Laplace a algunas ecuaciones diferenciales con coeficientes variables. Por ejemplo

$$tx''(t) + (3t-1)x'(t) - (4t+9)x(t) = 0, \quad x(0) = 0. \tag{32}$$

Aplicando la transformada de Laplace y teniendo en cuenta las proposiciones **??** y 3.3 tenemos:

$$0 = \mathcal{L}(tx''(t)) + \mathcal{L}((3t-1)x'(t) - \mathcal{L}((4t+9)x(t))$$

$$= -\frac{d\mathcal{L}(x''(t))}{ds} - 3\frac{d\mathcal{L}(x'(t))}{ds} - \mathcal{L}(x'(t))$$

$$+ 4\frac{d\mathcal{L}(x(t))}{ds} - 9\mathcal{L}(x(t))$$

$$= -\frac{d(s^2\mathcal{L}(x(t)) - x'(0))}{ds} - 3\frac{d(s\mathcal{L}(x(t)))}{ds} - s\mathcal{L}(x(t))$$

$$+ 4\frac{d\mathcal{L}(x(t))}{ds} - 9\mathcal{L}(x(t))$$

$$= -(s^2+3s-4)\frac{d\mathcal{L}(x(t))}{ds} - (3s+12)\mathcal{L}(x(t))$$

$$= -(s+4)(s-1)\frac{d\mathcal{L}(x(t))}{ds} - 3(s+4)\mathcal{L}(x(t)).$$

En definitiva, para $s \neq -4$ la transformada de Laplace de x verifica la ecuación de primer orden:

$$\frac{d\mathcal{L}(x(t))}{ds} = -\frac{3}{(s-1)}\mathcal{L}(x(t)), \tag{33}$$

por lo que

$$\mathcal{L}(x(t))(s) = -\frac{K}{(s-1)^3}. \tag{34}$$

Buscando la función cuya transformada de Laplace es (34) obtenemos:

$$x(t) = -\frac{K}{2}t^2e^t = kt^2e^t. \quad \square$$

En el anterior ejemplo hemos dado por bueno que t^2e^t es la única función (continua) cuya transformada de Laplace es

$$\frac{2}{(s-1)^3}.$$

¿ Es ésto cierto? Lo aclararemos a continuación.

3.3. Inyectividad de la transformada de Laplace. Tenemos:

Teorema 3.4. *Sea g una función continua tal que $\mathcal{L}(g)(s)=0$ para todo s mayor o igual que cierto s_0, entonces $g\equiv 0$ en $(0,\infty)$.*

Demostración. En esta demostración nos apoyaremos en el siguiente lema:

Lema 3.5. *Sea $\mathcal{G}$ una función continua en el intervalo $[0,1]$ tal que*

$$\int_0^1 t^n\mathcal{G}(t)dt=0$$

para todo entero $n\geq 0$, entonces $\mathcal{G}\equiv 0$ en $[0,1]$.

Demostración del lema. Dado que $\mathcal{G}$ es una función continua sobre el intervalo acotado $[0,1]$ la podemos aproximar uniformemente por polinomios sobre este intervalo, en particular, para todo $\varepsilon>0$ podemos encontrar un polinomio P tal que

$$|\mathcal{G}(t)-P(t)|<\varepsilon \qquad \text{para todo } t\in[0,1].$$

Por la hipótesis del lema tenemos

$$\int_0^1 \mathcal{G}(t)P(t)dt=0$$

luego obtenemos

$$\int_0^1 |\mathcal{G}(t)|^2dt=\int_0^1 \left(|\mathcal{G}(t)|^2-\mathcal{G}(t)P(t)\right)dt$$
$$=\int_0^1 \mathcal{G}(t)\left(\mathcal{G}(t)-P(t)\right)dt\leq\varepsilon\int_0^1|\mathcal{G}(t)|dt$$

por lo que queda demostrado el lema. □

Volviendo a la demostración del teorema, consideremos cualquier entero $n\geq 1$ y cualquier $s\geq s_0$, entonces la transformada de Laplace de g en el punto $s+n$ verifica:

$$0=\mathcal{L}(g)(s+n)=\int_0^\infty g(t)e^{-(s+n)t}dt=\int_0^\infty g(t)e^{-st}e^{-nt}dt$$

e integrando por partes obtenemos

$$0 = \int_0^\infty g(t)e^{-st}e^{-nt}dt$$

$$= e^{-nt}\int_0^t g(t)e^{-st}dt\Big]_0^\infty + n\int_0^\infty e^{-nt}\left(\int_0^t g(\tau)e^{-s\tau}d\tau\right)dt.$$

Dado que

$$e^{-nt}\int_0^t g(t)e^{-st}dt\Big]_0^\infty = 0,$$

deducimos que

$$\int_0^\infty e^{-nt}\left(\int_0^t g(\tau)e^{-s\tau}d\tau\right)dt = 0$$

para todo entero $n \geq 1$. Definimos la función

$$G(t) = \int_0^t g(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

por lo que tenemos

$$\int_0^\infty G(t)e^{-nt} = 0.$$

Introduciendo el cambio de variable $r = e^{-t}$, es decir $t = -\ln(r)$, y la función $\mathcal{G}(r) = G(-\ln(r))$, la anterior igualdad se convierte en

$$\int_0^1 r^{n-1}\mathcal{G}(r)dr = 0$$

para todo entero $n \geq 1$. Constatamos trivialmente que $\mathcal{G}$ es una función continua sobre $[0,1]$. Aplicando el lema deducimos que

$$\mathcal{G}(r) = 0 \quad \text{para todo } r \in [0,1]$$

y de ello deducimos que

$$G(t) = 0 \quad \text{para todo } t \in [0,\infty).$$

Constatando que G es una función de $\mathcal{C}^1(0,\infty)$ deducimos que su derivada también se anula para todo $t \in (0,\infty)$:

$$g(t)e^{-st} = 0 \quad \text{lo que implica} \quad g(t) = 0,$$

concluyendo la demostración del teorema. □

Nota: *La hipótesis del teorema sobre la continuidad de la función g se puede relajar. Sería más que suficiente suponer que g es integrable sobre $(0,T)$ para todo $T > 0$. Entonces, la conclusión sería que $g = 0$ en casi todo punto de $(0,\infty)$.*

La hipótesis sobre la nulidad de la transformada de Laplace a partir de cierto s_0 se utiliza sólo para asegurar que $\mathcal{L}(g)(s+n) = 0$ para algún valor de s y para todo entero

$n \geq 0$. *Sería suficiente suponer que la transformada de Laplace de la función* g *se anula periódicamente a partir de cierto valor* s_0.

El teorema 3.4 nos garantiza que en los ejemplos anteriores la solución hallada es la buena. $\diamondsuit$

TABLA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE[4]

$f(t)$	$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t)$	$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$
1	$\dfrac{1}{s}$	t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$	$\operatorname{sen}(kt)$	$\dfrac{k}{s^2+k^2}$
$\cos(kt)$	$\dfrac{s}{s^2+k^2}$	$\operatorname{senh}(kt)$	$\dfrac{k}{s^2-k^2}$
$\cosh(kt)$	$\dfrac{s}{s^2-k^2}$	$t^n e^{at}$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$e^{at}\operatorname{sen}(kt)$	$\dfrac{k}{(s-a)^2+k^2}$	$e^{at}\cos(kt)$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$
$t\operatorname{sen}(kt)$	$\dfrac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$	$t\cos(kt)$	$\dfrac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$
$\operatorname{sen}(kt)-kt\cos(kt)$	$\dfrac{2k^3}{(s^2+k^2)^2}$	$\operatorname{sen}(kt)+kt\cos(kt)$	$\dfrac{2ks^2}{(s^2+k^2)^2}$
$\operatorname{senh}(kt)-\operatorname{sen}(kt)$	$\dfrac{2k^3}{s^4-k^4}$	$\cosh(kt)-\cos(kt)$	$\dfrac{2sk^2}{s^4-k^4}$
$1-\cos(kt)$	$\dfrac{k^2}{s(s^2+k^2)}$	$kt-\operatorname{sen}(kt)$	$\dfrac{k^3}{s^2(s^2+k^2)}$
$\dfrac{a\operatorname{sen}(bt)-b\operatorname{sen}(at)}{ab(a^2-b^2)}$	$\dfrac{1}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$	$\dfrac{\cos(bt)-\cos(at)}{a^2-b^2}$	$\dfrac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
$\delta_a(t)$	e^{-as}	$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$f(t-a)\mathrm{H}_a(t)$	$e^{-as}F(s)$	$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{n)}(s)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{n-1)}(0)$	$f(ct)$	$\dfrac{1}{c}F\left(\dfrac{s}{c}\right)$
$\displaystyle\int_0^t f(r)g(t-r)\,dr$	$F(s)G(s)$	$\displaystyle\int_0^t f(s)\,ds$	$\dfrac{F(s)}{s}$

[4] $\delta_a(t)$ y $\mathrm{H}_a(t)$ denotan, respectivamente, la *delta de Dirac* y la *función de Heaviside* con *polo* en $t=a$.

4. El método de las series de potencias

En esta sección abordaremos de forma resumida el estudio de ecuaciones lineales de segundo orden

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a(t)\frac{dx}{dt} + b(t)x = 0 \tag{35}$$

con soluciones en forma de series de potencias. Es conocido que para algunos casos particulares, por ejemplo si los coeficientes son constantes, se puede resolver esta ecuación en términos de funciones elementales. Sin embargo la mayoría de las ecuaciones, entre ellas ecuaciones de gran importancia en matemáticas puras y aplicadas, no pueden ser resueltas así. No obstante, cuando los coeficientes a y b tienen un "buen comportamiento" en el entorno de un punto t_0 podemos intentar hallar soluciones en forma de series de potencias convergentes en ese entorno Para ilustrar este propósito, consideremos una ecuación simple y conocida:

$$x'' = -x. \tag{36}$$

Esta equation tiene una solución general expresada en términos de funciones elementales:

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t \tag{37}$$

que es analítica. Si intentamos buscar la solución de esta ecuación en forma de serie de potencias notamos

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i.$$

calculamos la derivada segunda de esta serie:

$$x''(t) = \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)a_i t^{i-2}$$

y escribimos la ecuación

$$0 = x''(t) + x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i + \sum_{i=2}^{\infty} (i-1)ia_i t^{i-2} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(a_i + (i+1)(i+2)a_{i+2}\right) t^i$$

por lo que calculamos que

$$\left[\begin{array}{lll}
a_0 + 2a_2 = 0, & a_2 = -\dfrac{1}{2}a_0 & = -\dfrac{1}{2!}a_0 \\[2ex]
a_1 + 2\cdot 3a_3 = 0, & a_3 = -\dfrac{1}{6}a_1 & = -\dfrac{1}{3!}a_1 \\[2ex]
a_2 + 3\cdot 4a_4 = 0, & a_4 = -\dfrac{1}{12}a_2 = \dfrac{1}{24}a_0 & = \dfrac{1}{4!}a_0, \\[2ex]
a_3 + 4\cdot 5a_5 = 0 & a_5 = -\dfrac{1}{20}a_3 = \dfrac{1}{120}a_1 & = \dfrac{1}{5!}a_1 \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
a_{2i-2} + (2i-1)2ia_{2i} = 0, & a_{2i} = -\dfrac{1}{(2i-1)2i}a_{2i-2} & = \dfrac{(-1)^i}{2i!}a_0, \\[2ex]
a_{2i-1} + 2i(2i+1)a_{2i+1} = 0, & a_{2i+1} = -\dfrac{1}{2i(2i+1)}a_{2i-1} & = \dfrac{(-1)^i}{(2i+1)!}a_1, \\
\cdots & \cdots & \cdots
\end{array}\right.$$

y deducimos que

$$x(t) = a_0 \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i!}t^{2i}}_{\cos t} + a_1 \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!}t^{2i+1}}_{\operatorname{sen} t}$$

luego recuperamos, ¡como no! la solución general de la ecuación. En este caso la búsqueda de una solución en forma de serie de potencias es redundante ya que sólo sirve para "re-encontrarnos" con la solución (37) de la ecuación (36)

Hasta ahora, las soluciones de las ecuaciones que hemos integrado eran, salvo alguna excepción, funciones elementales. No siempre es así. La ecuación de Legendre

$$\frac{d}{dt}\left[(1-t^2)\frac{dx}{dt}\right] + p(p+1)x = 0 \tag{38}$$

tiene soluciones en series que, en general, no se pueden expresar como funciones elementales. Como se puede comprobar "fácilmente", esta ecuación tiene por solución general la expresión

$$C_1L_1(p,t) + C_2L_2(p,t)$$

donde

$$L_1(p,t) = 1 - \frac{p(p+1)}{2!}t^2 + \frac{p(p-2)(p+1)(p+3)}{4!}t^4 - \frac{p(p-2)(p-4)(p+1)(p+3)(p+5)}{6!}t^6 + \cdots$$

y

$$L_2(p,t) = t - \frac{(p-1)(p+2)}{3!}t^3 + \frac{(p-1)(p-3)(p+2)(p+4)}{5!}t^5 - \frac{(p-1)(p-3)(p-5)(p+2)(p+4)(p+6)}{7!}t^7 + \cdots$$

También la ecuación de Bessel:

$$t^2\frac{d^2x}{dt^2} + t\frac{dx}{dt} + (t^2-\alpha^2)x = 0 \tag{39}$$

(donde α puede ser un número real o complejo) tiene soluciones en series que, en general, no admiten soluciones en forma de funciones elementales. Las funciones de Bessel[5] son soluciones canónicas de esta ecuación. Más concretamente, la solución general de la ecuación de Bessel es

$$C_1 J(\alpha,t) + C_2 Y(\alpha,t)$$

donde $J(\alpha,t)$ es la función de Bessel de primer especie:

$$J(\alpha,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\alpha+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k+\alpha} = \frac{t^\alpha}{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}\left[1 - \frac{t^2}{2(2\alpha+2)} + \frac{t^4}{2\cdot 4(2\alpha+2)(2\alpha+4)} - \cdots\right]$$

(donde Γ representa la función Gamma de Euler vista en la sección anterior), e $Y(\alpha,t)$ es la función de Bessel de segunda especie:

$$\begin{aligned}
Y(\alpha,t) &= \frac{J(\alpha,t)\cos(\alpha\pi) - J(-\alpha,t)}{\operatorname{sen}(\alpha\pi)}, \quad \forall\, \alpha \notin \mathbb{Z},\\
Y(n,t) &= \lim_{\alpha\to n} Y(\alpha,t)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{sen}(t\operatorname{sen}\theta - n\theta)\,d\theta - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty [e^{ns} + (-1)^n e^{-ns}]e^{-t\operatorname{senh}(s)}\,ds \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

4.1. Ecuaciones lineales de segundo orden. Puntos ordinarios. Consideramos la ecuación general introducida al comienzo de esta sección (35):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a(t)\frac{dx}{dt} + b(t)x = 0. \tag{35}$$

Como es natural esperar, si las funciones $a(t)$ y $b(t)$ son "buenas" tendremos "buenas" soluciones de la ecuación (35) en particular, a funciones a y b analíticas deberían corresponder soluciones analíticas. Para confirmar esto definimos:

[5]Fueron definidas por Daniel Bernoulli y generalizadas por Friedrich Bessel

Definición 4.1. *Un punto $t_0 \in \mathbb{R}$ es un punto ordinario de la ecuación si y sólo si las funciones a y b son analíticas en t_0, es decir que existe $\delta > 0$ tal que en $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ a y b tienen un desarrollo en serie de potencias. Un punto t_0 que no sea ordinario, porque al menos uno de los dos coeficientes a y b no sea analìtico en t_0, se llamará punto singular.*

Entonces tenemos:

Teorema 4.2. *Sea t_0 un punto ordinario de la ecuación (35) entonces para cualquier par $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ existe una única función analítica, x que verifica la ecuación en el entorno del punto t_0 y que verifica las condiciones iniciales $x(t_0) = c_1$ y $x'(t_0) = c_2$. Además, si los desarrollos en series de potencias de a y b son válidos en un intervalo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ entonces el desarrollo en serie de potencias de la solución x será válido en el mismo intervalo.*

(Para la demostración del teorema remitimos al libro de G. F. Simmons [S], páginas 187 a 189.)

Observación 1. *El anterior teorema 4.2 garantiza que si las funciones a y b son analíticas en t_0 entonces todas las soluciones de la ecuación serán analíticas en t_0. Esto deja de ser cierto si se pierde el carácter analítico de los coeficientes. Para ilustrar esta afirmación consideremos la ecuación*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2}{t}\frac{dx}{dt} - \frac{2}{t^2}x = 0 \tag{40}$$

para la cual $t = 0$ es claramente un punto singular.Ésta posee dos soluciones linealmente independientes:

una solución analítica:	$x(t) = t$
una solución no analítica (en $t = 0$):	$x(t) = \dfrac{1}{t^2}$

4.2. Puntos regulares singulares. Si observamos los ejemplo expuestos al principio de la sección, las ecuaciones de Legendre (38) y de Bessel (39) , vemos que tampoco tienen coeficientes analíticos:

$$\underline{\text{Legendre}}: \quad \frac{d^2x}{dt^2} \underbrace{-\frac{2t}{1-t^2}}_{a(t)}\frac{dx}{dt} + \underbrace{\frac{p(p+1)}{1-t^2}}_{b(t))}x = 0$$

$$\underline{\text{Bessel}}: \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \underbrace{\frac{1}{t}}_{a(t)}\frac{dx}{dt} + \underbrace{\frac{t^2-\alpha^2}{t^2}}_{b(t)}x = 0.$$

La analiticidad de los coeficientes de la equation de Legendre falla: $t = 1$ y $t = -1$ no son puntos ordinarios de la equation de Legendre. También la ecuación de Bessel tiene fallos de analiticidad: $t = 0$ no es un punto ordinario de la ecuación de Bessel.

Sin embargo estos puntos son sólo “ligeramente no analíticos”, son lo que se denomina “puntos regulares singulares”:

Definición 4.3. *Un punto singular* $t_0 \in I\!R$ *es un punto regular singular si y sólo si las funciones* $(t-t_0)a(t)$ *y* $(t-t_0)^2 b(t)$ *son analíticas en* t_0*.*

Observación 2. *Uno comprobará fácilmente que en los ejemplos anteriores,* (40)*,* (39) *y* (38)*, los puntos singulares son regulares.*

En ausencia de analiticidad de los coeficientes a y b en un punto t_0, el hecho que ese punto t_0 sea regular singular resulta ser un “mal menor” que no introduce grandes dificultades para adaptar el método de series de potencias. . En efecto, si t_0 es un punto regular singular, entonces $(t-t_0)a(t)$ y $(t-t_0)^2 b(t)$ son analíticas en t_0 y

$$\left.\begin{aligned} (t-t_0)a(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot (t-t_0)^i \\ (t-t_0)^2 b(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} b_i \cdot (t-t_0)^i \end{aligned}\right\} \text{ en un entorno de } t_0,$$

luego

$$\left.\begin{aligned} a(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i (t-t_0)^{i-1} = \frac{a_0}{t-t_0} + \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+1}(t-t_0)^i \\ b(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} b_i (t-t_0)^{i-2} = \frac{b_0}{(t-t_0)^2} + \frac{b_1}{t-t_0} + \sum_{i=0}^{\infty} b_{i+2}(t-t_0)^i \end{aligned}\right\} \text{ cerca de } t_0$$

donde, por lo menos, uno de los coeficientes a_0, b_0 o b_1 es no nulo.

Sin perdida de generalidad podemos suponer que $t_0 = 0$ (de otra forma introduciríamos el cambio de variable $\tau = t - t_0$).

Entonces buscamos soluciones en una familia más amplia, en concreto buscamos soluciones de la forma

$$x(t) = t^{\sigma}(c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots) \tag{41}$$

donde σ puede ser un entero negativo, una fracción o, incluso, un irracional. Esta formulación de la solución generaliza la anterior ya que para $\sigma = 0$ recuperamos las funciones analíticas.

Para entender la razón de buscar soluciones de la forma expresada en (41) echemos un vistazo a la ecuación de Euler:

$$
(42) \qquad \begin{cases} t^2\dfrac{d^2x}{dt^2} + at\dfrac{dx}{dt} + bx = 0 \\ \\ \text{o multiplicando por } t^2\text{:} \\ \\ \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{a}{t}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{b}{t^2}x = 0 \end{cases}
$$

donde a y b son constantes. Introduciendo el cambio de variable independiente:

$$\tau = \log(t)$$

transformamos la ecuación (42) en una ecuación con coeficientes constantes. Supongamos $t > 0$,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{dx}{d\tau}\frac{1}{t}$$

y

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{d\tau}\right)\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\frac{dx}{d\tau} \\
&= \frac{1}{t}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{dx}{d\tau}\right)\frac{d\tau}{dt} - \frac{1}{t^2}\frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{t^2}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{dx}{d\tau}\right) - \frac{1}{t^2}\frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{t^2}\frac{d^2x}{d\tau^2} - \frac{1}{t^2}\frac{dx}{d\tau}.
\end{aligned}
$$

Insertando estas expresiones en (42) la ecuación se convierte en:

$$(43) \qquad \frac{d^2x}{d\tau^2} + (a-1)\frac{dx}{d\tau} + bx = 0.$$

Estudiando las raíces, λ_1 y λ_2 de la ecuación característica asociada:

$$(44) \qquad \lambda^2 + (a-1)\lambda + b = 0$$

obtenemos las soluciones de la ecuación (44):

$$
(45) \qquad \begin{cases} y_1(\tau) = e^{\lambda_1\tau}, \quad y_2(\tau) = e^{\lambda_2\tau} & \text{si } \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{[6]}, \\ y_1(\tau) = e^{\lambda_1\tau}, \quad y_2(\tau) = \tau e^{\lambda_1\tau} & \text{si } \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases}
$$

de las que deducimos las soluciones de la ecuación de Euler (42):

$$
(46) \qquad \begin{cases} x_1(t) = t^{\lambda_1}, \quad x_2 = t^{\lambda_2} & \text{si } \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ x_1(t) = t^{\lambda_1}, \quad x_2 = \log(t)t^{\lambda_2} & \text{si } \lambda_1 = \lambda_2. \end{cases}
$$

(Abrimos un paréntesis para observar que la ecuación (40) es un caso particular de la ecuación de Euler con $a = 2$ y $b = -2$. En este caso las raíces de la ecuación característica

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

son

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1 = 1 && \text{que da la solución analítica } x_1(t) = t, \text{ y} \\
&\lambda_2 = -2 && \text{que da la otra solución, } x_2(t) = \frac{1}{t^2}.)
\end{aligned}
$$

Si multiplicamos los coeficientes constantes de la ecuación de Euler por funciones analíticas obtenemos una ecuación de segundo orden, de carácter más general, donde $t = 0$ es un punto regular singular:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots}{t}\frac{dx}{dt} + \frac{b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots}{t^2} x = 0$$

¿Tiene sentido esperar encontrar soluciones de esta ecuación que tengan la forma de las soluciones anteriores (46) multiplicadas por una serie:

$$(47) \qquad \begin{cases} x_1(t) = t^{\sigma_1} \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i, \quad x_2 = t^{\sigma_2} \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} d_i t^i \\ \\ o \\ \\ x_1(t) = t^{\sigma_1} \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i, \quad x_2 = \log(t) t^{\sigma_2} \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} d_i t^i ? \end{cases}$$

Una serie como la que aparece en (41) se denomina serie de Frobenius. Siempre podemos considerar $c_0 \neq 0$ dado que de no ser así, factorizando la potencia más baja de t nos colocaríamos en esa situación. Por lo tanto, en lo sucesivo consideraremos $c_0 \neq 0$.

El siguiente ejemplo nos dará una buena ilustración de lo anterior. Consideremos la ecuación:

$$2t^2 \frac{d^2x}{dt^2} + t(2t+1)\frac{dx}{dt} - x = 0$$

la re-escribimos de la forma (35):

$$(48) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1+2t}{2t}\frac{dx}{dt} - \frac{1}{2t^2} x = 0,$$

donde $ta(t) = 1/2 + t$ y $t^2 b(t) = -1/2$. Buscamos una solución en forma de serie de Frobenius:

$$x(t) = t^{\sigma} \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^{i+\sigma}.$$

Derivando obtenemos:

$$x'(t) = \sum_{i=0}^{\infty} (i+\sigma) c_i t^{i+\sigma-1}$$

y

$$x''(t) = \sum_{i=0}^{\infty} (i+\sigma)(i+\sigma-1) c_i t^{i+\sigma-2},$$

por lo que la ecuación anterior se escribirá

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=0}^{\infty}(i+\sigma)(i+\sigma-1)c_i t^{i+\sigma-2} + \frac{1+2t}{2t}\sum_{i=0}^{\infty}(i+\sigma)c_i t^{i+\sigma-1} - \frac{1}{2t^2}\sum_{i=0}^{\infty} c_i t^{i+\sigma} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}(i+\sigma)(i+\sigma-1)c_i t^{i+\sigma-2} + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}(i+\sigma-1)c_i t^{i+\sigma-2} - \sum_{i=1}^{\infty}(i+\sigma-1)c_{i-1} t^{i+\sigma-2}
\end{aligned}
$$

y, re-agrupando por potencias de t

$$
\begin{aligned}
0 = &\left(\sigma(\sigma-1) + \frac{1}{2}(\sigma-1)\right) c_0 t^{\sigma-2} \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{\infty}\left[\left((i+\sigma)(i+\sigma-1) + \frac{1}{2}(i+\sigma-1)\right) c_i + (i+\sigma-1)c_{i-1}\right] t^{i+\sigma-2}
\end{aligned}
$$

de lo que deducimos:

$$
\left[
\begin{array}{l}
(\sigma + \frac{1}{2})(\sigma-1)c_0 = 0 \\
\left((1+\sigma)\sigma + \frac{\sigma}{2}\right) c_1 + \sigma c_0 = 0 \\
\cdots \\
\left(i+\sigma+\frac{1}{2}\right)(i+\sigma-1)c_i + (i+\sigma-1)c_{i-1} = 0 \\
\cdots
\end{array}
\right.
$$

Dado que $c_0 \neq 0$, los únicos valores posibles de σ son:

$$\sigma_1 = 1 \quad \text{y} \quad \sigma_2 = -\frac{1}{2}.$$

Luego, para $\sigma_1 = 1$ tendremos una solución analítica en $t=0$ de la forma

$$x_1(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^{i+1}$$

donde $c_0 \neq 0$ es arbitrario y

$$
\left[
\begin{array}{l}
c_1 = -\frac{2}{5}c_0 \\
\\
c_2 = -\frac{2}{7}c_1 = \frac{4}{35}c_0 \\
\cdots \\
c_i = -\frac{1}{i+\frac{3}{2}}c_{i-1} = (-1)^i \prod_{j=1}^{i}\frac{1}{j+\frac{3}{2}}c_0 \\
\cdots
\end{array}
\right.
$$

Para $\sigma_2 = -\dfrac{1}{2}$ la solución no es analítica en $t = 0$:

$$x_2(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^{i-\frac{1}{2}},$$

y siendo $c_0 \neq 0$ arbitrario, obtenemos

$$\left[\begin{array}{l} c_1 = -c_0 \\ \\ c_2 = -\dfrac{1}{2} c_1 = \dfrac{1}{2} c_0 \\ \dots \\ c_i = -\dfrac{1}{i2} c_{i-1} = (-1)^i \dfrac{1}{i!} c_0 \\ \dots \end{array}\right.$$

Esto nos puede dar una visión de lo que pasa en el caso general, aunque este sea más complejo. Consideremos ahora este caso general:

$$ta(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$$
$$tb(t) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i$$

y buscamos una solución de (35) con desarrollo en serie de Frobenius:

$$x(t) = t^{\sigma} \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i.$$

En estas condiciones la ecuación (35) da:

$$\begin{aligned} 0 = &\sum_{i=0}^{\infty} (i+\sigma)(i+\sigma-1) c_i t^{i+\sigma-2} \\ &\quad + \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j t^{j-1}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+\sigma) c_k t^{k+\sigma-1}\right) + \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j t^{j-2}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+\sigma}\right) \\ &\quad = \sum_{i=0}^{\infty} \left((i+\sigma)(i+\sigma-1) c_i + \sum_{j=0}^{i} a_j c_{i-j} (i-j+\sigma) + \sum_{j=0}^{i} b_j c_{i-j} \right) t^{i+\sigma-2} \end{aligned}$$

e igualando a 0 los coeficientes de las diferentes potencias de t se tiene:

$$\left[\begin{array}{l}
\overbrace{(\sigma(\sigma-1)+a_0\sigma+b_0)}^{g(\sigma))}c_0=0\\
\overbrace{((\sigma+1)\sigma+a_0(\sigma+1)+b_0)}^{g(\sigma+1)}c_1+(a_1\sigma+b_1)c_0=0\\
\overbrace{((\sigma+2)(1+\sigma)+a_0(2+\sigma)+b_0)}^{g(\sigma+2)}c_2+(a_1(1+\sigma)+b_1)c_1+(a_\sigma+b_2)c_0\\
\dots\\
\overbrace{((\sigma+i)(\sigma+i-1)+(\sigma+i)a_0+b_0)}^{g(\sigma+i)}c_i+\displaystyle\sum_{j=0}^{i-1}((\sigma-j)a_{i-j}+b_{i-j})c_j=0\\
\dots
\end{array}\right.$$

Recordemos que c_0 es no nulo. De hecho c_0 puede ser elegido arbitrariamente en $I\!R\setminus\{0\}$. Entonces, de las anteriores relaciones deducimos que:

$$g(\sigma)=(\sigma(\sigma-1)+a_0\sigma+b_0)=0$$

y los coeficientes c_i se despejan sucesivamente:

$$(49)\qquad\left[\begin{array}{l}
c_1=-\dfrac{a_1\sigma+b_1}{g(\sigma+1)}\\[2ex]
c_2=-\dfrac{(a_1\sigma+b_1)c_0}{g(\sigma+2)}\\
\dots\\
c_i=-\dfrac{\sum_{j=0}^{i-1}((\sigma-j)a_{i-j}+b_{i-j})c_j}{g(\sigma+i)}\\
\dots
\end{array}\right.$$

$\triangle$ siempre que $g(\sigma+i)\neq 0$ para todo $i\neq 0$ en $I\!N$. Si σ_1 y σ_2 son las raíces (suponemos que reales aunque podrían ser complejas) de $g(\sigma)=0$ tales que $\sigma_1\geq\sigma_2$, entonces $g(\sigma_1+i)\neq 0$ para todo entero $i>0$ dado que $\sigma_1+i>\sigma_1\geq\sigma_2$ luego σ_1+i nunca será raíz de g. Por lo tanto podemos calcular una primera solución en forma de serie de Frobenius.

Por otra parte, si $\sigma_1>\sigma_2$ y $\sigma_1-\sigma_2\notin I\!N$ entonces, para todo entero $i>0$ $\sigma_2+i\neq\sigma_k$, para $k=1,2$ luego σ_2+i no es raíz de g para ningún i entero positivo, luego $g(\sigma_2+i)\neq 0$ lo que permite hallar una segunda solución en forma de serie de Frobenius. En definitiva tenemos:

Teorema 4.4. *Suponemos que $t=0$ es un punto singular regular de la ecuación (35) y que $ta(t)$ y $t^2b(t)$ son analíticas en un entorno $|t|<\delta$, con $\delta>0$. Supongamos que la ecuación $g(\sigma)$ tiene dos raíces reales σ_1 y σ_2 con $\sigma_1\leq\sigma_2$. Entonces la ecuación tendrá al* *menos una solución en forma de serie de Frobenius:*

$$x_1(t) = t^{\sigma_1} \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i$$

en el intervalo $0 < t < \delta$*, donde los coeficientes* c_i *se calculan con la fórmula de repetición* (49) *dando a* σ *el valor de* σ_1*. Además la serie* $\sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i$ *converge para* $|t| < \delta$*.*

Además, si $\sigma_1 - \sigma_2$ *no es* 0 *ni un entero positivo, entonces la ecuación*(35) *tendrá una segunda solución en forma de serie de frobenius:*

$$x_2(t) = t^{\sigma_2} \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i$$

en el intervalo $0 < t < \delta$*, donde los coeficientes* c_i *se calculan con la fórmula de repetición* (49) *dando a* σ *el valor de* σ_2*. De nuevo la serie* $\sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i$ *converge para* $|t| < \delta$*.*

La demostración del teorema está prácticamente concluida a falta de demostrar que la serie $\sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i$ converge para $|t| < \delta$. El estudiante interesado podrá encontrar esta demostración en [S].

Referencias

[F] Carlos Fernández Pérez *Ecuaciones diferenciales-I Ecuaciones lineales.* Colección Ciencia y Técnica, Editorial Pirámide, 1992.

[FVV] Carlos Fernández Pérez, Francisco José Vázquez Hernández & José Manuel Vegas Montaner *Ecuaciones diferenciales y en diferencias. Sistemas dinámicos.* Editorial Thomson, 2003.

[P] L. Pontriaguin *Équations différentielles ordinaires.* Editorial MIR, 1975.

[S] George F. Simmons *Ecuaciones diferenciales* Editorial McGraw-Hill, 1977.