ECUACIONES DIFERENCIALES

Técnicas básicas de resolución de ecuaciones diferenciales de primer orden

1. Introducción

1.1. Notaciones. Las ecuaciones diferenciales son ecuaciones cuyas incógnitas son funciones de una o varias variables. Estas ecuaciones no sólo involucran a las propias funciones sino también a sus derivadas. Si las funciones implicadas son de varias variables las derivadas implicadas son derivadas parciales y las ecuaciones se denominan *ecuaciones en derivadas parciales (EDP)*. Si las funciones son de una sola variable tendremos *ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)*.

El objeto de esta asignatura es el estudio de estas últimas.

A lo largo del curso x representará la función escalar o vectorial solución de la ecuación, t representará la variable. Las derivadas de x respecto de t se notarán

$$x' = \frac{dx}{dt}$$

$$x^{(n)} = \frac{d^n x}{dt^n}.$$

En la literatura podremos encontrar la notación $\dot{x}$ en lugar de x'.

Las ecuaciones diferenciales que veremos estarán, en general, resueltas respecto de la derivada, presentando el siguiente aspecto:

$$x' = f(t,x)$$

siendo f una función "suficientemente buena", aunque podremos encontrar alguna ecuación formulada en términos más generales:

$$F(t,x,x') = 0.$$

La expresión anterior $x' = f(t,x)$ representa tanto una ecuación, cuando x es una función real y f también es una función con valor en $I\!R$, como un sistema de ecuaciones cuando, tanto x como f son funciones con valor en $I\!R^n$: $x = x_1, \ldots, x_n$, y $f = f_1, \ldots, f_n$

$$\begin{aligned} &x_1' = f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ &\cdots \\ &x_n' = f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

La formulación anterior permite contemplar ecuaciones o sistemas de orden superior. Consideremos, por ejemplo, la ecuación diferencial (escalar)) de orden 2:

$$x'' = f(t, x, x').$$

Poniendo $x' = y$ convertimos esa ecuación de segundo orden en un sistema de 2 ecuaciones de primer orden:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = f(t, x, y) \end{cases}$$

que se puede formular como

$$X' = F(t, X)$$

siendo $X = (x, y)$ y $F(t, X) = F(t, x, y) = (y, f(t, x, y))$. Este mismo procedimiento se extiende a ecuaciónes (o sistemas de ecuaciones)de orden cualquiera, dando lugar a sistemas de orden 1.

1.2. Existencia y unicidad de la solución. En esta sección enunciaremos los principales teoremas concernientes la existencia y la unicidad de la solución de una ecuación diferencial, así como algún resultado de dependencia de las soluciones respecto de los datos iniciales. La razón de anticipar estos enunciados a las demostraciones de los mismos es poder manejar soluciones sin arrastrar dudas sobre su idoneidad.

Teorema 1.1. Existencia y unicidad *Sea* (α, β) *un intervalo de* $I\!R$*, sea* Ω *un abierto de* $I\!R^n$*,* $n \geq 1$*, y sea* $f(t, x)$ *una función continua de* $(\alpha, \beta) \times \Omega$ *a valores en* $I\!R^n$ *(*$f \in \mathcal{C}((\alpha, \beta) \times \Omega; I\!R^n)$*). Suponemos que* f *tiene derivadas parciales respecto a* x_i*, para* $i = 1, \cdots, n$ *en todo punto de* $(\alpha, \beta) \times \Omega$ *y que*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{C}((\alpha, \beta) \times \Omega; I\!R^n).$$

Entonces, para cualquier (t_0, x_0) *de* $(\alpha, \beta) \times \Omega$ *existe* $a > 0$ *tal que el problema de valor inicial*

$$x' = f(t, x) \qquad x(t_0) = x_0$$

tenga una única solución en el intervalo $[t_0 - a, t_0 + a]$*.*

La hipótesis

$$(1) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \text{para } i = 1 \cdots, n \text{ es una función continua en } (\alpha, \beta) \times \Omega$$

si $x \in I\!R^n$, $x = (x_1, \cdots, x_n)$ no parecen determinantes para la existencia de solución. Así podemos plantear el problema de valor inicial:

$$x' = \sqrt{|x|} \quad x(0) = 0$$

que tiene infinitas soluciones. Para $c \geq 0 \geq c'$

$$x(t) = \begin{cases} [(t-c)^+]^2/4 & \text{para } t \geq 0, \\ -[(c'-t)^+]^2/4 & \text{para } 0 \geq t. \end{cases}$$

En este caso el teorema de existencia de Peano explica este resultado:

Teorema 1.2. Existencia local de Peano *Sea $f(t,x)$ una función continua en $(\alpha,\beta)\times\Omega$. Entonces, para cualquier (t_0,x_0) de $(\alpha,\beta)\times\Omega$ existe $a>0$ tal que el problema de valor inicial*

$$x' = f(t,x) \qquad x(t_0) = x_0$$

tenga, al menos, una solución en el intervalo $[t_0-a, t_0+a]$.

1.3. Métodos aproximados. Antes de dedicarnos a la resolución de algunas ecuaciones diferenciales tenemos que saber que en el caso general, las ecuaciones o los sistemas de ecuaciones diferenciales no pueden ser integrados de forma exacta. Por ello resultan importantes el estudio de métodos aproximados que nos acerquen a las soluciones de las ecuaciones. Podremos diferenciar los métodos cualitativos que aportarán información de tipo cualitativo sobre las soluciones, es el caso de las isoclinas, de los métodos cuantitativos o numéricos, que pretenden un cálculo aproximado de la solución.

1.3.1. Isoclinas. Sea la ecuación diferencial $x' = f(t,x)$, siendo f una función definida en un rectángulo $\mathcal{D}$ del plano. A cada punto (t_0,x_0) de $\mathcal{D}$ se puede asociar una dirección definida por un segmento $S(t_0,x_0)$ y su pendiente $f(t_0,x_0)$. Así se define un campo de direcciones sobre $\mathcal{D}$. Las soluciones de la ecuación diferencial son las curvas que son tangentes en cada punto al campo de direcciones.

Las isoclinas son las curvas de nivel del campo de direcciones, i.e. un subconjunto de puntos de $\mathcal{D}$ de la forma: $\{(t,x)\in\mathcal{D}/\, f(t,x)=c\}$ (ver figuras 1 y 2).

1.3.2. Métodos numéricos. Consideramos problema de valor inicial:

$$x' = f(t,x) \quad \text{en } t_0, t_0+a,\ x(t_0) = x_0 \tag{2}$$

y supongamos por un momento que la función f es $\mathcal{C}^\infty$ entonces, la solución $x(t)$ es una función $\mathcal{C}^\infty$ y, para h pequeño se tendrá:

$$x(t_0+h) = x(t_0) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h^i}{i!}\frac{d^i x}{d\,x^i}(t_0). \tag{3}$$

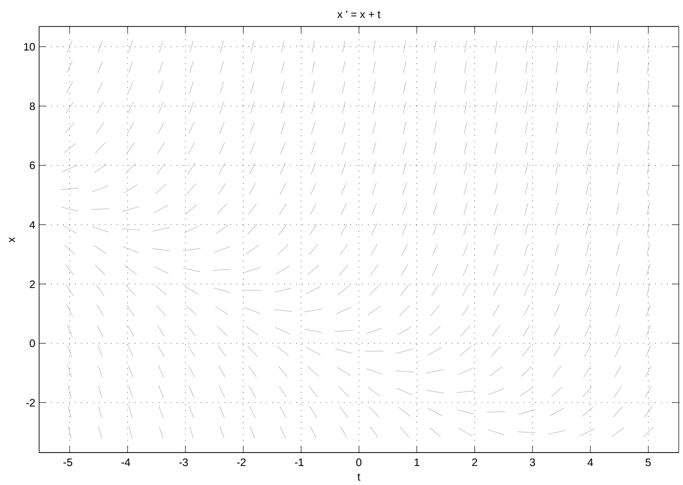

FIGURA 1. Campo de direcciones asociado a la ecuación $x' = x + t$

Si escribimos

$$f^{(0)}(t_0, x_0) = f(t_0, x_0) = \frac{dx}{dt}(t_0),$$
$$f^{(1)}(t_0, x_0) = \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(t_0, x_0) f(t_0, x_0) = \frac{d^2x}{dt^2}(t_0)$$
$$\ldots$$
$$f^{(i)}(t_0, x_0) = \frac{\partial f^{(i-1)}}{\partial t}(t_0, x_0) + \frac{\partial f^{(i-1)}}{\partial x}(t_0, x_0) f(t_0, x_0) = \frac{d^{(i+1)}x}{dt^{i+1}}(t_0),$$

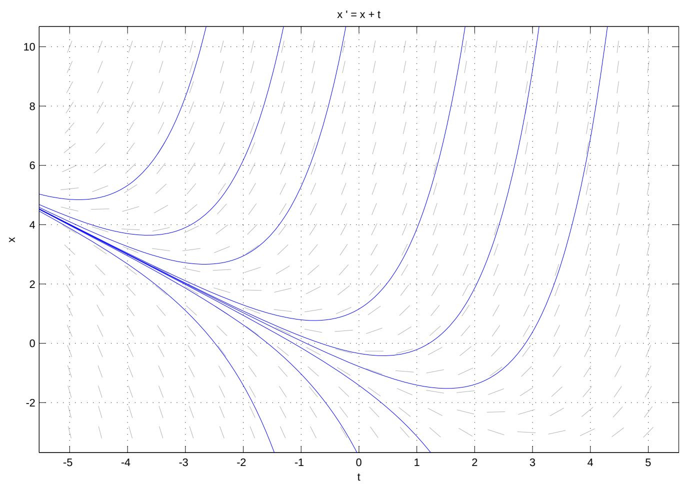

Figura 2. Algunas soluciones de la ecuación $x' = x + t$ con el campo de direcciones asociado

entonces todos los términos del desarrollo (3) pueden ser calculados de forma exacta. Sin embargo es obvio que el valor de $x(t_0 + h)$ no puede, en general, calcularse de forma exacta dado que este cálculo requeriría infinitas operaciones. Una opción razonable consiste en truncar el anterior desarrollo.

1.3.3. El método de Euler. Considerando el problema de valor inicial (2), M será un entero destinado a tender hacia el infinito y definimos el paso $h = a/M$. Definimos los nodos $t_i = t_0 + i\,h$ para $i = 1, 2, \cdots, M$ donde $t_M = t_0 + a$. Calculamos unos "valores aproximados" x_i de $x(t_i)$ con el siguiente algoritmo:

$$x_{i+1} = x_i + h\,f(t_i, x_i) \quad \text{para } i = 0, 1, \cdots, M-1.$$

Mediante interpolación lineal a trozos podemos reconstruir una función x_h definida en $(t_0, t_0 + a)$:

$$x_h(t) = x_i + (t - t_i)\,f(t_i, x_i) \quad \text{para } t_i \leq t \leq t_{i+1},\ i = 0, 1, \cdots, M-1.$$

2. Técnicas básicas de resolución de ecuaciones diferenciales de primer orden

En general resulta muy difícil, cuando no imposible, hallar las soluciones de ecuaciones diferenciales del tipo

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x). \tag{4}$$

Sin embargo, algunas ecuaciones o algunos tipos de ecuaciones pueden ser resueltos por métodos específicos.

2.1. Separación de variables. Consideremos la ecuación (4) donde $f(t,x) = h(t)g(x)$:

$$\frac{dx}{dt} = h(t)g(x) \tag{5}$$

donde h es una función continua y g es una función continua y no nula. Entonces, consideremos la ecuación (5), dividiendo por $g(x)$ obtenemos

$$\frac{1}{g(x)}\frac{dx}{dt} = h(t).$$

Sean G una primitiva de $1/g$ y H una primitiva de h, la ecuación anterior equivale a

$$\frac{d\,G(x)}{dt} = \frac{d\,H(t)}{dt}.$$

Como g es continua y no se anula, G estrictamente monótona y, tanto G como G^{-1} son funciones de clase 1 por lo que

$$x(t) = G^{-1}(H(t) + C)$$

es solución de nuestra ecuación para cualquier constante C.

2.2. Ecuaciones homogéneas: cambio de variable dependiente. Una función $g(t,x)$ es homogénea de grado n si

$$g(\lambda t, \lambda x) = \lambda^n g(t,x),$$

por ejemplo $g(t,x) = t^2 + 2tx + 5x^2$ es homogénea de grado 2, $g(t,x) = \sqrt{t^2 + x^2}$ es homogénea de grado 1 y $g(t,x) = (t/x)^4$ es homogénea de grado 0.

Una ecuación diferencial del tipo (4) es homogénea si se puede escribir como

$$g(t,x)\frac{dx}{dt} = h(t,x)$$

siendo g y h funciones homogéneas de mismo grado. Es equivalente a decir que $f(t,x)$ es homogénea de grado 0, y, en particular,

$$f(t,x) = f(1, x/t).$$

Podemos cambiar la variable dependiente x por una nueva variable dependiente $y = x/t$.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(ty)}{dt} = y + t\frac{dy}{dt}.$$

La ecuación (4) se convierte en

$$y + t\frac{dy}{dt} = f(1, y),$$

pudiendo separar las variables:

$$\frac{1}{f(1,y) - y}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}.$$

2.3. Ecuaciones exactas. Consideremos el caso en que la ecuación (4) se puede escribir en la forma

$$g(t,x)\frac{dx}{dt} + h(t,x) = 0 \tag{6}$$

siendo g y h derivadas parciales de una función F:

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = g(t,x) \qquad \frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = h(t,x) \tag{7}$$

entonces

$$g(t,x)\frac{dx}{dt} + h(t,x)$$

es la derivada total de $F(t, x(t))$ respecto de t,

$$\frac{dF(t,x(t))}{dt} = 0$$

por lo que

$$F(t, x(t)) = K$$

siendo K una constante. Una ecuación del tipo (6) que verifique (7) es una ecuación exacta. La condición (7) equivale a decir que

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial x}. \tag{8}$$

2.4. Factor integrante.

2.4.1. Existencia de un factor integrante. Una función $m(t,x)$ es un factor integrante de la ecuación

$$n(t,x)\frac{dx}{dt}+p(t,x)=0 \tag{9}$$

si

$$m(t,x)n(t,x)\frac{dx}{dt}+m(t,x)p(t,x)=0$$

es una ecuación exacta.

Si la ecuación (9) posee una solución general de la forma $F(t,x)=K$ entonces existe factor integrante. Cogiendo la derivada total de F tenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial t}=0$$

luego

$$\frac{dx}{dt}=-(\frac{\partial F}{\partial t})/(\frac{\partial F}{\partial x})=-\frac{p}{n}$$

y definimos

$$m=(\frac{\partial F}{\partial t})/p=(\frac{\partial F}{\partial x})/n$$

entonces m es un factor integrante de (9). Uno comprueba fácilmente que el factor integrante no es único ya que para cualquier función $\mathcal{G}(F)$, $m\mathcal{G}(F)$ es también un factor integrante.

2.4.2. Determinación de un factor integrante. De (8) se deduce que si m es un factor integrante de (9) entonces

$$\frac{\partial m}{\partial t}n+m\frac{\partial n}{\partial t}=\frac{\partial m}{\partial x}p+m\frac{\partial p}{\partial x}$$

i.e.

$$\frac{\partial m}{\partial t}n-\frac{\partial m}{\partial x}p=m(\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial n}{\partial t})$$

Supongamos que

$$(\frac{\partial n}{\partial t}-\frac{\partial p}{\partial x})/p=\varphi(x)$$

sea una función exclusiva de x, entonces podemos buscar una función m que sólo dependa de x que cumpla:

$$\frac{\partial m}{\partial x}/m=(\frac{\partial n}{\partial t}-\frac{\partial p}{\partial x})/p,$$

luego

$$\log m=\int\varphi(x)dx$$

y

$$m=e^{\int\varphi(x)dx}.$$

Podemos razonar de una forma similar cuando

$$(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial n}{\partial t})/n = \phi(t)$$

sólo depende de t. Entonces buscamos un factor integrante m como función de t:

$$m = e^{\int \phi(t)dt}.$$

2.5. Ecuaciones lineales. Las ecuaciones lineales constituyen una parte importante de las ecuaciones diferenciales. Una ecuación lineal es una ecuación del tipo:

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t).$$

Observamos que

$$\frac{d}{dt}\left(x\, e^{-\int a(t)dt}\right) = \frac{dx}{dt}\, e^{-\int a(t)dt} - a(t)\, x\, e^{-\int a(t)dt} = \left(\frac{dx}{dt} - a(t)\, x\right) e^{-\int a(t)dt} = b(t)\, e^{-\int a(t)dt},$$

por lo que

$$x\, e^{-\int a(t)dt} = \int b(t)\, e^{-\int a(t)dt}\, dt + c,$$

y

$$x = e^{\int a(t)dt}\left(\int b(t)\, e^{-\int a(t)dt}\, dt + c\right).$$

2.6. Linealización. La ecuación de Bernoulli. Algunas ecuaciones no lineales son suceptibles de ser transformadas en ecuaciones lineales por medio de un cambio de variable dependiente. Por ejemplo

$$2tx\frac{dx}{dt} + x^2 = t.$$

Introduciendo como nueva varable $y = x^2$ la anterior ecuación se convierte en una ecuación lineal:

$$t\frac{dy}{dt} + y = t.$$

De forma similar:

$$\frac{dx}{dt} = a(t) + b(t)\, e^{nx}$$

multiplicando por e^{-nx} e introduciendo $y = e^{-nx}$ se convierte en

$$-\frac{1}{n}\frac{dy}{dt} = a(t)y + b(t).$$

La ecuación de Bernoulli

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)x^n$$

admite un tratamiento similar a las anteriores. Dividimos la ecuación por x^n

$$x^{-n}\frac{dx}{dt} = a(t)x^{1-n} + b(t)$$

y efectuamos el cambio $y = x^{1-n}$, obteniendo la ecuación lineal:

$$\frac{1}{1-n}\frac{dy}{dt} = a(t)y + b(t).$$

2.7. La ecuación de Riccati. La ecuación de Riccati

$$\frac{dx}{dt} = a(t)\,x^2 + b(t)\,x + c(t) \tag{10}$$

ofrece nuevas dificultades.

2.7.1. Conociendo una solución particular. Sin embargo, si conocemos una solución particular, $y = y(t)$, de la ecuación de Riccati, podemos hallar una solución general, $x = x(t)$, restando las ecuaciones para x y para y:

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = a(t)\,\left(x^2 - y^2\right) + b(t)\,(x-y) \tag{11}$$

y escribiendo $z = x - y$ se tiene

$$\frac{dz}{dt} = a(t)\,\left(z^2 + 2yz\right) + b(t)\,z$$

es decir

$$\frac{dz}{dt} = a(t)\,z^2 + \,(b(t) + 2a(t)\,y(t))\,z$$

que no es otra que la ecuación de Bernoulli para $n = 2$. Dividiendo por z^2 y escribiendo $\xi = 1/z$ obtenemos la siguiente ecuación lineal:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\,(b(t) + 2a(t)\,y(t))\,\xi - a(t).$$

Si ξ es la solución general de la anterior ecuación, entonces $x = y + 1/\xi$ es la solución general de la ecuación de Riccati.

2.7.2. Conociendo dos soluciones particulares. Si conocemos una segunda solución particular de la ecuación de Riccati, $h = h(t)$ y escribiendo (11) en la forma

$$\left(\frac{d(x-y)}{dt}\right)/(x-y) = a(t)\,(x+y) + b(t)$$

y restando la correspondiente expresión para la solución particular h, se obtiene

$$\left(\frac{d(x-y)}{dt}\right)/(x-y) - \left(\frac{d(x-h)}{dt}\right)/(x-h) = a(t)\,(y-h).$$

Integrando obtenemos

$$\log(|x-y|) - \log(|x-h|) = \int a(t)\,(y(t)-h(t))\,dt\, + k$$

y

$$\frac{x-y}{x-h} = K\, e^{\int a(t)\,(y(t)-h(t))\,dt}, \tag{12}$$

(donde $K = \pm e^k$ según que $|\frac{x-y}{x-h}| = \pm\frac{x-y}{x-h}$). Despejando, la solución general de la ecuación de Riccati es

$$x(t) = \left(y(t) - h(t)K\, e^{\int a(t)\,(y(t)-h(t))\,dt}\right) / \left(1 - K\, e^{\int a(t)\,(y(t)-h(t))\,dt}\right).$$

2.7.3. Conociendo tres soluciones particulares. Supongamos conocida una tercera solución $g = g(t)$ de (10) entonces, establecemos la relación (12) con g en lugar de x:

$$\frac{g-y}{g-h} = K'\, e^{\int a(t)\,(y(t)-h(t))\,dt}. \tag{13}$$

y dividimos (12) por (13):

$$\frac{(x-y)\,(g-h)}{(x-h)\,(g-y)} = C\left(= \frac{K}{K'}\right),$$

luego

$$x(t) = \frac{y(t)(g(t)-h(t)) - h(t)C(g(t)-y(t))}{(g(t)-h(t)) - C(g(t)-y(t))}.$$

Referencias

[FVV] Carlos Fernández Pérez, Francisco José Vázquez Hernández & José Manuel Vegas Montaner *Ecuaciones diferenciales y en diferencias. Sistemas dinámicos.*

[LRF] Lester R. Ford *DifferentialEquations.*