Tema 1. La conducta económica: Elementos de la demanda.

Ejercicios propuestos

1. **Considere un consumidor cuya función de utilidad es $\boldsymbol{U(q_1, q_2) = q_1 x q_2}$. Este consumidor dispone de 100 u.m. y los precios de los dos bienes son $(\boldsymbol{p_1 = 1, p_2 = 2})$.**
   a. **Dibuje las curvas de indiferencia correspondientes a los niveles de utilidad 1 y 4.**

$$U(q_1, q_2) = q_1 x q_2.$$
$$1 = q_1 x q_2 \rightarrow q_1 = \frac{1}{q_2} \quad 4 = q_1 x q_2 \rightarrow q_1 = \frac{4}{q_2}$$

$\frac{\partial q_1}{\partial q_2} = -\frac{U}{(q_2)^2} < 0$ Función decreciente

$\frac{\partial^2 q_1}{\partial {q_2}^2} = 2\frac{U}{(q_2)^3} > 0$ Función convexa respecto al origen

(Representación gráfica en la transparencia número 11 de la teoría)

   b. **Considere la función de utilidad $\boldsymbol{U(q_1, q_2) = (q_1 x q_2)^2}$. Compruebe que genera el mismo mapa de curvas de indiferencia que la función de utilidad inicial. Justifique este resultado.**

Esta función de utilidad es la misma que la anterior pero elevada al cuadrado → transformación monótona creciente.

Una forma de demostrar de manera clara que ambas generan el mismo mapa de curvas de indiferencia es calculando la RMS.

$$RMS_2^1 = \frac{U'_2}{U'_1}$$

$U(q_1, q_2) = q_1 x q_2$

- $U'_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2} = q_1$; $U'_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1} = q_2$
- $RMS_2^1 = \frac{U'_2}{U'_1} = \frac{q_1}{q_2}$

$U(q_1, q_2) = (q_1 x q_2)^2$

- $U'_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2} = 2(q_1 x q_2)q_1$; $U'_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1} = 2(q_1 x q_2)q_2$
- $RMS_2^1 = \frac{U'_2}{U'_1} = \frac{2(q_1 x q_2)q_1}{2(q_1 x q_2)q_2} = \frac{q_1}{q_2}$

   c. **Calcule las utilidades marginales de ambos bienes. Comente sus propiedades.**

$$U'_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2} = q_1 \; ; U'_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1} = q_2$$

La utilidad marginal de ambos bienes es positiva, esto es, al aumentar la cantidad consumida del bien uno (bien dos), la utilidad aumenta.

d. Represente la curva de indiferencia que pasa por el punto (1, 2). Halle la RMS en ese punto a partir de la derivada de la curva de indiferencia y como cociente de utilidades marginales.

Como derivada de la curva de indiferencia

$RMS_2^1 = -\frac{\partial q_1}{\partial q_2} = \frac{2}{{q_2}^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ → Este valor nos dice que por una unidad adicional del bien 2, estoy dispuesto a renunciar a 0.5 unidades del bien 1 para que mi utilidad no varíe.

$RMS_1^2 = -\frac{\partial q_2}{\partial q_1} = \frac{2}{{q_1}^2} = 2$ → Este resultado indica que por una unidad del adicional del bien 1, estoy dispuesto a renunciar a 2 unidades del bien 2, manteniendo mi utilidad constante.

Como cociente de las utilidades marginales

$RMS_2^1 = \frac{U'_2}{U'_1} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{1}{2}$ → Este valor nos dice que por una unidad adicional del bien 2, estoy dispuesto a renunciar a 0.5 unidades del bien 1 para que mi utilidad no varíe.

$RMS_1^2 = \frac{U'_1}{U'_2} = \frac{q_2}{q_1} = 2$ → Este resultado indica que por una unidad del adicional del bien 1, estoy dispuesto a renunciar a 2 unidades del bien 2, manteniendo mi utilidad constante.

e. Calcule la relación marginal de sustitución en los puntos (1, 1), (0.5, 2), (2, 0.5), (2, 2), (3, 1) y (1, 3). Interprete los resultados.

(1,1) → $RMS_2^1 = \frac{U'_2}{U'_1} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{1}{1} = 1$ → Este valor nos dice que por una unidad adicional del bien 2, estoy dispuesto a renunciar a 1 unidades del bien 1 para que mi utilidad no varíe.

(0.5,2) → $RMS_2^1 = \frac{U'_2}{U'_1} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{0.5}{2} = 0.25$ → Este valor nos dice que por una unidad adicional del bien 2, estoy dispuesto a renunciar a 0.25 unidades del bien 1 para que mi utilidad no varíe.

(2,0.5) → $RMS_2^1 = \frac{U'_2}{U'_1} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{2}{0.5} = 4$ → Este valor nos dice que por una unidad adicional del bien 2, estoy dispuesto a renunciar a 4 unidades del bien 1 para que mi utilidad no varíe.

(2,2) → $RMS_2^1 = \frac{U'_2}{U'_1} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{2}{2} = 1$ → Este valor nos dice que por una unidad adicional del bien 2, estoy dispuesto a renunciar a 1 unidades del bien 1 para que mi utilidad no varíe.

(3,1) → $RMS_2^1 = \frac{U'_2}{U'_1} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{3}{1} = 3$ → Este valor nos dice que por una unidad adicional del bien 2, estoy dispuesto a renunciar a 3 unidades del bien 1 para que mi utilidad no varíe.

(1,3) → $RMS_2^1 = \frac{U'_2}{U'_1} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{1}{3} = 0.3$ → Este valor nos dice que por una unidad adicional del bien 2, estoy dispuesto a renunciar a 0.33 unidades del bien 1 para que mi utilidad no varíe.

f. Calcule la elección óptima del consumidor y sus funciones de demanda.

$$Max\ U(q_1, q_2) = q_1 x q_2$$
$$s.a.\ Y = p_1 q_1 + p_2 q_2$$

c.p.o

$$RMS_2^1 = \frac{U'_2}{U'_1} = \frac{p_2}{p_1}$$
$$Y = p_1 q_1 + p_2 q_2$$

En la primera condición, podemos obtener:

$$RMS_2^1 = \frac{U'_2}{U'_1} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{p_2}{p_1} \rightarrow p_1 q_1 = p_2 q_2$$

Sustituyendo en la segunda obtenemos:

$$Y = 2p_1 q_1 \rightarrow q_1^* = \frac{Y}{2p_1}\ Función\ demanda\ bien\ 1$$
$$Y = 2p_2 q_2 \ \rightarrow q_2^* = \frac{Y}{2p_2}\ Función\ demanda\ bien\ 2$$

Elección óptima del consumidor

$$q_1^* = \frac{Y}{2p_1} = \frac{100}{2x1} = 50 \qquad q_2^* = \frac{Y}{2p_2} = \frac{100}{2x2} = 25 \quad U(q_1, q_2) = 50x25 = 1250$$

g. Suponga que la renta aumenta a 150 u.m., calcule la elección óptima, las curvas de demanda y represente gráficamente el problema del consumidor. Comente los resultados (desplazamientos de las curvas…).

$$q_1^* = \frac{Y}{2p_1} = \frac{150}{2x1} = 75 \qquad q_2^* = \frac{Y}{2p_2} = \frac{150}{2x2} = 37{,}5 \quad U(q_1, q_2) = 75x37{,}5 = 2812{,}5$$

Aumenta el consumo de ambos bienes y, por tanto, la utilidad.

En la representación gráfica, habrá que desplazar, de forma paralela, la recta de balance a la derecha. El nuevo punto de tangencia, se dará con una curva de indiferencia más alejada del origen que en el equilibrio inicial.

h. Suponga que el precio del bien 1 sube a 2, calcule la elección óptima, las curvas de demanda y represente gráficamente el problema del

consumidor. Comente los resultados (desplazamientos de las curvas…).

$$q_1^* = \frac{Y}{2p_1} = \frac{100}{2x2} = 25 \quad q_2^* = \frac{Y}{2p_2} = \frac{100}{2x2} = 25 \quad U(q_1, q_2) = 25x25 = 625$$

El consumo del bien 1 disminuye, el del bien 2 no cambias (su demanda no depende del precio del otro bien) y, en consecuencia, la utilidad disminuye.

Representación gráfica: la recta de balance cortará con el eje en el que representemos q_1 en un punto más cercano al origen, esto es, cambia su pendiente.

i. Suponga que el precio del bien 2 sube a 3, calcule la elección óptima, las curvas de demanda y represente gráficamente el problema del consumidor. Comente los resultados (desplazamientos de las curvas…).

$$q_1^* = \frac{Y}{2p_1} = \frac{100}{2x1} = 50 \quad q_2^* = \frac{Y}{2p_2} = \frac{100}{2x3} = 16{,}6 \quad U(q_1, q_2) = 50x16{,}6 = 833{,}33$$

La demanda del bien 1 no varía (no depende del precio del otro bien), la demanda del bien 2 disminuye y, por tanto, la utilidad cae.

Representación gráfica: la recta de balance cortará con el eje en el que representemos q_2 en un punto más cercano al origen, esto es, cambia su pendiente.

j. Realice la estática comparativa de las funciones de demanda de ambos bienes. ¿Son bienes normales o inferiores? ¿Son bienes sustitutivos o complementarios?

$q_1 = \frac{Y}{2p_1}$ $\quad$ $q_2 = \frac{Y}{2p_2}$ Funciones de demanda

$\frac{\partial q_1}{\partial Y} = \frac{1}{2p_1} > 0$ $\quad$ $\frac{\partial q_2}{\partial Y} = \frac{1}{2p_2} > 0$ Bienes normales

$\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = -\frac{Y}{2p_1} < 0$ $\quad$ $\frac{\partial q_2}{\partial p_2} = -\frac{Y}{2p_2} < 0$ Bienes ordinarios

$\frac{\partial q_1}{\partial p_2} = 0$ $\quad$ $\frac{\partial q_2}{\partial p_1} = 0$ bienes independientes

k. Calcule el excedente del consumidor. Si el precio del bien 1 sube a 2 um, ¿cuánto varía dicho excedente? ¿Cuánto varia el excedente del agente debido a su consumo del bien 2?

$$q_1^* = \frac{Y}{2p_1} \rightarrow p_1 = \frac{Y}{2q_1}$$

$$EC = \int_0^{50} \frac{50}{q_1} dq - p^* q^* = 50[ln(50) + ln(0)] - 50 = \infty$$

$$\nabla EC = \int_{25}^{50} \frac{50}{q_1} dq = 34{,}5$$

Como son bienes independientes, un cambio en el precio del bien 1 no supone una modificación de la demanda del bien 2 y, por tanto, el excedente del consumidor debido al bien 2 no varía.

I. Calcule la elasticidad-precio, la elasticidad cruzada y la elasticidad-renta.

$$e_{q_1 p_1} = -\frac{p_1}{q_1}\frac{dq_1}{dp_1} = \frac{Y}{2q_1 p_1} = 1 \ \ elasticidad\ unitaria$$

$$e_{q_1 p_2} = \frac{p_2}{q_1}\frac{dq_1}{dp_2} = 0 \quad bienes\ independientes$$

$$e_{q_1 Y} = \frac{Y}{q_1}\frac{dq_1}{dY} = \frac{Y}{q_1}\frac{1}{2p_1} = 1 \ \ bien\ normal$$

2. **Pablo solo consume Pizzas y Hamburguesas, a lo que destina 300 euros cada mes. Suponga que los precios de estos “bienes” son$(\boldsymbol{p_1 = 3},\ \boldsymbol{p_2 = 6})$ y su función de utilidad es $\boldsymbol{U(H,P) = P + 4H}$.**
   a. **Calcule la elección óptima de Pablo.**

$$RMS_H^P = \frac{U'_H}{U'_P} = \frac{p_H}{p_P} \rightarrow \frac{U'_H}{p_H} = \frac{U'_P}{p_P} \rightarrow \frac{4}{6} > \frac{1}{3}$$

Siempre, dados estos precios y estos gustos, le aporta más utilidad la última unidad gastada en hamburguesas. Por tanto, al tratarse de bienes sustitutivos perfectos, gastará todo su presupuesto en hamburguesas, obteniendo una demanda de hamburguesas y una utilidad de:

$$Y = p_P x P + p_H x H \rightarrow 300 = 3x0 + 6xH \rightarrow H = 50$$

$$U = 0 + 4x50 = 200$$

   b. **Si sus amigos le regalan un “Bono” de Pizza Hut por valor de 60 euros, ¿cambiará la elección de Pablo? ¿Cómo?**

Su renta aumente pero teniendo en cuenta que en equilibrio valora más el consumo de hamburguesas y que esos 60 euros, sólo puede gastarlos en pizza, su decisión no varía. Seguirá demandando 50 hamburguesas (gasta toda su renta en ese bien) y con el bono, podrá consumir (60/3) 20 pizzas, obteniendo una utilidad de:

$$U = 20 + 4x50 = 220$$

c. **Halle la cantidad de dinero en efectivo que le tendrían que haber dado para que estuviera igual de contento que con el "bono" de Pizza Hut. ¿cuál hubiera sido su elección en este caso?**

Como el óptimo es no consumir pizzas, tenemos que calcular cuantas hamburguesas tiene que consumir este individuo para obtener la misma utilidad del apartado anterior.

$$U = 0 + 4xH = 220 \rightarrow H = 55$$

Conociendo la demanda de hamburguesas, podemos obtener el presupuesto que necesitamos.

$$300 + X = 6x55 \rightarrow X = 30\ euros$$

d. **Si sus amigos le hubieran dado 60 euros (en vez del "bono") ¿Cómo los hubiera gastado Pablo? ¿cuánto habría mejorado su utilidad?**

De nuevo, mientras no cambien sus preferencias, seguirá gastando toda su renta en hamburguesas.

$$Y = 360 \quad P = 0 \quad 360 = 3x0 + 6xH \rightarrow H = 60$$

$$U = 0 + 4x60 = 240$$

3. **Sean dos personas (A y B) cuya renta es de 250 um y cuyas funciones de utilidad $U_A(q_1, q_2) = (q_1 - 5)(q_2 - 5)$, $U_B(q_1, q_2) = (q_1 - 5)^2(q_2 - 5)$. El precio del bien 2 es 10. El gobierno quiere incentivar el consumo del bien 1 para lo que se plantea 3 opciones: (i) fijar su precio en 8 um, (ii) fijar un precio de 10 euros y "regalar" 30 um a cada individuo, y (iii) fijar un precio 0 para las 5 primeras unidades y un precio de 10 um para el resto, junto a un impuesto del 10% sobre la renta.**
   a. **¿Cuánto consumirá cada individuo bajo cada una de las opciones?**

c.p.o

$$RMS_2^1 = \frac{U'_2}{U'_1} = \frac{p_2}{p_1}$$
$$Y = p_1 q_1 + p_2 q_2$$

⇨ Individuo A

Condiciones de primer orden

$$RMS_2^1 = \frac{U'_2}{U'_1} = \frac{q_1 - 5}{q_2 - 5} = \frac{p_2}{p_1} \rightarrow (q_1 - 5)p_1 = (q_2 - 5)p_2$$

$$Y = p_1 q_1 + p_2 q_2$$

Funciones de demanda

$$q_1 = \frac{Y + 5p_1 - 5p_2}{2p_1} \qquad q_2 = \frac{Y + 5p_2 - 5p_1}{2p_2}$$

- Individuo B

Condiciones de primer orden

$$RMS_2^1 = \frac{U'_2}{U'_1} = \frac{q_1 - 5}{2(q_2 - 5)} = \frac{p_2}{p_1} \rightarrow (q_1 - 5)p_1 = 2(q_2 - 5)p_2$$

$$Y = p_1 q_1 + p_2 q_2$$

Funciones de demanda

$$q_1 = \frac{2Y + 5p_1 - 10p_2}{3p_1} \qquad q_2 = \frac{Y + 10p_2 - 5p_1}{3p_2}$$

- Alternativa (i)
  - Elección óptima individuo A

$$q_1 = \frac{250 + 40 - 50}{16} = 15 \qquad q_2 = \frac{250 + 50 - 40}{20} = 13$$

$$U_A(q_1, q_2) = (15 - 5)(13 - 5) = 80$$

  - Elección óptima individuo B

$$q_1 = \frac{500 + 40 - 100}{24} = 18{,}33 \qquad q_2 = \frac{250 + 100 - 40}{30} = 10{,}33$$

$$U_B(q_1, q_2) = (18{,}33 - 5)^2(10{,}33 - 5) = 947{,}08$$

- Alternativa (ii)
  - Elección óptima individuo A

$$q_1 = \frac{280 + 50 - 50}{16} = 14 \qquad q_2 = \frac{280 + 50 - 50}{20} = 14$$

$$U_A(q_1, q_2) = (14 - 5)(14 - 5) = 81$$

  - Elección óptima individuo B

$$q_1 = \frac{560 + 50 - 100}{30} = 17 \qquad q_2 = \frac{280 + 100 - 50}{30} = 11$$

$$U_B(q_1, q_2) = (17 - 5)^2(11 - 5) = 864$$

⇨ Alternativa (iii)

P=0 si q≤5 y p=10 para las demás y un impuesto sobre la renta del 10%

$$Y = 250x0{,}90 = 225 \rightarrow 225 = (q_1 - 5)p_1 + p_2 q_2 \rightarrow 275 = 10q_1 + 10q_2$$

- Elección óptima individuo A

$$q_1 = \frac{275 + 50 - 50}{20} = 13{,}75 \qquad q_2 = \frac{275 + 50 - 50}{20} = 13{,}75$$

$$U_A(q_1, q_2) = (13{,}75 - 5)(13{,}75 - 5) = 76{,}56$$

- Elección óptima individuo B

$$q_1 = \frac{550 + 50 - 100}{30} = 16{,}6 \qquad q_2 = \frac{275 + 100 - 50}{30} = 10{,}83$$

$$U_B(q_1, q_2) = (16{,}6 - 5)^2(10{,}83 - 5) = 793{,}63$$

b. ¿Qué opción preferirá el individuo A? ¿y el B?

El individuo A prefiere la opción 2 y el individuo B la opción 1 porque es donde obtienen mayor utilidad respectivamente.

c. Suponga que se fija $p_1 = 8$. Calcule la demanda del bien 1 de cada agente. Calcule la demanda agregada.

$$q_1^A = \frac{250 + 5p_1 - 50}{2p_1} = \frac{100}{p_1} + \frac{5}{2}$$

$$q_1^B = \frac{250 + 5p_1 - 100}{2p_1} = \frac{400}{3p_1} + \frac{5}{3}$$

$$Q = \sum_{i=1}^{n} f_i(q) = q_1^A + q_1^B = \frac{100}{p_1} + \frac{5}{2} + \frac{400}{3p_1} + \frac{5}{3} = \frac{700}{3p_1} + \frac{25}{6}$$

4. Considere un bien Q en relación con el cual hay dos tipos de personas. Las del tipo A tienen una demanda q = 20 – p, y las del tipo B tienen una demanda q = 10 – 2 p. Hay 100 personas del tipo A y 300 del tipo B.

a. Halle la demanda agregada del mercado y las elasticidades de la demanda agregada para unos precios de 3, 5 y 10 um.

$$Q_A = (20 - P)100 = 2000 - 100P \rightarrow P = \frac{2000 - Q}{100}$$

$$Q_B = (10-2P)300 = 3000-600P \rightarrow P = \frac{3000-Q}{600}$$

$$\begin{Bmatrix} Si\ P \geq 20 \quad \rightarrow no\ demanda\ nadie \rightarrow\ Q = 0 \\ Si\ 20 \geq P \geq 5\ \rightarrow sólo\ demandan\ individuos\ tipo\ A \rightarrow Q = 2000-100P \\ Si\ 5 > P \geq 0 \rightarrow demandan\ tipo\ A\ y\ B\ \rightarrow Q = 5000-700P \end{Bmatrix}$$

$$Si\ P = 3 \quad e_{PQ} = -\frac{P}{Q}(-700) = 700\frac{3}{2900} = 0{,}72$$

$$Si\ P = 5 \quad e_{PQ} = -\frac{P}{Q}(-100) = 100\frac{5}{1500} = 0{,}33$$

$$Si\ P = 10 \quad e_{PQ} = -\frac{P}{Q}(-100) = 100\frac{10}{1000} = 0{,}10$$

b. Halle el EC si el precio es 5.

$$EC = \frac{15+1500}{2} = 11250$$

c. ¿Cuánto variaría dicho excedente si el precio bajara a 2?

$$\Delta EC = 3x1500 + \frac{3x2100}{2} = 7650$$

d. ¿Cuánto variaría dicho excedente si el precio subiera a 7?

$$\nabla EC = 2x1300 + \frac{2x200}{2} = 2800$$

5. Las preferencias de un agente viene representadas por la siguiente función de utilidad:

$$\boldsymbol{U(q_1, q_2)\ = \frac{{q_1}^{1/2}(q_2-30)^{1/4}}{0{,}01}}$$

a. Calcule las funciones de demanda para los bienes 1 y 2. Halle el valor de la utilidad cuando la renta es $\boldsymbol{Y = 4500}$ y los precios de los bienes 1 y 2 son respectivamente $\boldsymbol{p_1 = 50\ y\ p_2 = 20}$.

Para calcular las funciones de demanda de los inputs, planteamos el siguiente problema del consumidor:

$$Max\ U(q_1, q_2)\ = \frac{{q_1}^{1/2}(q_2-30)^{1/4}}{0{,}01}$$
$$s.a\ \ y = p_1q_1 + p_2q_2$$

Aplicando las condiciones de primer orden (c.p.o.):

$$RMS_2^1 = -\frac{\frac{\partial U}{\partial q_2}}{\frac{\partial U}{\partial q_1}} = -\frac{p_2}{p_1} = -\frac{\frac{1}{4}q_1{}^{1/2}(q_2-30)^{-3/4}\frac{1}{0{,}01}}{\frac{1}{2}q_1{}^{-1/2}(q_2-30)^{1/4}\frac{1}{0{,}01}} = -\frac{q_1}{2(q_2-30)} = -\frac{p_2}{p_1}$$

$q_1^* = \frac{2p_2(q_2-30)}{p_1}$; $q_2^* = \frac{p_1q_1+60p_2}{2p_2}$ sustituyendo en $y = p_1q_1 + p_2q_2$. Tenemos las funciones de demanda de los bienes 1 y 2.

$$q_1^* = \frac{2Y-60p_2}{3p_1}; \quad q_2^* = \frac{Y+60p_2}{3p_2}$$

$$q_1^* = \frac{2Y-60p_2}{3p_1} = \frac{2\cdot 4500 - 60\cdot 20}{3\cdot 50} = 52$$

$$q_2^* = \frac{Y+60p_2}{3p_2} = \frac{4500+60\cdot 20}{3\cdot 20} = 95$$

$$U^* = \frac{52^{1/2}(95-30)^{1/4}}{0{,}01} = 2.047{,}5$$

b. Sabiendo que esta economía está formada por 1000 agentes que tienen la misma demanda para el bien 1 que la calculada en al apartado anterior a, calcule la demanda agregada de la economía para el bien 1. Usando la fórmula de la elasticidad y los valores de renta y precios de a), ¿se podría decir que es un bien complementario? ¿Y sustitutivo?

La demanda agregada de los bienes se obtiene multiplicando el número de agentes por la función de demanda individual:

$$Q_1^A = 1000\cdot\frac{2Y-60p_2}{3p_1} = 1000\cdot\frac{2\cdot 4500-60\cdot 20}{3\cdot 50} = 52000$$

Para saber si el bien es sustitutivo o complementario necesitamos analizar la elasticidad precio-cruzada, cuya expresión es:

$$e_2^1 = \frac{p_2}{Q_1^A}\cdot\frac{dQ_1^A}{dp_2}$$

Si $e_2^1 < 0$ decimos que los bienes son complementarios.

Si $e_2^1 > 0$ decimos que los bienes son sustitutivos.

$$e_2^1 = \frac{p_2}{Q_1^A}\cdot\frac{dQ_1^A}{dp_2} = \frac{p_2}{1000\cdot\frac{2Y-60p_2}{3p_1}}\cdot 1000\cdot\frac{(-60)}{3p_1} = \frac{-60\cdot p_2}{2Y-60\cdot p_2} = \frac{(-60)\cdot 20}{2\cdot 4500-60\cdot 20}$$

$$= -\frac{1200}{7800} = -0{,}1538$$

La elasticidad precio-cruzada es negativa por lo tanto si aumenta el precio del bien 2 la demanda del bien 1 cae. Son bienes complementarios.

c. Si precio del bien 1 baja 20 unidades monetarias, ¿Cuánto debe variar la renta para que el sujeto consuma la misma cantidad de bien 1 que en el apartado a? ¿Se mantiene la utilidad constante en este caso?

Si baja el precio del bien 1 de 50 um a 30 um para que el sujeto siga consumiendo la misma cantidad de bien 1 la renta debería ser:

$$q_1^* = \frac{2Y - 60p_2}{3p_1} \rightarrow 52 = \frac{2Y - 60 \cdot 20}{3 \cdot 30} \rightarrow Y = 2.940$$

La utilidad no se mantiene constante ya que la reducción en la renta hace que el sujeto pueda consumir menos unidades del bien 2:

$$q_2^* = \frac{Y + 60p_2}{3p_2} = \frac{2940 + 60 \cdot 20}{3 \cdot 20} = 69$$

La utilidad en este caso es:

$$U^* = \frac{52^{1/2}(69 - 30)^{1/4}}{0{,}01} = 1.802{,}05$$

6. Las preferencias de un agente viene representadas por la siguiente función de utilidad:

$$\boldsymbol{U(q_1, q_2) = (q_1 + 3)(q_2 + 5)^{2/3}}$$

a. Calcule las funciones de demanda de los bienes 1 y 2. Halle las cantidades óptimas que consumirá el individuo cuando la renta es $\boldsymbol{Y = 100}$ y los precios de los bienes 1 y 2 son respectivamente $\boldsymbol{p_1 = 15\ y\ p_2 = 10}$.

El problema del consumidor es el siguiente:

$$Max\ U(q_1, q_2) = (q_1 + 3)(q_2 + 5)^{2/3}$$

$$s.a\ \ y = p_1 q_1 + p_2 q_2$$

Aplicando las condiciones de primer orden (c.p.o.):

$$RMS_2^1 = -\frac{\frac{\partial U}{\partial q_2}}{\frac{\partial U}{\partial q_1}} = -\frac{p_2}{p_1} = -\frac{\frac{2}{3}(q_2 + 5)^{-\frac{1}{3}}(q_1 + 3)}{(q_2 + 5)^{-\frac{2}{3}}} = -\frac{2(q_1 + 3)}{3(q_2 + 5)} = -\frac{p_2}{p_1}$$

$q_1^* = \frac{3(q_2+5)p_2-6p_1}{2p_1}$; $q_2^* = \frac{2(q_1+3)p_1-15p_2}{3p_2}$ sustituyendo en $y = p_1q_1 + p_2q_2$. Tenemos las funciones de demanda de los bienes 1 y 2.

$$q_1^* = \frac{3Y + 15p_2 - 6p_1}{5p_1}; \quad q_2^* = \frac{2Y + 6p_1 - 15p_2}{5p_2}$$

$$q_1^* = \frac{3 \cdot 100 + 15 \cdot 10 - 6 \cdot 15}{5 \cdot 15} = 4.8 \qquad q_2^* = \frac{2 \cdot 100 + 6 \cdot 15 - 15 \cdot 10}{5 \cdot 10} = 2.8$$

b. Debido a la situación de crisis actual el Gobierno se plantea una política que estimule el consumo. Para lo cual decide incluir una paga extra de primavera que aumenta la renta del individuo en 50 um. ¿Qué efectos tiene esta medida en el consumo de los bienes?

Esta política aumentará la renta de la que disponen los agentes, pasando de Y=100 a Y=150. El consumo de ambos bienes va a ser ahora:

$$q_1^* = \frac{3 \cdot 150 + 15 \cdot 10 - 6 \cdot 15}{5 \cdot 15} = 6.8 \qquad q_2^* = \frac{2 \cdot 150 + 6 \cdot 15 - 15 \cdot 10}{5 \cdot 10} = 4.8$$

$$U = (1530 + 3)(480 + 5)^{2/3} = 44.88$$

El consumo de ambos bienes aumenta.

c. Una agencia externa al país propone que en vez de un incremento en la renta de los consumidores la mejor medida para potenciar el consumo es una reducción en el IVA (impuestos al consumo) de ambos bienes en 2 um. ¿Está en lo cierto la agencia externa? ¿Qué medida prefieren los consumidores?

Esta política disminuye el precio de ambos bienes, de modo que los precios son tras la intervención: $p_1 = 13 \; y \; p_2 = 8$. El consumo de ambos bienes va a ser ahora:

$$q_1^* = \frac{3 \cdot 100 + 15 \cdot 8 - 6 \cdot 13}{5 \cdot 13} = 5.26 \qquad q_2^* = \frac{2 \cdot 100 + 6 \cdot 13 - 15 \cdot 8}{5 \cdot 8} = 3.95$$

$$U = (889{,}2 + 3)(480 + 5)^{2/3} = 35.61$$

Comparando con el apartado anterior, el consumo de ambos bienes disminuye con la política que propone la agencia externa, por lo tanto no sería buena medida para reactivar el consumo. Por otro lado, los consumidores prefieren también la paga extra que plantea el Gobierno.

d. Calcule la elasticidad de la renta para la demanda del bien 1 (bajo los supuestos del apartado a). ¿Qué tipo de bien es el bien 1 según el valor de esta elasticidad?

$$\eta_y = \frac{Y}{Q} \cdot \frac{dQ}{dY} = \frac{Y}{\frac{3Y + 15p_2 - 6p_1}{5p_1}} \cdot \frac{3}{5p_1} = \frac{3}{3Y + 15p_2 - 6p_1} = \frac{3 \cdot 100}{3 \cdot 100 + 15 \cdot 10 - 6 \cdot 15} = 0{,}8333$$

Se trata de un bien normal ya que la elasticidad es mayor que 0, y de primera necesidad ya que la elasticidad es menor que 1.

7. Las preferencias de un agente viene representadas por la siguiente función de utilidad:

$$\boldsymbol{U(q_1, q_2) = q_1 q_2 + 4q_1 + 2q_2 + 8}$$

a. Halle las expresiones y el valor de las utilidades marginales para los bienes 1 y 2 cuando q_1=2 y $q_2 = 4$.

La utilidad marginal del bien 1 es la derivada de la utilidad con respecto a q_1:

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = U_1' = q_2 + 4$$

La utilidad marginal del bien 2 es la derivada de la utilidad con respecto al bien q_2:

$$\frac{\partial U}{\partial q_2} = U_2' = q_1 + 2$$

Cuando q_1=2 y $q_2 = 4$ los valores de las utilidades marginales son:

$$U_1' = 4 + 4 = 8; \qquad U_2' = 2 + 2 = 4$$

b. Para una renta de $Y = 50$ y precios de los bienes $p_1 = 1\ y\ p_2 = 2$, respectivamente, calcule el valor de la utilidad máxima que puede conseguir el consumidor.

Para hallar el valor de la utilidad máxima que puede conseguir el consumidor se necesita resolver el siguiente problema:

$$Max\ U(q_1, q_2)\ = q_1 q_2 + 4q_1 + 2q_2 + 8$$

$$s.a\ \ y = p_1 q_1 + p_2 q_2$$

Aplicando las condiciones de primer orden (c.p.o.):

$$RMS_2^1 = -\frac{\frac{\partial U}{\partial q_2}}{\frac{\partial U}{\partial q_1}} = -\frac{q_1 + 2}{q_2 + 4} = -\frac{p_2}{p_1}$$

Las funciones de demanda de los bienes 1 y 2 son:

$$q_1^* = \frac{Y - 2p_1 + 4p_2}{2p_1}; \quad q_2^* = \frac{Y + 2p_1 - 4p_2}{2p_2}$$

Para $Y = 50; p_1 = 1\ y\ p_2 = 2$ las demandas de los bienes son:

$$q_1^* = \frac{50 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2}{2 \cdot 1} = 28 \quad q_2^* = \frac{50 + 2 \cdot 1 - 4 \cdot 2}{2 \cdot 2} = 11$$

El valor de la utilidad es:

$$U(q_1, q_2) = q_1 q_2 + 4q_1 + 2q_2 + 8 = 28 \cdot 11 + 4 \cdot 28 + 2 \cdot 11 + 8 = 450$$

c. Calcule las funciones de demanda para los bienes 1 y 2. Realice la estática comparativa correspondiente a dichas funciones de demanda para los precios y la renta. Determine qué tipo de bienes son 1 y 2 según este análisis.

Las funciones de demanda se han calculado en el apartado anterior. De estas se deduce que

$\frac{\partial q_1}{\partial Y} = \frac{1}{2p_1} > 0$ Bien normal

$\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = \frac{-(Y+4p_2)}{2{p_1}^2} < 0$ Bien ordinario

$\frac{\partial q_1}{\partial p_2} = \frac{2}{p_1} > 0$ Bienes sustitutivos

$\frac{\partial q_2}{\partial Y} = \frac{1}{2p_2} > 0$ Bien normal

$\frac{\partial q_2}{\partial p_1} = \frac{1}{p_2} > 0$ Bienes sustitutivos

$\frac{\partial q_2}{\partial p_2} = \frac{-(Y+2p_1)}{2p_2^2} < 0$ Bien ordinario

d. Para una renta de $Y = 50$ y p_1=1, ¿cuánto varía el excedente del consumidor para el bien 2 si el precio p_2 se ve reducido de 2 um a 1 um?

$$D(p) = q_2^* = \frac{Y + 2p_1 - 4p_2}{2p_2} = \frac{52 - 4p_2}{2p_2} \rightarrow D^{-1}(q) = \frac{26}{(q_2 + 2)}$$

Para el precio $p_2 = 2$ la cantidad demandada del bien 2 es $q_2 = 11$.

Para el precio $p_2 = 1$ la cantidad demandada del bien 2 es $q_2 = 24$.

$$EC_1 = \int_0^{11} (\frac{26}{(q_2+2)})dq_2 - 2\cdot 11 = 26[\ln(13) - \ln(2)] - 22 = 26{,}75$$

$$EC_2 = \int_0^{24} (\frac{26}{(q_2+2)})dq_2 - 1\cdot 24 = 26[\ln(26) - \ln(2)] - 24 = 42{,}77$$

El cambio en el excedente del consumidor es (el excedente del consumidor aumenta):

$$\Delta EC = EC_2 - EC_1 = 16{,}03$$

e. Para una renta de $Y = 50$, p_1=10 y p_2=20, calcule la cantidad óptima que consumirá este agente en equilibrio y la utilidad que le reporta.

$$q_1^* = \frac{Y - 2p_1 + 4p_2}{2p_1} = \frac{50 - 20 + 80}{20} = 5{,}5; \quad q_2^* = \frac{Y + 2p_1 - 4p_2}{2p_2} = \frac{50 + 20 - 80}{40} < 0$$

Llegamos a una solución esquina en la que lo óptimo es que el individuo sólo consuma del bien 1, de modo que,

$$q_1^* = \frac{Y}{p_1} = \frac{50}{10} = 5$$

El valor de la utilidad es:

$$U(q_1, q_2) = q_1q_2 + 4q_1 + 2q_2 + 8 = 5x0 + 4x5 + 2x0 + 8 = 28$$

8. Las preferencias de un agente viene representadas por la siguiente función de utilidad: $U(q_1;q_2) = \frac{q_1}{q_2} + 3q_2$

a. Interprete esta función de utilidad. ¿Son los bienes q_1 y q_2 sustitutos perfectos?

Dos bienes son sustitutivos perfectos si el individuo está dispuesto a sustituir uno por otro en una proporción fija. Se puede demostrar que la $RMS_2^1 = \frac{q_1}{q_2} - 3q_2$, por tanto esta función de utilidad no representa bienes sustitutos perfectos.

b. Calcule las funciones de demanda para los bienes 1 y 2.Calcule la elasticidad de la demanda del bien 2. Comente el resultado.

Las funciones de demanda vienen dadas por aquellos puntos donde $RMS_2^1 = -\frac{p_2}{p_1}$. Entonces se cumple que $\frac{q_1}{q_2} - 3q_2 = -\frac{p_2}{p_1}$ lo que implica que $q_1 = 3q_2^2 - \frac{p_2}{p_1}q_2$. Sustituyendo en la restricción presupuestaria se tiene que las funciones de demanda son $q_1^* = \frac{Y}{p_1} - \frac{p_2}{p_1^{3/2}}\sqrt{\frac{Y}{3}}$ y $q_2^* = \sqrt{\frac{Y}{3p_1}}$.

La elasticidad del 2 se calcula $\eta_{22} = -\frac{\partial q_2}{\partial p_2}\frac{p_2}{q_2} = 0$, por tanto la cantidad demandada del bien 2 no se ve afectada por cambios en su precio.

c. **Calcule la elasticidad cruzada de la demanda del bien 2 respecto al precio del bien 1. ¿Cómo son los bienes 1 y 2?**

$\eta_{21} = \frac{\partial q_2}{\partial p_1}\frac{p_1}{q_2} = -\frac{1}{2}$, los bienes son complementarios

d. **Para una renta $Y = 100$ y $p_1 = 1$, ¿cuánto varía el excedente del consumidor para el bien 2 si el precio p_2 aumenta de 2 um a 3 um?**

La variación del excedente del consumidor para el bien 2 cuando el precio cambia de 2 a 3 sería

$$\int_2^3 \sqrt{\frac{Y}{3p_1}}\,dp_2$$

para $Y = 100$ y $p_1 = 1$ tendríamos

$$\int_2^3 10\sqrt{\frac{1}{3}}\,dp_2 = 10\sqrt{\frac{1}{3}}$$

9. **Las preferencias de los consumidores están representadas por la siguiente función de utilidad $U(q_1, q_2) = (q_1 - 1) + (q_2 - 1)$.**

a. **Interprete esta función de utilidad. Describa como son los bienes q_1 y q_2 . Calcule la relación marginal de sustitución del bien 1 por el bien 2 (RMS_2^1) y del bien 2 por el bien 1 (RMS_1^2).**

Esta función de utilidad representa dos bienes que son sustitutivos perfectos. La relación marginal de sustitución entre ambos bienes es constante e igual a 1.

b. **Obtener las funciones de demanda del bien 1 y del bien 2 para $U(q_1, q_2)$ y calcule la cesta de consumo óptima para un nivel de renta $Y = 10$ y unos precios $p_1 = 2$ y $p_2 = 4$. Razone como y porque (o porque no) cambia esta cesta optima si cambian los precios de los bienes.**

Las funciones de demanda dependen de la relación entre los precios de los bienes. Así, si $p_1 > p_2$, se tiene que $\frac{U_1}{p_1} < \frac{U_2}{p_2}$ y las funciones de demanda son $q_1^* = 0$ y $q_2^* = \frac{Y}{p_2}$. Por el contrario, si $p_1 < p_2$, se tiene que $\frac{U_1}{p_1} > \frac{U_2}{p_2}$ y las funciones de demanda son $q_1^* = \frac{Y}{p_1}$ y $q_2^* = 0$. Si $p_1 = p_2$, se tiene que la cesta optima del consumidor está dada por cualquier punto de la restricción presupuestaria.

Para $Y = 10$, tenemos $q_1^* = 5$ y $q_2^* = 0$.

c. Calcule la estática comparativa de la función de demanda de cada uno de los bienes con respecto a los precios de los dos bienes y a la renta. Calcule las elasticidades correspondientes.

La estática comparativa está dada por la derivada de cada demanda con respecto a su propio precio y al precio del otro bien. Así, si $p_1 < p_2$, no es difícil ver que

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = -\frac{Y}{p_1^2}\ ;\ \frac{\partial q_1}{\partial p_2} = 0\ ;\ \frac{\partial q_2}{\partial p_1} = \frac{\partial q_2}{\partial p_2} = 0.$$

De la misma forma, si $p_1 > p_2$ se tiene que

$$\frac{\partial q_2}{\partial p_2} = -\frac{Y}{p_2^2} \quad y \quad \frac{\partial q_2}{\partial p_1} = 0\ ;\ \frac{\partial q_1}{\partial p_1} = \frac{\partial q_1}{\partial p_2} = 0.$$

Las elasticidades se calculan como

$$\eta_{11} = -\frac{\partial q_1}{\partial p_1}\frac{p_1}{q_1} = 1; \eta_{12} = \eta_{21} = 0; \eta_{22} = -\frac{\partial q_2}{\partial p_2}\frac{p_2}{q_2} = 1.$$

d. Para el nivel de renta $Y = 10$ y precios $p_1 = 1$ y $p_2 = 1.25$, el gobierno decide imponer un impuesto por unidad consumida del bien 1 de 0.5 unidades monetarias. Determine el efecto de esta medida sobre las cantidades consumidas de los bienes 1 y 2 y calcule el dinero obtenido por el gobierno.

Si se pone un impuesto por unidad consumida al bien 1, se tiene que $\widetilde{p}_1 = 1.5$. Esto hace que $p_1 > p_2$ y por lo tanto el consumo del bien 1 se hace cero ya que los consumidores sustituyen el bien 1 por el bien 2. Esto hace que el impuesto no sea capaz de recaudar nada.

10. Sea la siguiente función de utilidad $U(q_1, q_2) = (q_1 + 2)(q_2 + 3)$.

a. Calcular las funciones de demanda de los bienes q_1 y q_2 Hallar para esas funciones de demanda el valor de la utilidad cuando p_1 = 1 p_2 = 2 e Y = 50.

$$Max\ U(q_1, q_2) = (q_1 + 2)(q_2 + 3)$$

$$s.a.\ y = p_1 q_1 + p_2 q_2$$

Aplicando las condiciones de primer orden (c.p.o.) tenemos:

$$RMS_2^1 = -\frac{\frac{\partial U}{\partial q_2}}{\frac{\partial U}{\partial q_1}} = -\frac{p_2}{p_1} = -\frac{(q_1+2)}{(q_2+3)} = -\frac{p_2}{p_1}$$

$q_1 = \frac{p_2(q_2+3)-2p_1}{p_1}$; $q_2 = \frac{p_1(q_1+2)-3p_2}{p_2}$ sustituyendo en $y = p_1q_1 + p_2q_2$. Obtenemos las funciones de demanda de los bienes 1 y 2:

$$q_1^* = \frac{Y - 2p_1 + 3p_2}{2p_1}; \quad q_2^* = \frac{Y - 3p_2 + 2p_1}{2p_2}$$

Sustituyendo los valores de precios y renta obtenemos las cantidades demandadas y el valor de la utilidad:

$$q_1^* = \frac{Y - 2p_1 + 3p_2}{2p_1} = \frac{50 - 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2}{2 \cdot 1} = 27 \quad q_2^* = \frac{Y - 3p_2 + 2p_1}{2p_2} = \frac{50 - 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1}{2 \cdot 2} = 11{,}5$$

$$U^* = (27+2)(11{,}5+3) = 420{,}5$$

b. ¿Qué ocurre a la cantidad demandada de los dos bienes si la renta aumenta a $Y = 60$ y simultáneamente el precio del bien 1 aumenta a $p_1 = 3$? Representar gráficamente y discutir los efectos de estos incrementos en las funciones de demanda de ambos bienes.

El aumento en la renta genera un desplazamiento hacia la derecha en las demandas de ambos bienes. El consumidor tiene más renta y por tanto consumirá más bien 1 y más bien 2. En el caso del aumento del precio del bien 1 se producirán movimientos a lo largo de la curva de demanda del bien 1, pero no hay desplazamiento. En el caso de la demanda del bien 2, un aumento del precio del bien 1 genera un desplazamiento hacia la derecha de esta curva. Se trata de bienes sustitutivos por lo tanto al aumentar el precio del bien 1, los agentes empezarán a consumir bien 2.

$$\frac{\partial q_2^*}{\partial p_1} = \frac{1}{p_2} > 0$$

Los valores óptimos con estos efectos serían:

$$q_1^* = \frac{Y - 2p_1 + 3p_2}{2p_1} = \frac{60 - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2}{2 \cdot 3} = 10$$

$$q_2^* = \frac{Y - 3p_2 + 2p_1}{2p_2} = \frac{60 - 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3}{2 \cdot 2} = 15$$

c. Calcular el cambio en el excedente del consumidor para el bien 1 cuando $p_1 = 2$.

La función de demanda del bien 1 es la siguiente:

$$D(p) = q_1^* = \frac{Y - 2p_1 + 3p_2}{2p_1} = \frac{56 - 2p_1}{2p_1} \to D^{-1}(q) = \frac{28}{(q_1 + 1)}$$

Para el precio $p_1 = 1$ la cantidad demandada del bien 1 es $q_1 = 27$.

Para el precio $p_1 = 2$ la cantidad demandada del bien 1 es $q_1 = 13$.

$$EC_1 = \int_0^{27} (\frac{28}{(1 + q_1)}) dq_1 - 1 \cdot 27 = 28[\ln(28) - \ln(1)] - 27 = 66{,}30$$

$$EC_2 = \int_0^{13} (\frac{28}{(1 + q_1)}) dq_1 - 2 \cdot 13 = 28[\ln(14) - \ln(1)] - 26 = 47{,}89$$

El cambio en el excedente del consumidor es:

$$\nabla EC = EC_2 - EC_1 = -18{,}41$$

d. Sea un individuo que tiene la posibilidad de consumir dos bienes ¿A qué tipo de preferencias se refiere el siguiente párrafo? "*Ante la pérdida de una unidad del bien 1 el nivel de utilidad del individuo se puede mantener constante si recibe a cambio dos unidades adicionales del bien 2 independientemente de las cantidades consumidas de cada bien.”* Representar dichas preferencias matemáticamente.

En este caso estamos hablando de bienes sustitutivos perfectos. Esto lo sabemos porque la RMS va a ser siempre constante. La función de utilidad es una función lineal. Matemáticamente tendríamos:

$$U(q_1, q_2) = 2q_1 + q_2$$

$$RMS_1^2 = -\frac{\frac{\partial U}{\partial q_1}}{\frac{\partial U}{\partial q_2}} = -\frac{2}{1} = -2$$

11. **Las preferencias de los consumidores están representadas por la siguiente función de utilidad $U(q_1, q_2) = (q_1 + 2) \cdot q_2$.**
    a. **Obtener las funciones de demanda del bien 1 y del bien 2 ¿Cuántas unidades del bien 1 necesita el consumidor si renuncia a una unidad del bien 2 manteniendo la utilidad constante?**

Para calcular las funciones de demanda de los inputs, planteamos el siguiente problema del consumidor:

$$Max\ U(q_1, q_2) = (q_1 + 2) \cdot q_2$$

$$s.a.\ y = p_1 q_1 + p_2 q_2$$

Aplicando las condiciones de primer orden (c.p.o.) tenemos:

$$RMS_2^1 = -\frac{\frac{\partial U}{\partial q_2}}{\frac{\partial U}{\partial q_1}} = -\frac{p_2}{p_1} = -\frac{(q_1 + 2)}{q_2} = -\frac{p_2}{p_1}$$

$$q_2 = \frac{(q_1 + 2)p_1}{p_2} \quad ; \; q_1 = \frac{p_2 q_2 - 2p_1}{p_1}$$

sustituyendo en $y = p_1 q_1 + p_2 q_2$ obtenemos las funciones de demanda de los bienes 1 y 2:

$$q_1^* = \frac{y - 2p_1}{2p_1}; \quad q_2^* = \frac{y + 2p_1}{2p_2}$$

La relación marginal de sustitución (RMS_2^1) nos da información sobre las unidades del bien 1 que le tienen que dar al consumidor si renuncia a una unidad del bien 2:

$$RMS_2^1 = -\frac{\frac{\partial U}{\partial q_2}}{\frac{\partial U}{\partial q_1}} = -\frac{(q_1 + 2)}{q_2}$$

    b. **Este consumidor tiene una renta $Y = 140$ y los precios de los bienes son $p_1 = 2$ y $p_2 = 4$. El gobierno decide imponer un impuesto por unidad consumida del bien 1 de 4 unidades monetarias ¿Cuál es el efecto de esta medida sobre las cantidades consumidas de los bienes 1 y 2?**

El impuesto supone una subida del precio en el precio del bien 1 de 4 um, es decir, el nuevo precio es ahora $p_1' = 6$.

Cuando el Gobierno no impone la medida las cantidades de equilibrio son:

$$q_1^* = \frac{y - 2p_1}{p_1} = \frac{140 - 2 \cdot 2}{2 \cdot 2} = 34; \qquad q_2^* = \frac{y + 2p_1}{2p_2} = \frac{140 + 2 \cdot 2}{2 \cdot 4} = 18$$

Cuando el Gobierno impone la medida las demandas de los bienes son:

$$q_1^* = \frac{y - 2p_1'}{p_1'} = \frac{140 - 2 \cdot 6}{2 \cdot 6} = 10{,}67; \qquad q_2^* = \frac{y + 2p_1'}{2p_2} = \frac{140 + 2 \cdot 6}{2 \cdot 4} = 19$$

Esto supone que un impuesto de 4um sobre el bien 1 reduce las cantidades demandadas de este bien, pero se aumenta la cantidad demanda del bien 2 (bienes sustitutivos).

c. Con el objetivo de recaudar lo mismo que en el apartado anterior el gobierno decide en este caso implantar un impuesto sobre la renta. Calcular la cantidad de impuesto necesaria para que la recaudación del gobierno sea la misma que en el apartado b). Calcular las cantidades consumidas en este caso y la utilidad obtenida. Con esta información discutir qué tipo de impuesto es mejor desde el punto de vista del individuo.

Si el Gobierno quiere recaudar lo mismo, debemos de calcular cuánto recauda con el impuesto sobre el input 1:

$(q_1^* = 10{,}67;\ impuesto = 4)$ – Resultados del apartado anterior b)

Recaudación $= 10{,}67 \cdot 4 = 42{,}68$

Como el Gobierno plantea un impuesto sobre la renta, esto quiere decir que la renta del agente disminuirá en el valor de la recaudación:

$$Y' = 140 - 42{,}68 = 97{,}32$$

$$q_1^* = \frac{y' - 2p_1}{p_1} = \frac{97{,}32 - 2 \cdot 2}{2 \cdot 2} = 23{,}33 \qquad q_2^* = \frac{y' + 2p_1}{2p_2} = \frac{97{,}32 + 2 \cdot 2}{2 \cdot 4} = 12{,}66$$

Para saber lo que el consumidor va a preferir tenemos que calcular en cuál de las dos situaciones la utilidad es mayor:

Con el impuesto sobre el precio del bien 1 la utilidad del consumidor es:

$$U^1 = (10{,}67 + 2)19 = 240{,}667$$

Con el impuesto sobre la renta la utilidad del consumidor es:

$$U^2 = (23{,}33 + 2)12{,}66 = 320{,}71$$

El consumidor prefiere un impuesto sobre la renta que un impuesto sobre el consumo del bien 1.

d. Utilizando la función de demanda del bien 2 obtenida en el apartado "a", calcular bajo qué condiciones se trata de un bien ordinario y bajo qué condiciones se trata de un bien Giffen.

Para saber si se trata de un bien ordinario o un bien Giffen calculamos la derivada parcial de la función de demanda del bien 2 con respecto al precio del bien 2. Si esta derivada es positiva el bien es Giffen, si es negativa es un bien ordinario.

La función de demanda del bien 2 (apartado a)) es:

$$q_2^* = \frac{y + 2p_1}{2p_2}$$

Se trata de un bien ordinario si:

$$\frac{\partial q_2}{\partial p_2} < 0$$

Por lo tanto, derivando tenemos que:

$$\frac{\partial q_2}{\partial p_2} = -\frac{(y + 2p_1)}{2p_2^2} < 0 \quad \rightarrow \quad -(y + 2p_1) < 0$$

Si $(y + 2p_1) > 0$ entonces se trata de un bien ordinario. Este supuesto se cumplirá siempre ya que el precio y la renta son siempre positivos. Por lo tanto el bien 2 no va a ser nunca un bien Giffen. Se trata de un bien ordinario.

Si fuera un bien Giffen, tendríamos que:

$$\frac{\partial q_2}{\partial p_2} = -\frac{(y + 2p_1)}{2p_2^2} > 0 \quad \rightarrow \quad -(y + 2p_1) > 0 \quad \rightarrow \quad (y + 2p_1) < 0$$

Por lo tanto diríamos que $y < -2p_1$. Una renta negativa no tiene sentido.

12. Sea la siguiente función de utilidad $U(q_1, q_2) = q_1 q_2^{1/2}$ con $p_1 = p_2$ los precios de los bienes correspondientes. La renta disponible es *Y*.

a. Calcular las funciones de demanda de los bienes q_1 y q_2. Hallar para esas funciones de demanda el valor de la utilidad en función de los precios y de *Y*.

Las funciones de demanda vienen dadas por aquellos puntos donde

$$RMS_2^1 = -\frac{p_2}{p_1}.$$

Se cumple que $\frac{q_1}{2q_2} = \frac{p_2}{p_1}$ lo que implica que $q_2 = 0.5q_1$ con $p_1 = p_2$.

Sustituyendo en la restricción presupuestaria se tiene que las funciones de demanda son

$$q_1^* = \frac{2Y}{3p_1} \text{ y } q_2^* = \frac{Y}{3p_1}.$$

La utilidad en este caso viene dada por

$$U(q_1^*, q_2^*) = \frac{2Y}{3p_1}\sqrt{\frac{Y}{3p_1}}$$

b. Si un consumidor recibe un bono regalo del bien 1 por valor de 6 euros, ¿cambiará la elección del consumidor? ¿Cómo?

En este caso la demanda de los bienes q_1 y q_2 puede aumentar hasta $\frac{Y+6}{p_1}$ para el bien 1 y $\frac{Y}{p_1}$ para el bien 2, que es lo que determina la nueva restricción presupuestaria. Así, la nueva demanda de los bienes vendrá determinada por sus funciones de demanda bajo esta nueva renta siempre que se cumplan las restricciones presupuestarias anteriores. Se tiene que

$$q_1^* = \frac{2(Y+6)}{3p_1} \text{ y } q_2^* = \frac{(Y+6)}{3p_1}$$

si

$$\frac{2(Y+6)}{3p_1} \leq \frac{Y+6}{p_1} \quad y \quad \frac{(Y+6)}{3p_1} \leq \frac{Y}{p_1}.$$

Estas dos restricciones se cumplen sin problemas así que los nuevos óptimos son

$$q_1^* = \frac{2(Y+6)}{3p_1} \text{ y } q_2^* = \frac{(Y+6)}{3p_1}$$

c. Suponga que *Y* = 10. Hallar la cantidad de dinero en efectivo que le tendrían que dar al consumidor para que mantuviera la misma utilidad que con el bono regalo. ¿Cuál debería ser su elección en este caso?

La utilidad con el bono regalo es

$$\bar{U}(q_1^*, q_2^*) = \frac{32}{3p_1}\sqrt{\frac{16}{3p_1}}$$

Así,

$$\bar{U}(q_1^*, q_2^*) = \frac{2\widetilde{Y}}{3p_1}\sqrt{\frac{\widetilde{Y}}{3p_1}}$$

con $\widetilde{Y}$ la nueva renta. Por lo tanto,

$$\widetilde{Y} = \bar{U}^{2/3}(3p_1)\left(\frac{1}{2}\right)^{2/3}.$$

La elección optima vendrá dada por

$$q_1^* = \frac{2\widetilde{Y}}{3p_1} \text{ y } q_2^* = \frac{\widetilde{Y}}{3p_1} .$$

d. Suponga que *Y* = 10. Repetir el apartado b) suponiendo que el bono regalo es para el bien 2. Discutir el efecto del bono regalo en la demanda de los dos bienes.

En este caso se tiene que la demanda de los bienes q_1 y q_2 puede aumentar hasta $\frac{Y}{p_1}$ para el bien 1 y $\frac{Y+6}{p_1}$ para el bien 2, que es lo que determina la nueva restricción presupuestaria. Así, la nueva demanda de los bienes vendrá determinada por sus funciones de demanda bajo esta nueva renta siempre que se cumplan las restricciones presupuestarias anteriores. Se tiene que

$$q_1^* = \frac{2(Y+6)}{3p_1} \text{ y } q_2^* = \frac{Y+6}{3p_1}$$

si

$$\frac{2(Y+6)}{3p_1} \leq \frac{Y}{p_1} \quad y \quad \frac{(Y+6)}{3p_1} \leq \frac{Y+6}{p_1}.$$

En este caso la primera restricción no se cumple para $Y = 10$ ya que $32 > 30$.

Por lo tanto se tiene que el óptimo $q_1^* = \frac{32}{3p_1}$ no se puede alcanzar. En este caso el óptimo esta sobre la esquina determinada por el corte entre la restricción presupuestaria $p_1q_1 + p_1q_2 \leq 16$ y $q_1 \leq \frac{10}{p_1}$. Este punto es $q_1^* = \frac{10}{p_1}$ y $q_2^* = \frac{6}{p_1}$.

En este punto el consumidor ya no obtiene la proporción deseada entre los bienes.

13. Las preferencias de los consumidores están representadas por la siguiente función de utilidad: $U(q_1,q_2) = \min(q_1,q_2)+5$

a. Interprete esta función de utilidad. Describa como son los bienes 1 y 2. Calcule la relación marginal de sustitución del bien 1 por el bien 2. ¿Representa esta función las mismas preferencias que $U(q_1,q_2) = \min(5q_1,5q_2)$ **?**

Lo importante en esta función de utilidad es el mínimo de consumo de cualquiera de los dos bienes pero sumándole 5 unidades, por tanto, se trata una función de utilidad que representa las preferencias de un individuo frente a dos bienes complementarios.

Ambas funciones de utilidad mantienen la misma ordenación de preferencias. La transformación de una a otra es monótona y creciente.

b. Obtener las funciones de demanda del bien 1 y del bien 2 para $U(q_1,q_2) = \min(q_1,q_2)+5$ **y calcule la cesta de consumo óptima para un nivel de renta Y=100 y unos precios p1=2 y p2=4. Razone como y**

porque (o porque no) cambia esta cesta optima si cambian los precios de los bienes.

Para calcular el nivel óptimo, al tratarse de bienes complementarios, por la función de utilidad se tiene que cumplir que $q_1 = q_2$, junto con la restricción presupuestaria $Y = p_1q_1 + p_2q_2$.

$$Y = p_1q_1 + p_2q_1 \rightarrow q_1^* = \frac{Y}{p_1 + p_2} \; Función\ demanda\ bien\ 1$$
$$Y = p_1q_2 + p_2q_2 \rightarrow q_2^* = \frac{Y}{p_2 + p_1} \; Función\ demanda\ bien\ 2$$

Elección óptima del consumidor

$$q_1^* = \frac{Y}{p_1 + p_2} = \frac{100}{6} \qquad q_2^* = \frac{Y}{p_2 + p_1} = \frac{100}{6}$$

Cambios en las demandas por cambios en los bienes:

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = -\left(\frac{Y}{p_1 + p_2}\right)^2 < 0 \qquad \frac{\partial q_1}{\partial p_2} = -\left(\frac{Y}{p_1 + p_2}\right)^2 < 0$$

Tanto si aumenta el precio del bien 1, como el del bien 2, la demanda del bien 1 disminuye. Al tratarse de bienes complementarios, con la demanda del bien 2 ocurre lo mismo.

c. Para el mismo nivel de renta del apartado anterior, Y=100, y precios p1=2 y p2=4, el gobierno decide imponer un impuesto por unidad consumida del bien 1 de 0.5 unidades monetarias. Calcule la función de demanda del bien 1 en este caso y determine el efecto de esta medida sobre las cantidades consumidas de los bienes 1 y 2.

El impuesto sobre el bien 1 supone un aumento del precio del mismo, de modo que, las cantidades demandas de equilibrio pasarán a ser:

$$q_1^* = \frac{Y}{p_1 + 0{,}5 + p_2} = 15{,}38 \quad q_2^* = \frac{Y}{p_2 + 0{,}5 + p_1} = 15{,}38$$

d. Con el objetivo de recaudar lo mismo que en el apartado anterior, el gobierno decide en este caso implantar un impuesto sobre la renta. Calcular las cantidades consumidas en este caso y la utilidad obtenida. Con esta información, discutir qué tipo de impuesto es mejor desde el punto de vista del individuo.

En el apartado anterior, en equilibrio, se consumen 15,38 unidades del bien 1, de modo que el gobierno está recaudando 15,38x0,5=7,69 euros. Si quiere recaudar lo mismo pero estableciéndolo como un impuesto sobre la renta, entonces el nuevo equilibrio será:

$$q_1^* = \frac{Y - 7{,}69}{p_1 + p_2} = 15{,}38 \quad q_2^* = \frac{Y - 7{,}69}{p_2 + p_1} = 15{,}38$$

El consumidor estará indiferente entre un impuesto sobre el consumo y un impuesto sobre la renta ya que, en ambos casos, realiza el mismo consumo de ambos bienes, luego obtiene la misma utilidad.

14. Sea la siguiente función de utilidad $U(q_1, q_2) = 4q_1q_2$ **.**

a. Calcular las funciones de demanda de los bienes q_1 **y** q_2 **. Hallar para esas funciones de demanda el valor de la utilidad cuando los precios son** $\boldsymbol{p_1 = 3}$ **€** $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{p_2 = 5}$ **€. y la renta es de 100€.**

$$Max\ U(q_1, q_2) = 4q_1q_2$$
$$s.a.\ Y = p_1q_1 + p_2q_2$$

c.p.o

$$RMS_2^1 = \frac{U'_2}{U'_1} = \frac{p_2}{p_1}$$
$$Y = p_1q_1 + p_2q_2$$

En la primera condición, podemos obtener:

$$RMS_2^1 = \frac{U'_2}{U'_1} = \frac{4q_1}{4q_2} = \frac{p_2}{p_1} \rightarrow p_1q_1 = p_2q_2$$

Sustituyendo en la segunda obtenemos:

$$Y = 2p_1q_1 \rightarrow q_1^* = \frac{Y}{2p_1}\ Función\ demanda\ bien\ 1$$
$$Y = 2p_2q_2 \ \rightarrow q_2^* = \frac{Y}{2p_2}\ Función\ demanda\ bien\ 2$$

Elección óptima del consumidor

$$q_1^* = \frac{Y}{2p_1} = \frac{100}{6} = 16{,}6 \qquad q_2^* = \frac{Y}{2p_2} = \frac{100}{10} = 10\ \ U(q_1, q_2) = 4x16{,}6x10 = 666{,}6$$

b. Si un consumidor recibe un bono regalo del bien 1 por valor de 20 euros, ¿cambiará la elección del consumidor? ¿Cómo?

Recibir un bono regalo supone un incremento de la renta del individuo que genera un desplazamiento de la recta de balance a la derecha y, por tanto, afecta a la demanda de ambos bienes.

Y=Y+20=120

$$q_1^* = \frac{Y}{2p_1} = \frac{120}{6} = 20 \quad q_2^* = \frac{Y}{2p_2} = \frac{120}{10} = 12\ \ U(q_1, q_2) = 4x20x12 = 960$$

c. **Hallar la cantidad de dinero en efectivo que le tendrían que dar al consumidor para que mantuviera la misma utilidad que con el bono regalo. ¿Cuál debería ser su elección en este caso?**

$$U(q_1, q_2) = 4q_1q_2 = 4x\frac{Y}{2p_1}x\frac{Y}{2p_2} = 960$$

Para que esa igualdad se cumpla, si los precios de los bienes no cambian, la renta tiene que ser de 120, es decir, dar un bono es equivalente a dar el dinero en efecto, se hubiese llegado al mismo resultado.

d. **Repetir el apartado b) suponiendo que el bono regalo es para el bien 2. Discutir el efecto del bono regalo en la demanda de los dos bienes.**

Como el bono tiene el mismo efecto que un aumento de la renta, el efecto va a ser el mismo que cuando se regalaba para adquirir el bien 1.

15. **Considere dos productos cuyos precios son $p_1 = 20\text{ €} \, y \, p_2 = 10\text{ €}$. Las preferencias de un agente A, cuya renta es $Y = 1.000\text{ €}$, están representadas por la siguiente función de utilidad:**

$$U(q_1, q_2) = (q_1 + 2)^2 \times (q_2 + 1)$$

a. **Calcule la utilidad marginal del bien 1 y la relación marginal de sustitución del bien 1 por el bien 2 (RMS_2^1) para la combinación de consumo (8,9) (8 unidades de q_1 y 9 unidades de q_2). Explique el significado de cada una de ellas.**

La utilidad marginal del bien 1 y la relación marginal de sustitución del bien 1 por el bien 2 están dadas por

$$U_1^{'} = \frac{\partial U}{\partial q_1} = 2(q_1 + 2)(q_2 + 1) = 2 \times (8 + 2) \times (9 + 1) = 200$$

La utilidad marginal del bien 1 indica cuánto varía la utilidad al variar en una unidad infinitesimal el consumo del bien 1. En este caso, si el bien 1 varía en una unidad, la utilidad aumenta aproximadamente en 200 unidades.

$$RMS_2^1 = \frac{U_2^{'}}{U_1^{'}} = \frac{(q_1 + 2)^2}{2(q_1 + 2)(q_2 + 1)} = \frac{(q_1 + 2)}{2(q_2 + 1)} = \frac{(8 + 2)}{2 \times (9 + 1)} = 0,5$$

La relación marginal de sustitución del bien 1 por el bien 2 indica cuánto tiene que variar el bien 1 al variar el bien 2 en una unidad infinitesimal para que la utilidad permanezca constante. En este caso, si el bien 2 varía una unidad, el bien 1 variará en 0,5 unidades y en sentido contrario.

b. **Obtenga las funciones de demanda del bien 1 y del bien 2 y calcule la combinación de consumo óptima y la utilidad del agente.**

En primer lugar, planteamos el problema de maximización con restricciones del consumidor:

$$\text{Max } U = (q_1 + 2)^2 \times (q_2 + 1)$$
$$s.a. Y \le p_1 q_1 + p_2 q_2$$

Las condiciones de primer orden son

$$RMS_2^1 = \frac{U_2^{'}}{U_1^{'}} = \frac{P_2}{P_1}$$
$$Y = p_1 q_1 + p_2 q_2$$

Despejamos q_1 en la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

$$\frac{(q_1+2)}{2(q_2+1)} = \frac{p_2}{p_1} \quad \Rightarrow \quad q_1 = \frac{2p_2 q_2 + 2p_2}{p_1} - 2 \quad \Rightarrow \quad Y = p_1\left[\frac{2p_2 q_2 + 2p_2}{p_1} - 2\right] + p_2 q_2$$

La función de demanda de q_2 queda

$$q_2 = \frac{Y - 2p_2 + 2p_1}{3p_2}$$

Despejamos ahora q_1 en la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

$$\frac{(q_1+2)}{2(q_2+1)} = \frac{p_2}{p_1} \quad \Rightarrow \quad q_2 = \frac{p_1 q_1 + 2p_1}{2p_2} - 1 \quad \Rightarrow \quad Y = p_1 q_1 + p_2\left[\frac{p_1 q_1 + 2p_1}{2p_2} - 1\right]$$

La función de demanda de q_1 es

$$q_1 = \frac{2Y - 2p_1 + 2p_2}{3p_1}$$

Una vez que tenemos las funciones de demanda sustituimos los datos que nos dan en el enunciado para obtener la combinación óptima y la utilidad (máxima):

$$q_1 = \frac{2 \times 1.000 - 2 \times 20 + 2 \times 10}{3 \times 20} = \frac{1.980}{60} = 33uds$$
$$q_2 = \frac{1.000 - 2x10 + 2x20}{3x10} = \frac{1.020}{30} = 34\ uds$$

U=$(33+2)^2 \times (34+1) = 42.875$

c. Calcule la elasticidad-renta del bien 1 e interprete el resultado, ¿qué tipo de producto es (en relación a su elasticidad-renta)?

La elasticidad renta está dada por

$$e_{q_1,Y} = \frac{\partial q_1}{\partial Y} \times \frac{Y}{q_1} = \frac{2}{3p_1} \times \frac{Y}{\frac{2Y - 2p_1 + 2p_2}{3p_1}} = \frac{2.000}{2.000 - 2 \times 20 + 2 \times 10} = 1,0101$$

Es un bien normal (la cantidad demandada y la renta varían en la misma dirección) y de lujo (dado que la elasticidad renta es mayor que 1). Al variar la renta un 1% la cantidad demandada del bien 1 varía en la misma dirección aproximadamente un 1,0101%

d. Halle el excedente del consumidor asociado al consumo del producto uno.

El excedente del consumidor lo hallamos a partir de la curva de demanda del bien 1, que está dada por:

$$q_1 = \frac{2.000 - 2p_1 + 2\times 10}{3p_1} = \frac{2.020}{3p_1} - \frac{2}{3}$$

Se observa que 1.010 es el precio máximo que este consumidor está dispuesto a pagar (ya que si $p_1 = 1.010$, entonces $q_1 = 0$). El excedente del consumidor vendrá dado por el área que queda entre $p_1 = 20$ y $p_1 = 1.010$.

$$EC = \int_{20}^{1.010} \left(\frac{2.020}{3p_1} - \frac{2}{3} \right) dp_1 = \left(\frac{2.020}{3} \ln(p_1) - \frac{2}{3} p_1 \right)\Bigg|_{20}^{1.010} = \frac{2.020}{3}\ln(1.010) - \frac{2}{3}\times 1.010 - \frac{2.020}{3}\ln(20) + \frac{2}{3}\times 20$$

$$= 4.657,92 - 673,33 - 2017,13 + 13,33 = 1.980,80\, u.m.$$

e. Considere otra persona B, que dispone de una renta de 1000 €, cuya función de demanda del bien 1 es: $q_1 = 0.1Y - 4p_1 + 2p_2$

i. Halle qué relación tiene que haber entre los precios para que esta función de demanda sea elástica. Es decir, ¿para qué valores de p_1 (en función de p_2) esta demanda es elástica?

La elasticidad-precio está dada por

$$e_{q_1,p_1} = -\frac{\partial q_1}{\partial p_1}\times\frac{p_1}{q_1} = -\frac{(-4)\,p_1}{0.1Y - 4p_1 + 2p_2} = \frac{4p_1}{0.1Y - 4p_1 + 2p_2}$$

La demanda es elástica si esta elasticidad es estrictamente mayor que 1, lo cual implica que

$$\frac{4p_1}{0,1Y - 4p_1 + 2p_2} > 1 \;\Leftrightarrow\; 4p_1 > 0,1Y - 4p_1 + 2p_2 \;\Leftrightarrow\; p_1 > \frac{1}{8}(0,1Y + 2p_2)$$

Con los datos del ejercicio, esto ocurre para $p_1 > \frac{120}{8} = 15.$

ii. Indique si los dos productos son complementarios o sustitutivos para la persona B e interprete el resultado (especifique claramente los cálculos en los que basa su respuesta).

Para responder tenemos que calcular la derivada de q_1 respecto a p_2 (o bien la elasticidad-cruzada). Esta derivada es igual a +2, positiva. Por tanto son productos sustitutivos ("no perfectos"). Si el precio del producto 2 sube, el consumo del producto 2 disminuye y el del producto 1 aumenta, de modo que el consumidor "sustituye" consumo del producto 2 por consumo del producto 1.

iii. Calcule la función de demanda agregada del bien 1 (solamente hay dos consumidores, uno de tipo A y otro de tipo B).

Las funciones de demanda individuales son

$$q_1 = \frac{2.000 - 2p_1 + 2\times 10}{3p_1} = \frac{2.020}{3p_1} - \frac{2}{3}\ , \quad q_1 = 0.1Y - 4p_1 + 2p_2 = 120 - 4p_1$$

Para calcular la demanda agregada hay que calcular el precio máximo que cada consumidor está dispuesto a pagar. Para la persona A este precio es 1010 (calculado en el apartado d). Y para el consumidor B este precio es 30 (ya que $q_1 = 120 - 4p_1 = 0$ implica $p_1 = 30$).

Por tanto, la función de demanda agregada es

$$Q_1^A = \begin{cases} \dfrac{2.020}{3p_1} - \dfrac{2}{3} & \text{si } 30 \le p_1 \le 1010 \\ 0 & \text{si } p_1 > 1010 \\ \dfrac{2.020}{3p_1} - \dfrac{2}{3} + 120 - 4p_1 & \text{si } p_1 \le 30 \end{cases}$$

16. Las preferencias de un individuo, cuya renta es 250 €, están representadas por $U(q_1, q_2) = (q_1 - 5)(q_2 - 5)$,

Los precios son $p_1 = 8€\ y\ p_2 = 10\ €$ **.**

a. Obtenga las funciones de demanda de ambos productos y la combinación de consumo óptima.

Obtenga las funciones de demanda de ambos productos y la combinación de consumo óptima.

Para calcular las funciones de demanda, planteamos el siguiente problema del consumidor:

$$\text{Max } U(q_1, q_2) = (q_1 - 5)(q_2 - 5)$$
$$s.a\ \ y = p_1 q_1 + p_2 q_2$$

Aplicando las condiciones de primer orden (c.p.o.):

$$\frac{U_1^{'}}{p_1} = \frac{U_2^{'}}{p_2} \Leftrightarrow \frac{(q_2 - 5)}{p_1} = \frac{(q_1 - 5)}{p_2}.$$

Despejamos $q_1 = \frac{p_2(q_2-5)}{p_1}+5$, lo sustituimos en la restricción presupuestaria $y = p_1 q_1 + p_2 q_2$, y obtenemos la función de demanda del bien 2

$$q_2^* = \frac{Y+5p_2-5p_1}{2p_2}$$

Análogamente, si despejamos $q_2 = \frac{p_1(q_1-5)}{p_2}+5$ en la primera c.p.o. y lo sustituimos en la restricción presupuestaria $y = p_1 q_1 + p_2 q_2$, obtenemos la función de demanda del bien

$$q_1^* = \frac{Y+5p_1-5p_2}{2p_1}$$

Sustituyendo *Y* = 250, $p_1 = 8€ \, y \, p_2 = 10 \, €$ hallamos la combinación de consumo óptima

$$q_1^* = \frac{Y+5p_1-5p_2}{2p_1} = \frac{250+5\times 8-5\times 10}{2\times 8} = 15$$
$$q_2^* = \frac{Y+5p_2-5p_2}{2p_2} = \frac{250-5\times 8+5\times 10}{2\times 10} = 13$$
$$U^*(q_1,q_2) = (q_1-5)(q_2-5) = (15-5)(13-5) = 80$$

b. Halle la elasticidad renta del bien 2, interprete el resultado e indique que tipo de bien es.

$$\eta_y = \frac{Y}{q_2}\frac{\partial q_2}{\partial Y} = \frac{Y}{\frac{Y+5p_2-5p_1}{2p_2}}\frac{1}{2p_2} = \frac{y}{Y+5p_2-5p_1} = \frac{250}{250-5\times 8+5\times 10} = 0{,}9615$$

Se trata de un bien normal ya que la elasticidad es mayor que 0, y de primera necesidad ya que la elasticidad es menor que 1. El valor concreto obtenido indica que si la renta sube un 1%, la cantidad consumida del bien 2 aumentará un 0.96% (aproximadamente).

c. Si el precio del bien 2 sube conteste razonadamente (no es necesario hacer cálculos, aunque puede hacerlos si lo prefiere; pero sí tiene que justificar sus respuestas):

i. ¿cómo cambiará la curva de demanda y la cantidad consumida del bien 1?

Los dos bienes son COMPLEMENTARIOS, ya que $q_2^* = \frac{Y-5p_1}{2p_2}+\frac{5}{2}$ y $\frac{\partial q_1}{\partial p_2} = \frac{-5}{2p_1} < 0$. Esto implica que si el precio del bien 2 aumenta, la demanda del bien 1 se desplaza hacia la izquierda, y la cantidad demandada disminuye.

ii. ¿cómo cambiará la curva de demanda y la cantidad consumida del bien 2?

El bien 2 (y el 1) es un bien ordinario, ya que $\frac{\partial q_2}{\partial p_2} = -\frac{(Y - 5p_1)}{2p_2^2} < 0$. Esto implica que si el precio del bien 2 aumenta, la demanda del bien 2 NO se desplaza hacia ningún lado, pero la cantidad demandada SÍ disminuye.

iii. ¿cómo cambiará la recta presupuestaria (recta de balance)?

La recta presupuestaria gira hacia abajo (disminuye el conjunto de combinaciones factibles) en torno al punto (0, Y/p_1) del eje q_1. La forma de las curvas de indiferencia no cambia y la combinación óptima es tal que se consume menos de ambos bienes.

d. Suponga que el gobierno da un bono regalo por 5 unidades del bien 1 (o, equivalentemente fija un precio 0 € para las 5 primeras unidades) y fija un precio = 10 € para el resto de unidades Además, crea un impuesto del 10% sobre la renta y mantiene = 10 €. Halle la combinación de consumo óptima e indique cuál es ahora la restricción presupuestaria.

La restricción presupuestaria queda así

$$Y - \tau Y = (1-\tau)Y = p_1(q_1 - 5) + p_2 q_2$$
$$(1-0.10)250 = 10(q_1 - 5) + 10q_2 = 10q_1 - 50 + 10q_2$$
$$275 = 10q_1 + 10q_2$$

Y la combinación óptima, si se cumple la restricción adicional $q_1 \geq 5$, es

$$q_1^* = \frac{Y + 5p_1 - 5p_2}{2p_1} = \frac{275 + 5\times10 - 5\times10}{2\times10} = 13.75 > 5$$
$$q_2^* = \frac{Y + 5p_2 - 5p_2}{2p_2} = \frac{275 + 5\times10 - 5\times10}{2\times10} = 13.75$$