ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS. Hoja de problemas 5

1. Demuestra que el conjunto $(\mathcal{C}([0,1]),+,\cdot)$, donde $\mathcal{C}([0,1]) := \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continua}\}$ con las operaciones

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) \qquad \text{y} \quad (f\cdot g)(x) = f(x)g(x) \text{ para } x \in [0,1]$$

   es un anillo. Especialmente señala los elemntos neutros respecto de las dos operaciones y el inverso de un elemento dado respecto de la primera. ¿Es conmutativo?

2. Demuestra que $\mathbb{Z}[i] = \{a+bi, \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$ y $\mathbb{Q}[i] = \{a+bi, \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$ son subanillos de $\mathbb{C}$. ¿Es alguno de ellos un cuerpo? Discute las mismas cuestiones para $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}] = \{a+b\sqrt{-2} \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$.

3. Halla las unidades de los siguientes anillos $\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{Q}[i]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$, $Z[\sqrt{-5}]$, $M_2(\mathbb{Q})$ y $M_2(\mathbb{Z})$.

   En lo que sigue, a menos que se especifique lo contrario, consideramos anillos conmutativos con unidad, y supondremos que $1 \neq 0$.

4. Demuestra que un cuerpo no tiene divisores de cero.

5. Sea A un anillo finito y sea $0 \neq a \in A$. Demuestra que la aplicación $f_a : A \to A$ definida por $f_a(x) = ax$ es biyectiva si y sólo si a no es un divisor de cero. Deduce que en un anillo finito todo elemento no nulo es o bien una unidad o bien un divisor de cero. Observa, en particular, que un anillo finito es un dominio si y solo si es un cuerpo.

6. Sea A un anillo. demuestra que el conjunto A^* de sus unidades es un grupo respecto de la multiplicación. Comprueba que este hecho es coherente con los resultados que has obtenido en el ejercicio 3.

7. Para cada elemento no nulo $x \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ decide si x es una unidad o un divisor de cero.

8. Demuestra que si A es un dominio conmutativo, entonces $A[X]$ es un dominio conmutativo.

9. Si R_1 y R_2 son dos anillos demuestra que $(R_1 \times R_2)^* = R_1^* \times R_2^*$.

10. Calcula el número de unidades del anillo finito $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, e indica cuántos divisores de cero tiene.

11. Demuestra que $R := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \ : \ a,b \in \mathbb{R} \right\}$ es un subanillo conmutativo del anillo no conmutativo $M_2(\mathbb{R})$. Decidir si R es un cuerpo y si la respuesta es afirmativa intentar establecer un isomorfismo con algún cuerpo conocido.

12. Sea R un anillo e I un ideal de R. Demuestra que los siguientes subconjuntos de R son ideales de R.
    (a) $Rad(I) := \{a \in R : a^n \in I \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$ (el radical de I). (¿Quién es $Rad(I)$ cuando $I = (4) \subset \mathbb{Z}$ y cuando $I = (X^3) \subset \mathbb{R}[X]$?)
    (b) $Ann(I) := \{a \in R : ax = 0 \text{ para todo } x \in I\}$ (el anulador de I). (¿Quién es $Ann(I)$ cuando $I = (4) \subset \mathbb{Z}$ y cuando $I = (\overline{2}) \subset \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$?)

13. Sea R un anillo conmutativo con unidad. Demuestra lo siguiente:
    (a) Si I es un ideal de R entonces, $I = R \iff$ existe una unidad de R en I.
    (b) R es un cuerpo $\iff \{0\}$ es el único ideal propio de R.

14. Sean los anillos $A_1 = \mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{a+b\sqrt{3}|a,b \in \mathbb{Z}\}$ y $A_2 = \mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a+b\sqrt{2}|a,b \in \mathbb{Z}\}$. Consideramos los anillos cociente $R_i = A_i/2A_i$ con $i = 1,2$. Para $i = 1,2$, halla:
    (a) el número de elementos de R_i;
    (b) todos los ideales de R_i.

15. Sea $r \in \mathbb{R}$. Decide si el conjunto $M_r = \{f \in \mathcal{C}([0,1]) \mid f(r) = 0\}$ es un ideal del anillo $\mathcal{C}([0,1])$.

16. Sea $f : A \to A'$ un homomorfismo de anillos y sean I e I' ideales de A y A' respectivamente. Se pide:
    (a) Probar que $f(A)$ es un subanillo de A'.

(b) Probar que $f^{-1}(I')$ es un ideal de A.

(c) Probar que $f(I)$ es un ideal de A' si f es suprayectivo.

(d) Dar un ejemplo de un homomorfismo de anillos $f : A \to A'$ y de un ideal I de A tal que $f(I)$ no sea un ideal.

17. Consideremos el caso particular del ejercicio anterior en el que el homomorfismo es la aplicación cociente $\pi : A \to A/I$ definida por $\pi(a) = a + I = \overline{a}$.

    (a) Demuestra que la aplicación
    $$M \longrightarrow \pi^{-1}(M)$$
    establece una aplicación biyectiva entre los conjuntos {ideales de A/I} e {ideales de A que contienen a I} que tiene como inversa la aplicación
    $$J \longrightarrow \pi(J) = J/I$$

    (b) Usa este resultado para encontrar todos los ideales en $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ y en $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ y señala entre ellos a los maximales.

18. Indica cuántos ideales primos tiene el anillo $\mathbb{R}[X]/I$ si $I = ((X^2 - 1)^5)$.

19. Demuestra que $\{(3a, b) : a, b \in \mathbb{Z}\}$ es un ideal maximal de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y que $\{(a, 0) : a \in \mathbb{Z}\}$ es un ideal primo pero no maximal de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Intenta hacerlo estableciendo un isomorfismo entre el cociente del anillo por el primero (respectivamente del segundo) y un cuerpo (respectivamente un dominio que no sea un cuerpo).

20. Sea F un cuerpo y $a \in F$. Demuestra que el núcleo del homomorfismo de evaluación $ev_a \colon F[X] \to F$ es un ideal maximal de $F[X]$. Señala un generador.

21. Sea R un dominio. Halla el núcleo del homomorfismo de evaluación $ev_0 \colon R[X] \to R \colon f(X) \mapsto f(0)$.

22. Demuestra la existencia de los siguientes isomorfismos dando el isomorfismo explicitamente:

    (a) $\mathbb{Z}[X]/I \cong \mathbb{Z}$, donde $I = \{p(X) \in \mathbb{Z}[X] \,|\, p(2) = 0\}$;

    (b) $\mathbb{Q}[X]/I \cong \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, donde $I = (X^2 - 2)$.