

EA. Parcial grupos. Grado en Matemáticas

26 de abril de 2017

1. (3 puntos) Sean G un grupo, B un conjunto no vacío y Φ una acción de G sobre B .
 - a) (1 punto) Sea $b \in B$. Define (de manera precisa) estabilizador de b y órbita de b con respecto a la acción Φ .
 - b) (2 puntos) Enuncia y demuestra el teorema de la órbita-estabilizador.
2. (4 puntos) Sean G y H dos grupos. Sea $K = G \times H$ el producto cartesiano de G por H . Sean $a \in G$ y $b \in H$.
 - a) (1,5 puntos) Determina el orden de (a, b) en K en función de los órdenes de a y b . Da una demostración de la fórmula que obtengas.
Nota: No olvides contemplar también el caso de elementos de orden infinito.
 - b) (0,5 puntos) Considera $G = \mathbb{Z}_7^*$ como grupo con la multiplicación. Encuentra **un** elemento de cada uno de los órdenes posibles.
 - c) (0,5 puntos) Considera $H = \mathbb{Z}_{10}$ como grupo con la suma. Encuentra **un** elemento de cada uno de los órdenes posibles.
 - d) (1,5 puntos) Considera $K = G \times H = \mathbb{Z}_7^* \times \mathbb{Z}_{10}$. Encuentra **un** elemento de cada uno de los órdenes posibles.
Pista: Puedes apoyarte en el apartado a) de este ejercicio.

Nota: En este ejercicio se valorará en la puntuación encontrar razonadamente **un** elemento de cada uno de los órdenes que se piden y justificar por qué no hay elementos de otros órdenes sin pasar por enumerar uno a uno todos los elementos del grupo. No se recomienda resolver de esta última forma el ejercicio porque la puntuación, en ese caso, estará lejos de la máxima.

3. (3 puntos) Sean $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, n par. Consideramos el grupo diedral D_n . Sea σ el giro de ángulo $2\pi/n$ en sentido positivo. Considera el subgrupo $H = \langle \sigma^2 \rangle$
 - a) (0,5 puntos) ¿Cuál es el valor de $[G : H]$, el índice de H en G ? Justifica tu respuesta.
 - b) (1 punto) Demuestra que H es normal en G .
 - c) (1 punto) Considera el caso $n = 8$, es decir $G = D_8$. Construye explícitamente el cociente G/H , hallando todas las clases de equivalencia y los elementos de D_8 que las constituyen.
 - d) (0,5 puntos) Determina un grupo de la forma \mathbb{Z}_m o de la forma $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_k$ al que sea isomorfo el cociente G/H del apartado anterior. Justifica tu respuesta.

Nota: Se recomienda para este ejercicio usar la notación que hemos estado empleando en clase para D_n , escribiendo sus elementos a partir de σ y una simetría cualquiera τ .

4. (Extra, 2 puntos) Sean $B = \mathbb{C}$, el conjunto de los números complejos, y $G = \mathbb{S}_1$, la circunferencia unidad en \mathbb{C} considerada como grupo con la multiplicación. Se define una acción de G sobre B mediante la multiplicación de números complejos: si $z \in G$ y $w \in B$ la acción es $\Phi(z, w) := zw$. Encuentra todas las órbitas y estabilizadores de la acción. Describe las órbitas geoméricamente.