EA. Parcial grupos. Grado en Matemáticas

27 de abril de 2016

---

1. (4 puntos) Teoría:

   a) (0,25 puntos) Sean G un grupo y $a \in G$. Definimos la función $f_a : G \longrightarrow G$ como $f_a(b) := ab$. Demuestra que f es una biyección.

   b) (0,25 puntos) ¿En qué casos es f_a un isomorfismo de grupos?

   c) (0,5 puntos) Sean G un grupo y H un subgrupo de G. Definimos en G la siguiente relación:
   $$x \equiv y \bmod H \iff x^{-1}y \in H$$
   Demuestra que esta relación es de equivalencia.

   d) (0,25 puntos) Define el índice de H en G.

   e) (2 puntos) Enuncia y demuestra el teorema de Lagrange para grupos finitos. Puedes utilizar los apartados anteriores.

   f) (0,25 puntos) Dados G y un elemento $a \in G$, define $ord(a)$ y $ord(G)$.

   g) (0,5 puntos) Usa el teorema de Lagrange para demostrar que si G es un grupo finito y $a \in G$ entonces $ord(a)$ es un divisor de $ord(G)$.

2. (5 puntos) Considera el grupo $G = D_8 \cap A_8$, donde D_8 es el grupo diedral y A_8 es el grupo alternado.

   a) (1 punto) Halla razonadamente todos los elementos de G. Escríbelos como permutaciones de S_8 utilizando la notación de ciclos.

   b) (1 punto) Halla todos los subgrupos cíclicos de G.

   c) (0,5 puntos) Determina cuáles de estos subgrupos son normales en G.

   d) (0,5 puntos) Para cada uno de los subgrupos normales que hayas encontrado, estudia el cociente de G por ese subgrupo y determina a qué grupo que hayamos estudiado es isomorfo.

   e) (1 punto) Considera la acción natural del grupo G sobre $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ (cada permutación actúa sobre un elemento de B ya que es una función de B en B). Halla las órbitas y los estabilizadores de todos los elementos de B.

   Pista: Puedes hacer perfectamente el ejercicio considerando los elementos de G como permutaciones. Pero verlos como elementos de D_8, es decir, como transformaciones del plano que dejan invariante un octógono regular, te puede ayudar.

   f) (Extra: 1 punto) ¿Puedes encontrar un subgrupo H de G que cumpla que la acción de H sobre B parte B en 3 órbitas distintas?

3. (2 puntos) Sean G un grupo, $H < G$ y $K < G$, es decir, H y K subgrupos de G. De las siguientes afirmaciones 2 son ciertas y 2 son falsas. Di cuáles son las ciertas y demuéstralas. Di cuáles son las falsas y encuentra un contraejemplo.

   a) $H \cup K < G$

   b) $H \cap K < G$

   c) $H \triangleleft G \;\Rightarrow\; H \cap K \triangleleft G$

   d) $H \triangleleft G,\, K \triangleleft G \;\Rightarrow\; H \cap K \triangleleft G$

   Nota: $H \triangleleft G$ quiere decir que H es subgrupo normal de G.